Οι ασκήσεις είναι εν γένει χωρίς βαθμολογικό κίνητρο εκτός αν έχουν επισημανθεί ως ασκήσεις με (bonus) και συνοδεύονται από προθεσμία παράδοσης. Θα σχολιάζω τις λύσεις που λαμβάνω στην τάξη, δίχως να απαντώ σε όλα τα μηνύματα ξεχωριστά. Μπορείτε να μου στείλετε ερωτήσεις στο **compPhysicsEKPA@gmail.com** αλλά μην ξεχνάτε:

1. να "μεταφορτώνετε" τις λύσεις σας στο e-class (αν το πρόβλημα είναι παραδοτέο) με επισυναπτόμενο αρχείο τύπου *.ipynb .OR. *.c* .OR. *.txt .OR. *.pdf (με αυτή την σειρά προτίμησης).
2. να **συμπεριλαμβάνετε και τα αποτελέσματα** που λάβατε από το πρόγραμμά σας μαζί με **σχολιασμό** αυτών.

Στην περίπτωση των **ασκήσεων με (bonus)** αυτό ισχύει για εργασίες που έχουν αναρτηθεί εντός προθεσμίας στο e-class, δεν θα προσμετρούνται όσες σταλθούν απλά με email.

Μπορείτε να βρείτε, διαφάνειες, σημειώσεις, προβλήματα και εξωτερικό υλικό από τα μαθήματά μου εδώ.

Πρόβλημα 1 (παραδοτέο έως 08.10.2025 – χωρίς bonus)

Λαμβάνοντας υπόψη το δείγμα δεδομένων από διαδοχικές ρίψεις ενός ζαριού με πέντε όψεις υπολογίσετε:

α) τον αριθμητικό μέσο όρο του δείγματος $\hat{\mu} = N^{-1} \sum x_i$,

β) την προκατειλημμένη τετραγωνική διασπορά του δείγματος $\hat{\sigma^2} = (N)^{-1} \sum (x_i - \hat{\mu})^2$,

γ) τον σταθμισμένο μέσο όρο του δείγματος

$$\hat{\mu}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \, x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}, \quad \text{όπου } w_i = \begin{cases} 2, & \text{αν } x_i \text{ είναι ζυγός αριθμός,} \\ 1, & \text{αν } x_i \text{ είναι μονός αριθμός.} \end{cases}$$

και μελετήσετε τις **συχνότητες εμφάνισης** των δεδομένων που θα βρείτε εδώ. Σχολιάστε τα αποτελέσματα συγκρίνοντάς τα με τις αναμενόμενες θεωρητικές τιμές για το πεντάπλευρο ζάρι.

Υπόδειξη: Για την εισαγωγή των δεδομένων στο πρόγραμμά σας, μπορείτε είτε να κάνετε copy & paste τις τιμές απευθείας σε αυτό, είτε εάν χρησιμοποιείτε Python να χρησιμοποιήσετε την ρουτίνα της numpy

Συζήτηση του προβλήματος 1 στο τέλος της 4ης διάλεξης 14.10.2025 https://youtu.be/Zwx3f4BGS0M
.

Πρόβλημα 2 (μη παραδοτέο)

a) Δημιουργήστε μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών βασισμένη στον γραμμικό μετασχηματισμό ισοδυναμίας υπολοίπου $x_{n+1} = (2147483629 x_n + 2147483587) \mathrm{mod} (2^{31} - 1)$ που να παράγει τυχαίους αριθμούς με ομοιόμορφη πυκνότητα πιθανότητας στο $[0, 1)$

b) Μελετήστε το διάγραμμα συχνοτήτων (ιστόγραμμα) της γεννήτριάς σας.

Πρόβλημα 3 (μη παραδοτέο)

a) Εξομοιώστε ένα ζάρι.

b) Εξομοιώστε ένα ζάρι που έχει 30% πιθανότητα να φέρει 6 και τα υπόλοιπα ενδεχόμενα ισοπίθανα.

Υποδείξεις: Χρησιμοποιήστε την γεννήτρια τυχαίων αριθμών με ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1)$ *που σας δίνεται από τον υπολογιστή σας και "τεμαχίστε" κατάλληλα το διάστημα [0,1) σε 6 "τεμάχια", ελέγχοντας σε ποιο από αυτά ανήκει ο αριθμός που παράχθηκε. (**Λύση** του προβλήματος εδώ και εδώ.)*

Πρόβλημα 4 (μη παραδοτέο)

Χρησιμοποιώντας γεννήτρια τυχαίων αριθμών με ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1)$ που σας δίνεται από τον υπολογιστή σας, γράψτε υπολογιστικό αλγόριθμο που να παράγει τυχαίους αριθμούς $X \sim 1/x$ στο διάστημα $0.5 < x < 10.5$ χρησιμοποιώντας την μέθοδο:

