σημειώσεις
Σταματίας Μ.
διαλέξεις
Κ. Θεοφιλάτου

Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας.

07.11.2023

μετασχηματισμός ταχύτητας.

$X^\mu = (t, \vec{r})$ θέση.

μετασχηματίζεται ως 4-άνυσμα για τους ομογενείς μετασχηματισμούς Lorentz, δηλ. αυτοί που αφήνουν το $(0,0,0,0)$ στην θέση του (στροφές + προωθήσεις)

Δx^μ, dx^μ ⇝ μετ. ως 4-άνυσμα για γενικούς μετ. Lorentz (στροφές, προωθήσεις + μετατοπίσεις)

$dx^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu}\, dx^\mu$ μετασχηματισμός.

▷ Ταχύτητα $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ $\quad u^\mu = ?$

Δοκιμάζουμε το $\frac{dx^\mu}{dt}$

π.χ. $\Lambda(\vec{v} = v\hat{x})$. Θέλουμε να δούμε τι μορφή έχει το $\frac{dx^{\mu'}}{dt'}$.

Θα είναι $u^\mu \overset{?}{=} \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{d}{dt}(t, x, y, z) = (1, \vec{u})$

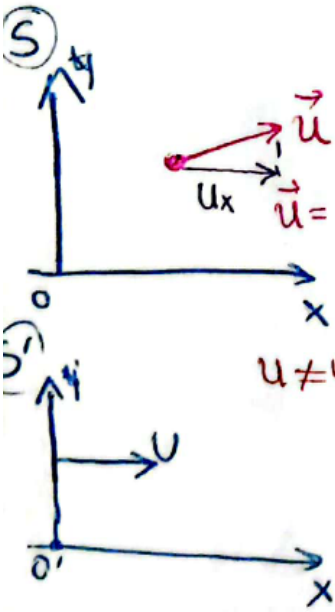
ξέρουμε ότι δε θα δουλέψει

δεν πρέπει να μπερδεύουμε την ταχύτητα αυτή (σωματιδίου) με αυτή του μετ. Lorentz.

Υπενθύμιση:
$$\left\{\begin{aligned} dt' &= \gamma(dt - v\,dx) \\ dx' &= \gamma(dx - v\,dt) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \end{aligned}\right\}$$

Θα είναι $u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - v\,dt)}{\gamma(dt - v\,dx)} =$

$$\Rightarrow u_x' = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - v\frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - v}{1 - v u_x}$$ ⇝ θυμίζει σύνθεση ταχυτήτων στην μία διάσταση.



← Το σωματίδιο θα κινείται και το θεωρούμε ως ένα 3ο σύστημα.

$u \neq v$

το S' "τρέχει" παράλληλα με την u_x

$$\Lambda(\vec{v}_2 = v_2\hat{x})\,\Lambda(\vec{v}_1 = v_1\hat{x}) = \Lambda\left(\frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}\right)$$

έχουμε άθροιση των ταχυτήτων v_1 και v_2 απλώς κανονικοποιημένη ώστε να μην ξεπεράσει την ταχύτητα του φωτός.

συνέχεια υπολογισμού: $u_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - v\,dx)} = \frac{u_y/\gamma}{1 - v u_x}$

όμοια $u_z' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma(dt - v\,dx)} = \frac{u_z/\gamma}{1 - v u_x}$

→ οι αλλαγές αυτές είναι διαισθητικά παράξενες

Άρα το "δοκιμαστικό" τετράνυσμά μας είναι:

$$u^{\mu'} \overset{?}{=} (1, u_x', u_y', u_z') = \left(1, \frac{u_x - v}{1-u_x v}, \frac{u_y/\gamma}{1-u_x v}, \frac{u_z/\gamma}{1-u_x v}\right)$$

η ποσότητα αυτή δεν ακολουθεί τον τρόπο που πρέπει να μετασχηματιστεί ένα 4-άνυσμα.

