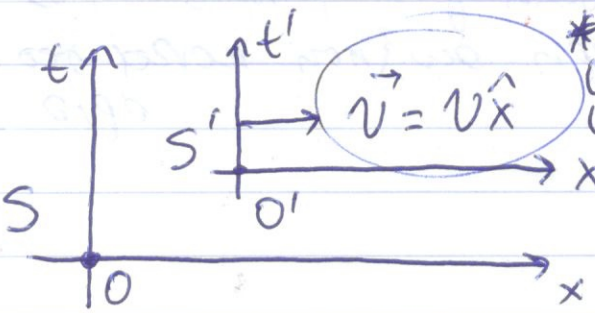
1.

σημειώσεις Αλεξανδρας Ν.
3η διάλεξη κ. Θεοφιλατου
10.10.2023

#3 → παθιερωμένος μετ. Lorentz

Γενικοποιημένος Μετασχ. (προώθ.) Lorentz



για $t'=0$, $x'=0$
→ $t=0$, $x=0$

$$\boxed{\begin{aligned} t' &= \gamma(t - vx) \\ x' &= \gamma(x - vt) \end{aligned}} \quad c=1\,[\dots]$$

Κάθετες διευθύνσεις (ως προς την $\vec{v}$)

$$\boxed{y'=y}\ , \quad \boxed{z'=z} \quad (c=1)$$

$$\boxed{\gamma = \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}} \quad c=1\,[\dots]$$

* Πως επαναφέρω $c = \dots$ m/s :

$$t'[s] = \gamma\left(t[s] - \frac{v\left[\frac{m}{s}\right] x[m]}{c^2\left[\frac{m^2}{s^2}\right]} \to [s]\right)$$

$$x'[m] = \gamma\left(x[m] - v\left[\frac{m}{s}\right] t[s] \to [m]\right) \checkmark$$

Όριο του γ : $f(x) = (1-x)^{-1/2}$

$f'(x) = \frac{-1}{2}(1-x^2)^{-3/2}(-1)$

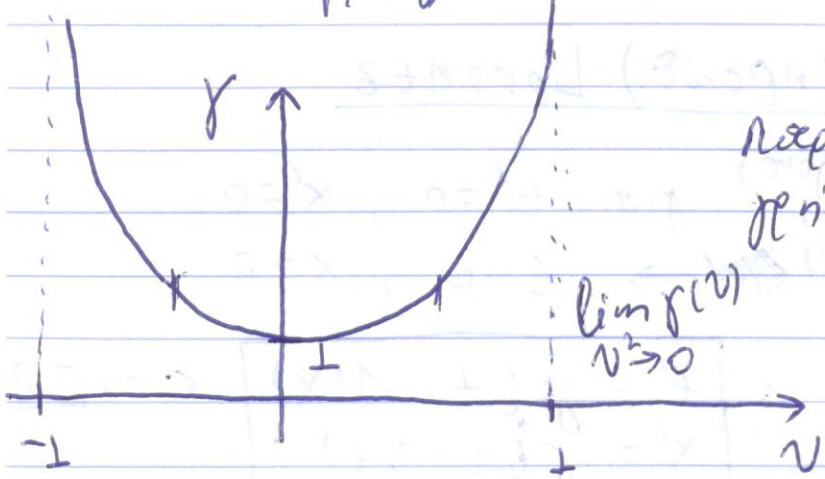
Taylor: $f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \dots$

$\lim_{v^2 \to 0} \gamma(v) \simeq 1 + 1/2\, v^2 + \cancel{\mathcal{O}(3)}^{\to 0}$

(2.)

$0 \leq v < 1$

$$\gamma = \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \simeq 1 + \frac{v^2}{2} + \underbrace{\mathcal{O}(3)}_{\simeq 0}$$



Παραβολή για μικρές ταχύτητες σε σύγκριση με το φως

* όταν $v = 1 - \varepsilon$ (ε πολύ μικρό) $\quad ((v \simeq 1))$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-1-(-2\varepsilon)-\varepsilon^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$$

$\varepsilon^2 \simeq 0$ π.χ. $\varepsilon = 10^{-4}$, $\varepsilon^2 = 10^{-8}$

* Νευτώνιο όριο $c \to \infty$:

$\gamma = 1$, $t' = \gamma^1 (t - \frac{v}{c^2} x^0 = t$, απόλυτος / καθολικός χρόνος

$x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$

Γαλιλαίος Μετασχ.

3.