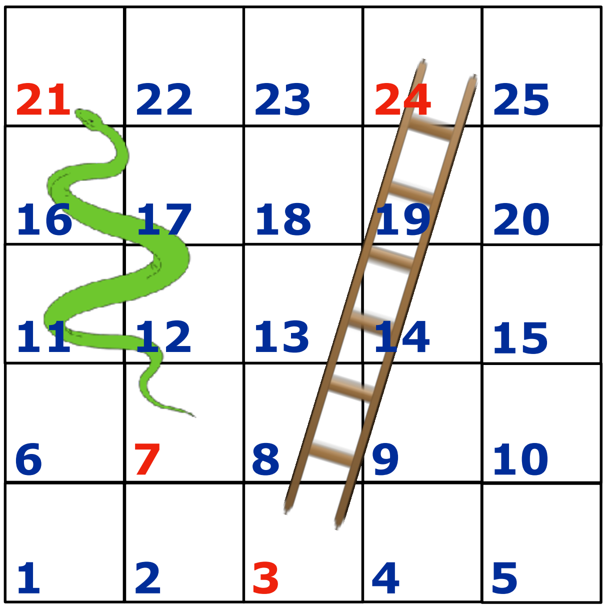
α) αντίστροφου μετασχηματισμού.

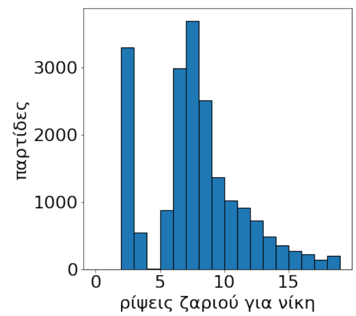
β) δειγματοληψίας απόρριψης (hit-or-miss).

Συγκρίνετε την απόδοση των δύο μεθόδων υπολογίζοντας πόσες επαναλήψεις χρειαστήκατε σε κάθε περίπτωση. (**Λύση** του προβλήματος εδώ και εδώ.)

Πρόβλημα 5 (μη παραδοτέο)

Βρείτε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X που χαρακτηρίζει τον αριθμό ρίψεων ενός ζαριού, προκειμένου να κερδίσει (φτάσει στο τετράγωνο 25) κάποιος στο παρακάτω "φιδάκι".





1. Υπολογίστε τον μέσο όρο και την τυπική απόκλιση του δείγματος των τιμών x που έλαβε η μεταβλητή X στα παιχνίδια που παίξατε.

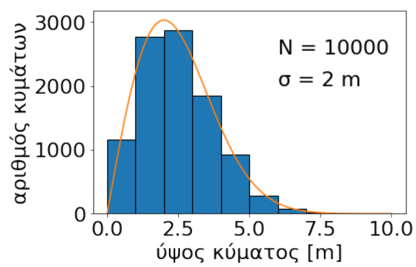
2. Προσθέστε ή αφαιρέστε σκάλες και φίδια και αυξομειώστε το μέγεθος του παιχνιδιού παρατηρώντας την μετάβαση σε μία "κανονικότητα" $X \sim e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}$ όταν το "παρακάνετε". Γιατί συμβαίνει αυτό?

3. Σε ένα παιχνίδι μεταξύ δύο ατόμων, ποια η πιθανότητα να κερδίσει αυτός που ξεκινά δεύτερος? (*Στείλτε μου αν θέλετε την πιθανότητα που υπολογίσατε.*)

4. Στο πρώτο ερώτημα η απάντηση είναι $\bar{x} \approx 7.4$ και $\hat{\sigma} \approx 4.1$, θα ήταν σωστό να πούμε ότι χρειαζόμαστε κατά μέσο όρο $x = 7.4 \pm 4.1$ ζαριές για να κερδίσουμε ένα παιχνίδι?

Πρόβλημα 6 (μη παραδοτέο)

Το ύψος των κυμάτων ανοιχτής θαλάσσης (ανά μονάδα χρόνου και επιφάνειας) ακολουθεί (σε καλή προσέγγιση) την κατανομή πυκνότητας πιθανότητας Rayleigh $f(x) = (x/\sigma^2)e^{-x^2/2\sigma^2}$ για $x \in [0, \infty)$ και $f(x) = 0$ για $x < 0$, όπου σ μια αριθμητική παράμετρος σχετιζόμενη με την διακύμανση της στάθμης της θάλασσας και x το ύψος του κύματος.



Για της ανάγκες εξομοίωσης του ύψους των κυμάτων σε μία μελέτη των συνθηκών πλεύσης ενός καραβιού, η πλοιοκτήτρια σας ανέθεσε να παράγετε τυχαία κύματα που έχουν κατάλληλες προδιαγραφές ρεαλισμού. Συντάξτε υπολογιστικό αλγόριθμο που να παράγει ($N = 10000$) τυχαίους αριθμούς που να ακολουθούν την κατανομή Rayleigh ($X \sim (x/\sigma^2)e^{-x^2/2\sigma^2}$), με $\sigma = 2$ m, χρησιμοποιώντας την μέθοδο:

α) αντίστροφου μετασχηματισμού.