Ο κινούμενος παρατηρητής στον x άξονα βλέπει την u_x' μειωμένη (κάτι διαισθητικά αναμενόμενο) όπως και τις u_y', u_z' κατά έναν παράγοντα $\frac{1}{\gamma}$

Δοκιμάζουμε τώρα $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ → ιδιοχρόνος.

$$(dt')^2-(dx')^2-(dy')^2-(dz')^2 = dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$$ → αναλλοίωτη ποσότητα 4-ανύσματος.

Ιδιοχρόνος: Χρόνος στο σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου.

Άρα $dx' = dy' = dz' = 0$ → μένει ακίνητο.

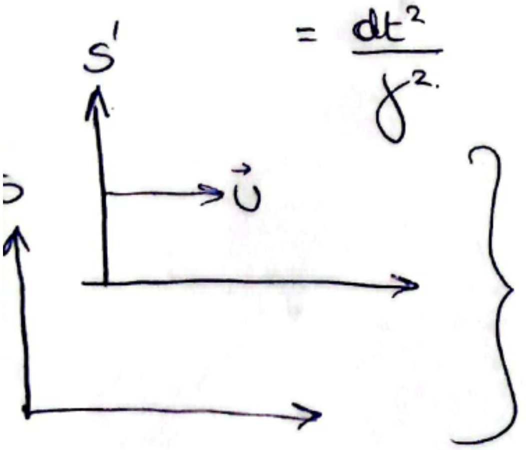
Άρα $d\tau^2 = (dt')^2 = -\frac{ds^2}{c^2}$ αναλλοίωτη ποσότητα. $(c=1)$

το (-) χρειάζεται όταν υιοθετούμε την σύμβαση $\eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= dt^2(1 - \vec{v}\cdot\vec{v})$$

$$= \frac{dt^2}{\gamma^2} \Rightarrow \boxed{\gamma\, d\tau = dt}$$

καταλήξαμε και πάλι στην διαστολή χρόνου



οι πράξεις αυτές είναι απλά για το ακίνητο S και το S' που κινείται με $\vec{v}$. Δεν αναφερόμαστε σε άλλο σωματίδιο που κινείται με u ως προς το S και u' ως προς το S'

Τώρα εάν έχουμε και το σωματίδιο: (έτσι ώστε το S' να ταυτίζεται με το σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου ⇒ 2 συμπίπτουν)

$$U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{(dt/\gamma)} = \gamma\frac{dx^\mu}{dt} = (\gamma, \gamma\vec{u}).$$

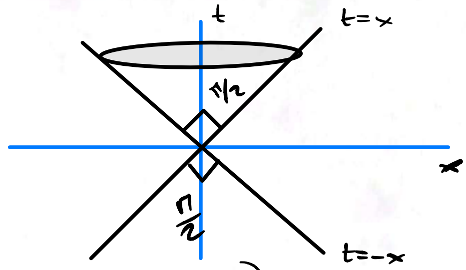
→ "υβριδική" ποσότητα διότι χρησιμοποιεί τον ιδιόχρονο $d\tau$, δηλ τον χρόνο dt του S' ενώ τη θέση dx^μ του S.

$$U^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\ \mu} U^\mu$$

άρα εδώ $\vec{u} = \vec{v}$.

Άρα $U^\mu = (\gamma, \gamma\vec{u}) = \gamma \frac{dx^\mu}{dt}$

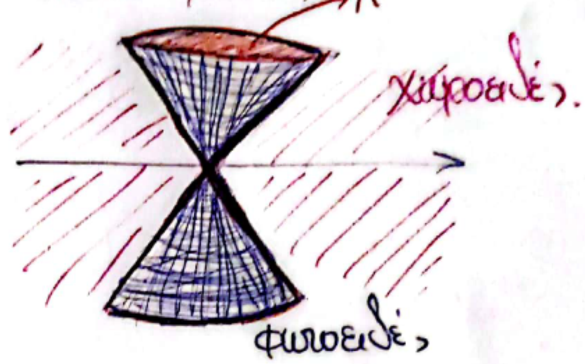
$U_\mu = (-\gamma, \gamma\vec{u})$ αφού $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$



Άρα $U^\mu \cdot U_\mu = -\gamma^2 + \gamma^2(\vec{u}\cdot\vec{u}) = -1$.