- Πίνακες

$$\underset{4\times1}{X} = \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \underset{4\times1}{X'} = \begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \Bigg\} \; X' = \Lambda \cdot X$$

$$\Lambda(\vec{v} = v\hat{x}) = \begin{array}{c} \\ t \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t & x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\Lambda(\vec{v} = v\hat{y}) = \begin{array}{c} \\ t \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t & x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} \gamma & 0 & -\gamma v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma v & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\Lambda(\vec{v} = v\hat{z}) = \begin{array}{c} \\ t \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t & x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma v & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \end{array}$$

- Συνιστώσες / Δείκτες / Τανυστές

Συμβολισμός $x'^{\boxed{\mu}} = \sum_{\boxed{\nu}=0}^{3} \Lambda^{\boxed{\mu}}_{\boxed{\nu}} X^{\boxed{\nu}}$

Σύμβαση: $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

$i, j, k = 1, 2, 3$

Σύμβαση Einstein : Όχι $\sum_{\nu=\dots}^{\dots}$, επαναλαμβανόμενοι δείκτες $\Rightarrow$ άθροιση

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{0} x^{0} + \Lambda^{\mu}{}_{1} x^{1} + \Lambda^{\mu}{}_{2} x^{2} + \Lambda^{\mu}{}_{3} x^{3}$$

όπου $x^{\nu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^i) = (t, x, y, z) = (t, \vec{x}) = (t, \vec{r})$

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{bmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \mu=0 \\ \leftarrow \mu=1 \\ \leftarrow \mu=2 \\ \leftarrow \mu=3 \end{matrix}$$

$\nu=0 \quad \nu=1 \quad \nu=2 \quad \nu=3$

μ : γραμμές, ν : στήλες

Γενικά : $$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \\ \vdots \\ Y_{j1} \end{bmatrix}$$

$i \times j \qquad j \times 1$

$$(AY)_{i1} = A^{i}{}_{\underbrace{(k)}_{\text{δείκτης}}} Y^{\underbrace{(k)}_{\text{δείκτης}}} = \sum_{k} A_{ik} Y_k$$

1.

σημειώσεις Αλεξανδρας Ν.
4η διάλεξη κ. Θεοφιλάτου
11.10.2023

#4 Βιβλία: Τσαμπαρλής, Rindler, Χριστοδουλάκης-Griffiths, Χριστοδουλίδης κλπ

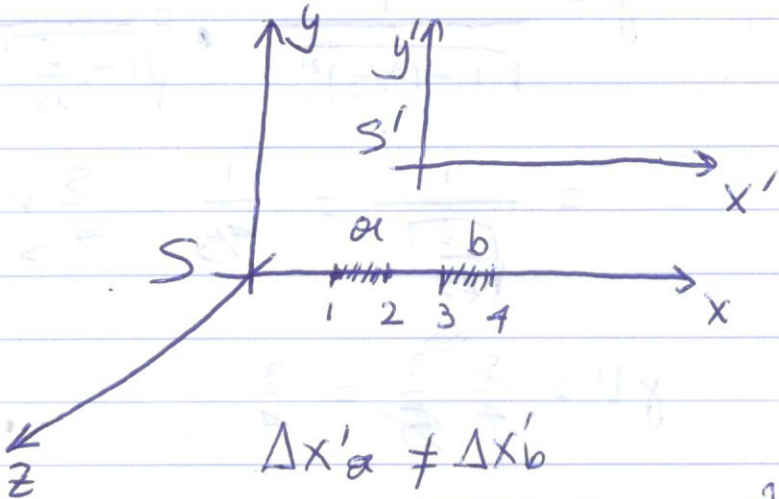
Μεταπτυχιακό επίπεδο → Landau, classical Theory of Fields