$\eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \rightsquigarrow$ χρονοειδές διάνυσμα : εντός κώνου φωτός

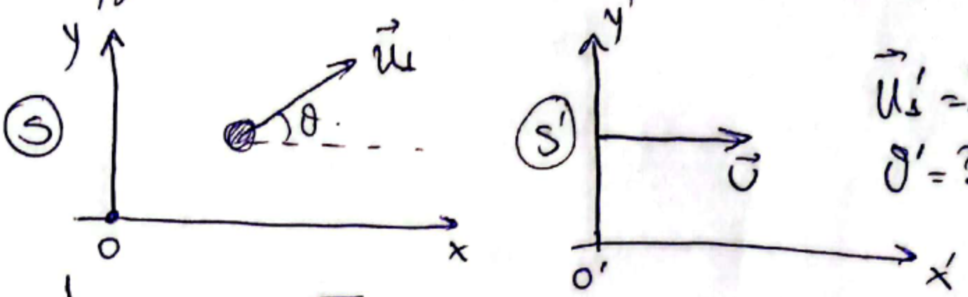
χρονοειδές : εντός κώνου φωτός
φωτοειδές : επάνω στον κώνο φωτός
χωροειδές : εκτός κώνου φωτός



Άσκηση (από Griffiths) πρόβλημα 10.23.

$\vec{u}_1 = (\sqrt{\tfrac{2}{5}}, \sqrt{\tfrac{2}{5}}, 0)$

$\vec{v} = (\sqrt{\tfrac{2}{5}}, 0, 0)$



$\vec{u}_1' = ?$
$\theta' = ?$

$U_1^\mu = (\gamma_1, \gamma_1 \vec{u}_1)$, $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}} = \sqrt{5}$

άρα $U_1^\mu = (\sqrt{5}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ Είναι $U_1^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} U_1^\mu$

$\gamma = \sqrt{\tfrac{5}{3}}$

$$\Rightarrow U_1^{\mu'} = \begin{bmatrix} \sqrt{5/3} & -\sqrt{2/3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2/3} & \sqrt{5/3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

άρα $U_1^{\mu'} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

Γενικά: για επαλήθευση ελέγχαμε εάν $U^{\mu'} U_{\mu'} = -1$.

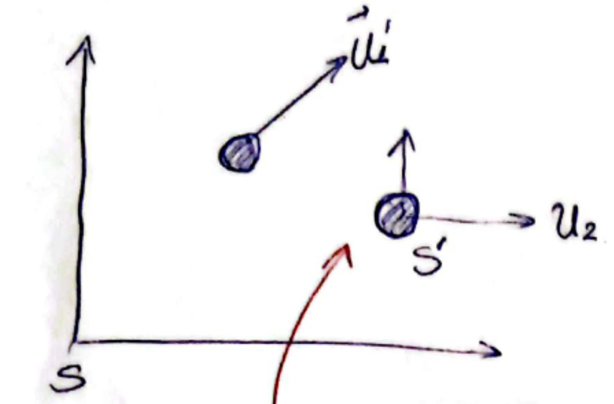
όμως $U_1^{\mu'} = \begin{bmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_1' u_{1x}' \\ \gamma_1' u_{1y}' \\ \gamma_1' u_{1z}' \end{bmatrix}$ άρα $\gamma_1' = \sqrt{3}$

$$= \gamma_1' \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{u}_1' \end{pmatrix} = \sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2/3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Δεν χρησιμοποιούμε τη σχέση των γωνιών μετασχηματισμού στην ταχύτητα.

$|\vec{u}_1'| = \sqrt{2/3}$ και $\theta' = \pi/2$

β' τρόπος



έχουμε ορίσει το S' έτσι ώστε να κινείται με το σύστημα ηρεμίας 2ου σωματιδίου με ταχύτητα $u_2 = \left(\sqrt{\frac{2}{5}}, 0, 0\right)$.

S	S'
u_1^{μ}	$u_1^{\mu'}$
u_2^{μ}	$u_2^{\mu'}$

$\Downarrow$

S	S'
$u_1^{\mu} = (\sqrt{5}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$	$u_1^{\mu'} = (\gamma_1', \gamma_1' \vec{u}_1')$
$u_2^{\mu} = \left(\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0, 0\right)$	$u_2^{\mu'} = (1, 0)$

αφού είναι στο σύστημα ηρεμίας του.

(*) $\underbrace{\overset{\text{στο } \boxed{S}}{u_1^{\mu} \cdot u_{2\mu}} = \overset{\text{στο } \boxed{S'}}{u_1^{\mu'} \cdot u_{2\mu'}}}_{\text{αναλλοίωτη ποσότητα στην οποία συμφωνούν όλοι οι παρατηρητές.}} \Rightarrow \sqrt{5}\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} + 0\sqrt{2} + 0 = -\gamma_1'$

$\Rightarrow \gamma_1' = \sqrt{3}.$

Άρα $|\vec{u}_1'| = \sqrt{\frac{2}{3}}.$

⤳ εδώ δε μπορούμε να βρούμε τις συνιστώσες, παρά μόνο το μέτρο.

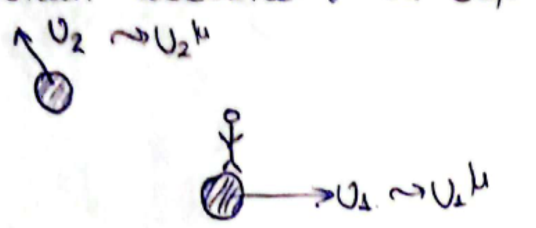
(*) το γινόμενο αυτό μας δίνει την ταχύτητα με την οποία το 2 βλέπει το 1 να κινείται στο δικό του σύστημα αναφοράς.

Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας.

Είδαμε ότι ο κατάλληλος μετασχηματισμός της ταχύτητας είναι ο: $U^\mu = (\gamma, \gamma\vec{u})$. Ισχύει $(U^\mu)^2 = U^\mu U_\mu = -1$ αναλλοίωτη ποσότητα.

~> Όταν γράφουμε μια εξίσωση τανυστών σε ένα σύστημα αναφοράς παραμένει αναλλοίωτη σε όλα τα συστήματα. Γι' αυτό έχουμε την απαίτηση η ταχύτητα να ικανοποιεί τις ιδιότητες των 4-ανυσμάτων. Οι "συμμετρίες" μας στη σχετικότητα είναι οι μετασχηματισμοί Lorentz.

Αναλλοίωτη ποσότητα: $U_2^{\mu} U_{1\mu} = U_2^{\mu'} U_{1\mu'}$



Για το σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου (1) η τετρα-ταχύτητα παίρνει την μορφή $(1, \vec{0})$

Τετραορμή

$\vec{P}_{κλ} = m\vec{v}$

$P^\mu = mU^\mu$ γενίκευση της Νευτώνειας σχέσης.