"Ενδιάμεσο" επίπεδο → Ho Bardi, Relativity common sense

- Πρόβλημα 1 : $t' = t$

$x' = ax^2 + bx + c$

$y' = y$, $z' = z$



$\Delta x_a = 2 - 1 = 1$

$\Delta x_b = 4 - 3 = 1$

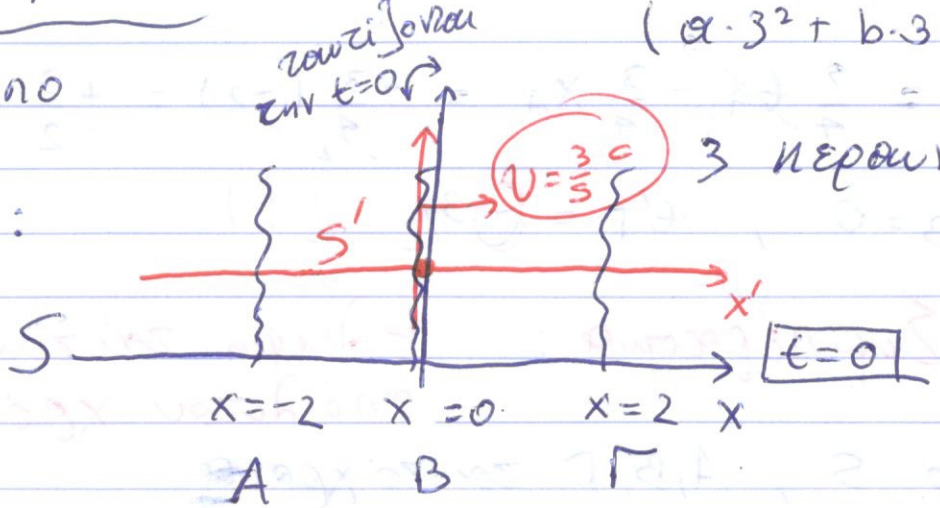
$\Delta x'_a = (a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c) - (a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c)$

$\Delta x'_b = (a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c) - (a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c)$

$\Delta x'_a \neq \Delta x'_b$

άτοπο

- πρόβλημα 2 :



(2.)

$t'_A = ?$
$t'_B = ?$
$t'_\Gamma = ?$

$x_A^\mu = (0, -2, 0, 0)$
$x_B^\mu = (0, 0, 0, 0)$
$x_\Gamma^\mu = (0, 2, 0, 0)$

$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x'^\mu_A = \Lambda^\mu{}_\nu x_A^\nu$$
$$x'^\mu_B = \Lambda^\mu{}_\nu x_B^\nu$$
$$x'^\mu_\Gamma = \Lambda^\mu{}_\nu x_\Gamma^\nu$$

Αυτό θα πάνω (βέβαια εδώ μπορώ να πάρω τις πιο απλές σχέσεις) ΓΕΝΙΚΑ

$$t' = \gamma(t - vx)$$
$$x' = \gamma(x - vt)$$

, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(3/5)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}}$

$= \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{25}}} = \frac{1}{4/5} = \frac{5}{4}$ ✓ > 1

$\gamma v = \frac{5}{4}\frac{3}{5} = \frac{3}{4}$

$t'_A = \frac{5}{4}t_A^{\,0} - \frac{3}{4}x_A = -\frac{3}{4}(-2) = +\frac{3}{2}$

$t'_B = 0$, $t'_\Gamma = -3/2$ (!)

* Συμπέρασμα: Έλειψη ταυτοχρονισμού και από άλλον χρόνου

Στο S, A, B, Γ ταυτόχρονα.

Στο S', όχι

3.

	t	x	t'	x'
A	0	-2	+3/2	-5/2
B	0	0	0	0
Γ	0	+2	-3/2	+5/2

* Βλέπω = παρατηρώ + t.o.f. (time of flight)

α γεγονός άφιξης του "περαστικού" Α στο Ο
β −"− −"− −"− Β στο Ο
γ −"− −"− −"− Γ στο Ο

$$t_\alpha = t_A + \frac{|x_A|}{c} = 2$$
(παρατηρεί)