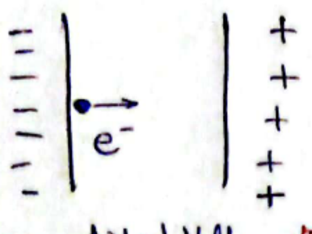
$= (\underbrace{m\gamma}_{\text{χρονικό κομμάτι}}, \underbrace{m\gamma\vec{u}}_{\text{χωρικό κομμάτι}})$

Υπενθύμιση: $c \equiv 1$ και $0 \le u < 1$

$\equiv (E, \vec{p})$ Τότε $\vec{p} = \gamma m\vec{u}$ και $E = \gamma m$

$$\Rightarrow E = \frac{m}{\sqrt{1-u^2}} \simeq m\left(1 + \frac{u^2}{2} + \dots\right) = m + \frac{1}{2}mu^2 + \dots$$

σε πρώτη προσέγγιση η ενέργεια ενός σωματιδίου ισούται με τη μάζα του και την κινητική του ενέργεια. $T \equiv E - m$



$q\cdot\Delta V = 1\,eV \simeq 1.6\cdot10^{-19}$ Joule

$m_e = 511$ keV

$m_p = 1$ GeV

Έστω ακίνητο
Το e^- θα επιταχυνθεί

$$(P^\mu)^2 = P^\mu \cdot P_\mu = (\gamma m, \gamma m\vec{u})\cdot(-\gamma m, \gamma m\vec{u}) = -m^2 \quad (1)$$

αναλλοίωτη ποσότητα για όλους τους παρατηρητές

Όμως $(p^\mu)^2 = (E, \vec{p})\cdot(-E, \vec{p}) = -E^2 + (\vec{p})^2 \quad (2)$

(1),(2) $\Rightarrow E^2 = p^2 + m^2$. Για $c \neq 1$ $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$.

Χρησιμοποιήσαμε την $(-,+,+,+)$. Εάν χρησιμοποιούσαμε την $(+,-,-,-)$ προκύπτει $(p_\mu)^2 = m^2$ χωρίς δηλ. το αρνητικό $(-)$.
Για διευκόλυνση με τα προβλήματα σε πολλά βιβλία σωματιδιακής φυσικής χρησιμοποιείται η δεύτερη μετρική.

Για $c \equiv 1$ $E = \gamma m c^2 = \gamma m_0 c^2$. m_0: μάζα ηρεμίας } είναι όλα
ή διαφορετικά $E = mc^2$ m: σχετικιστική μάζα } ορισμοί.
ή $E_0 = mc^2$ E_0: ενέργεια ηρεμίας. Δε θα ασχοληθούμε με σχετικιστική μάζα.
τετραορμή ~> χρονοειδές.
Χρησιμοποιούμε $E = \gamma m c^2$.
Όταν αναφερόμαστε σε φωτόνιο
τότε έχουμε φωτοειδές.
~> πώς γράφεται τότε η P^μ? Για ένα φωτόνιο ισχύει $E = h \cdot \nu$
και $|\vec{p}| = h/\lambda$, $\lambda \nu = c \equiv 1$

Το φωτόνιο έχει μια διεύθυνση διάδοσης $\vec{n} = \frac{\vec{P}}{|\vec{p}|}$ (κατεύθυνση κίνησης) $(\vec{n} = \hat{n})$
μοναδιαίο

Άρα για φωτοειδές ~~τετράνυσμα~~ διάνυσμα τετραορμής: $P_\gamma^\mu = (E, E\vec{n})$

$$\left.\begin{aligned} E &= \gamma m \\ \vec{p} &= \gamma m \vec{v} = \gamma m \frac{d\vec{r}}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{p}}{E}$$ άλλος τρόπος υπολογισμού της ταχύτητας.

ή $P_\gamma^\mu = (|\vec{p}|, \vec{p})$

Άρα σχέσεις που προέκυψαν μέσω της τετραορμής:
$$\vec{v} = \frac{\vec{P}}{E} \quad \text{και} \quad E^2 = p^2 + m^2.$$

Δύο είδη σωματιδίων:

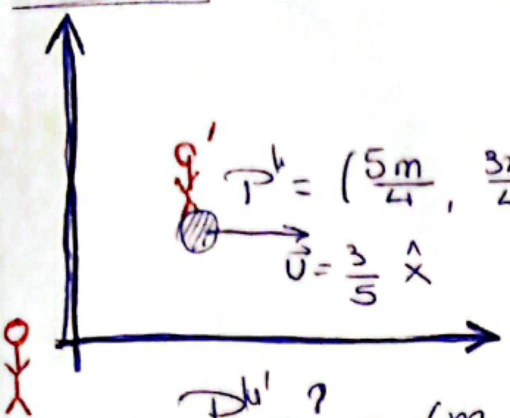
$m > 0$

$$\begin{bmatrix} m\gamma \\ m\gamma\vec{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ \vec{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{m^2 + p^2} \\ \vec{P} \end{bmatrix}$$
διάνυσμα τετραορμής

$m = 0$

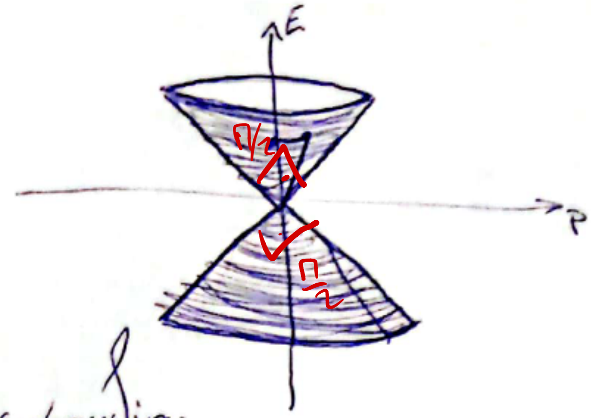
$$\begin{bmatrix} |\vec{p}| \\ \vec{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\nu \\ h\nu\hat{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ E\hat{n} \end{bmatrix}$$
διάνυσμα τετραορμής.

Άσκηση. (όμοια με της προηγούμενης διάλεξης).



$P^\mu = \left(\frac{5m}{4}, \frac{3m}{4}, 0, 0\right)$

$\vec{u} = \frac{3}{5}\hat{x}$



$P^{\mu'} = ? = (m, \vec{0})$ στο σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου

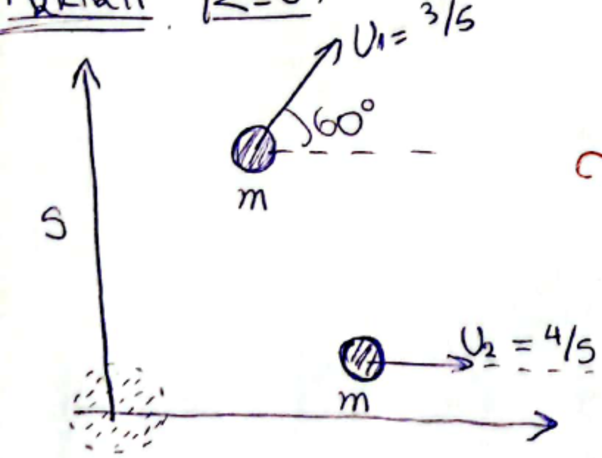
$\vec{u} = \frac{3}{5}\hat{x}$. $\quad P^\mu \cdot P_\mu = -\left(\frac{5m}{4}\right)^2 + \left(\frac{3m}{4}\right)^2 = -m^2$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{5}{4}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{φυσικό επιχείρημα.}} \overset{\text{πρέπει}}{=\!=} \underbrace{\begin{pmatrix} 5/4 & -3/4 \\ -3/4 & 5/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5m/4 \\ 3m/4 \end{pmatrix}}_{\text{κάνοντας τις πράξεις επαληθεύεται ότι ισούται με } \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}}$$

→ σε κάθε σύστημα αναφοράς μπορούμε να βρούμε ότι αντιστοιχεί και ένα σωματίδιο.