$$t_B = t_B + 0 = 0$$

$$t_\gamma = t_\gamma + \frac{|x_\Gamma|}{c} = 2$$

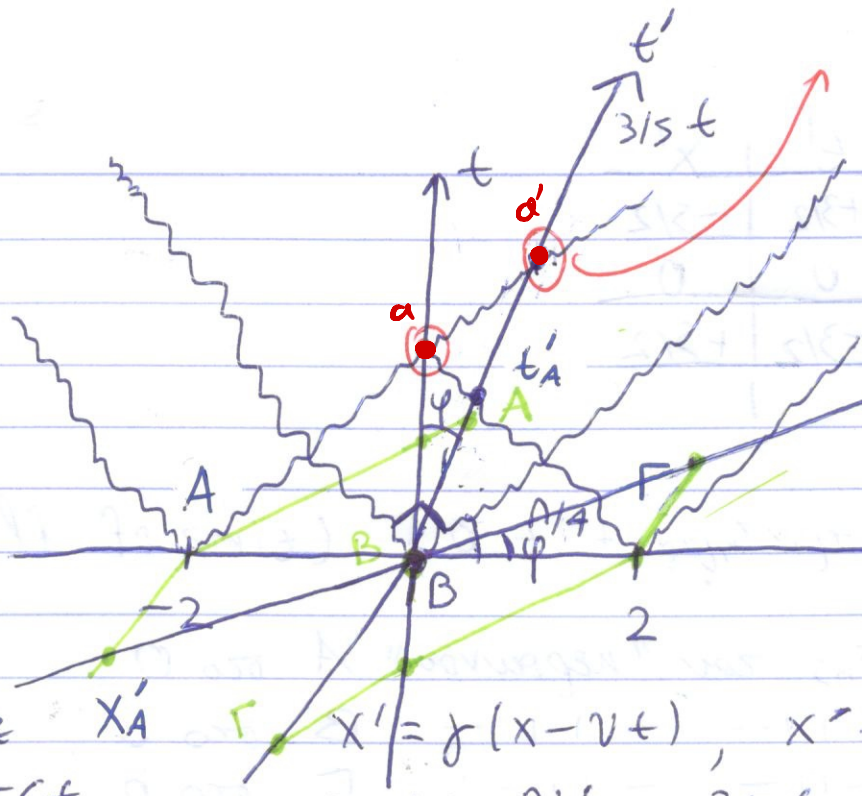
α' γεγονός άφιξης του "περαστικού" Α στο Ο'
β' −"− −"− −"− −"− Β στο Ο'
γ' −"− −"− −"− −"− Γ στο Ο'

$$t'_\alpha = t'_A + \frac{|x'_A|}{c} = 4$$

$$t'_\beta = t'_B + 0 = 0$$

$$t'_\gamma = t'_\Gamma + \frac{|x'_\Gamma|}{c} = 1$$

4.



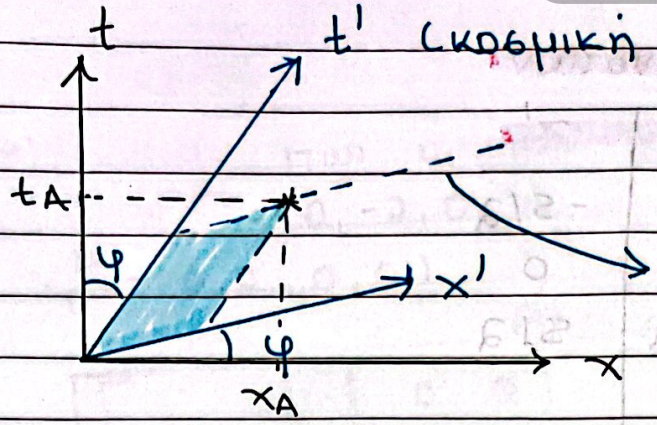
γεγονος α' αφιξη του "κερ." στο Ο'

$\Gamma: x' = \gamma(x - vt)$, $x' = 0$

$\rightarrow x = vt = 3/5\, t$, $\tan\varphi = \frac{3}{5} = \frac{v}{1} \leq 1$ ✓

✱ Κλιση 45°, $\tan\theta = 1$, σημαινει ταχυτητα φωτος $c = 1$

από σημειώσεις Μαρίας Γ.



t' (κοσμική γραμμή του O' στο S')

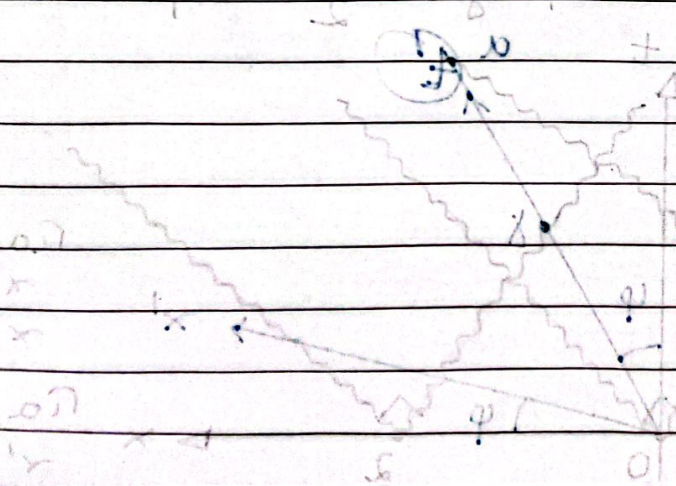
- σημεία ⊥ του x έχουν ίδιο t.
- σημεία ⊥ του x' έχουν ίδιο t'.

$t' = \gamma(t - vx)$

$t = vx$

$x = \frac{s}{3}t$

$\tan\phi = v$

διάγραμμα Minkowski

πλαγιόγωνιο συστήμα αναφοράς για το S'