Άσκηση $\boxed{z=0}$



S': σύστημα ηρεμίας του (2.)

α) $E_1, E_2, \vec{P}_1, \vec{P}_2, T_1, T_2$ και στο S και το S'.

→ Ούτε η ενέργεια ούτε η ορμή είναι αναλλοίωτες ποσότητες. Είναι όμως διατηρήσιμες σε κάθε σύστημα. Αυτό που είναι αναλλοίωτο είναι το μέτρο της τετραορμής.

β) u_1 στο S'.

α) $\vec{u}_1 = \left(\frac{3}{5}\cos\frac{\pi}{3}, \frac{3}{5}\sin\frac{\pi}{3}, 0\right) = \left(\frac{3}{10}, \frac{3\sqrt{3}}{10}, 0\right) \qquad \gamma_1 = 5/4$

$\vec{u}_2 = \left(\frac{4}{5}, 0, 0\right) \qquad \gamma_2 = 5/3$

Είναι $P_1^\mu = (m\gamma_1, m\gamma_1\vec{u}_1)$ και $P_2^\mu = (m\gamma_2, m\gamma_2\vec{u}_2)$ στο S

$E_1 = m\gamma_1$ και $\vec{P}_1 = m\gamma_1\vec{u}_1$ ενώ $E_2 = m\gamma_2$ και $\vec{P}_2 = m\gamma_2\vec{u}_2$

για τις κινητικές
ενέργειες $T_1 = E_1 - m = (\gamma_1 - 1)m$ και αντίστοιχα $T_2 = (\gamma_2 - 1)m$

Για το S':

$$[\Lambda^{\mu'}{}_{\mu}] = \begin{bmatrix} \gamma_2 & -\gamma_2 v_2 & 0 \\ -\gamma_2 v_2 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 & -4/3 & 0 \\ -4/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2^{\mu'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5/3 & -4/3 & 0 \\ -4/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Lambda^{\mu'}{}_{\mu}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{5}{3}m \\ \frac{4}{3}m \\ 0 \end{bmatrix}}_{P_2^{\mu}} = \dots = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

καταλήξαμε σε αυτό που περιμέναμε αφού είμαστε στο σύστημα ηρεμίας του

Άρα για το (2)

$E_2' = m$

$\vec{P}_2' = \vec{0}$

$T_2' = 0$

$$P_1^{\mu'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5/3 & -4/3 & 0 \\ -4/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Lambda^{\mu'}{}_{\mu}} \underbrace{\begin{bmatrix} 5/4 \\ 3/8 \\ 3\sqrt{3}/8 \end{bmatrix}}_{P_1^{\mu}} = \dots = \begin{bmatrix} 19/12 \; m \\ -25/24 \; m \\ 3\sqrt{3}/8 \; m \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_1^{\mu} = \begin{bmatrix} m\gamma_1 \\ m\gamma_1 \vec{v}_1 \end{bmatrix} \qquad \gamma_1 = 5/4$$

Άρα για το (1)

$$\vec{v}_1' = \frac{[-25/24, \; 3\sqrt{3}/8, \; 0]}{(19/12)} \xrightarrow{\text{άρα}} |\vec{v}_1'| \simeq 0.78$$

άλλος τρόπος:

Αναλλοίωτη Ποσότητα κατά Lorentz: $P_1^{\mu} \cdot P_{2\mu} = P_1^{\mu'} P_{2\mu'}$

$$\Rightarrow m^2\left[-\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{3} + \frac{3}{8}\,\frac{4}{3}\right] = (m\gamma_1', \gamma_1' m\vec{v}_1') \cdot (-m, \vec{0}) = -m^2\gamma_1'$$

$$\Rightarrow \gamma_1' = 19/12 \quad \text{και} \quad |\vec{v}_1'| = \sqrt{1-\gamma^{-2}} \simeq 0.78$$