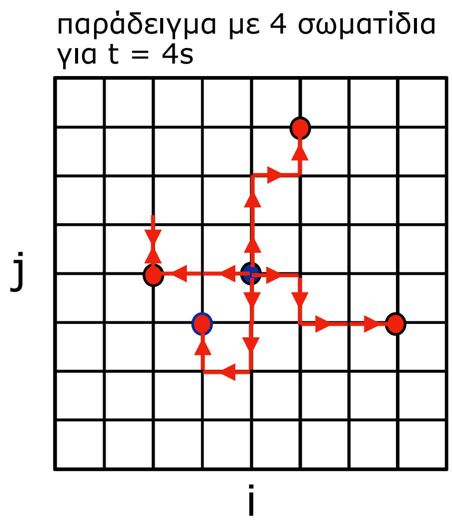
β) δειγματοληψίας απόρριψης (hit-or-miss) στο διάστημα $x \in [0, 10]$ m.

Συγκρίνετε την απόδοση των δύο μεθόδων υπολογίζοντας πόσους τυχαίους αριθμούς ομοιόμορφης κατανομής στο $[0, 1)$ χρειαστήκατε σε κάθε περίπτωση. Έπειτα, υπολογίστε το ποσοστό των παραχθέντων κυμάτων που έχουν ύψος $3 < x < 5$ [m].

– GitHub –

Πρόβλημα 7 (μη παραδοτέο)

Χίλια σωματίδια Brown διαχέονται σε ένα δισδιάστατο επίπεδο, έχοντας ως σημείο εκκίνησης την αρχή των αξόνων. Τα σωματίδια εκτελούν τυχαίο βηματισμό σε ένα δισδιάστατο τετραγωνικό πλέγμα ακμής ενός εκατοστού με ταχύτητα 1 cm/s.



Βρείτε πόσο μακριά θα βρίσκεται κατά μέσο όρο το κάθε σωματίδιο μετά από $t = 100$ βήματα του ενός δευτερολέπτου, υπολογίζοντας το

$$\bar{d} = \frac{1}{1000}\sum_{\mathrm{w}=1}^{1000}\sqrt{x_{\mathrm{w}}^2 + y_{\mathrm{w}}^2}$$

όπου $(x_{\mathrm{w}}, y_{\mathrm{w}})$ η θέση του κάθε σωματιδίου $w = 1, 2, 3...1000$ για $t = 100s$. Στην συνέχεια βρείτε τον μέσο όρο του τετραγώνου της απόστασης του καθενός σωματιδίου (για $t = 100s$)

$$\bar{d^2} = \frac{1}{1000}\sum_{\mathrm{w}=1}^{1000} x_{\mathrm{w}}^2 + y_{\mathrm{w}}^2$$

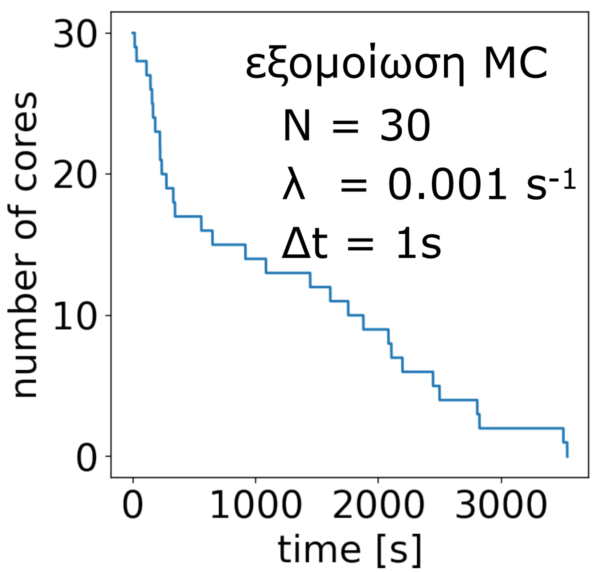
και συγκρίνετε τις απαντήσεις σας με το μονοδιάστατο πρόβλημα.

Υποδείξεις: Για τις ανάγκες του πειράματος θα χρειαστείτε να φτιάξετε ένα ζάρι τεσσάρων όψεων (πάνω - κάτω - δεξιά - αριστερά) το οποίο θα χρησιμοποιείτε για να αποφασίζετε προς ποια κατεύθυνση θα κινηθεί κάθε σωματίδιο σε κάθε "γύρο".

Πρόβλημα 8 (μη παραδοτέο)

Να γραφεί πρόγραμμα που θα εξομοιώνει την ραδιενεργό διάσπαση $N = 1000$ πυρήνων συναρτήσει του χρόνου, σε διακριτά χρονικά βήματα $\Delta t = 1s$. Θεωρήστε ότι κάθε αδιάσπαστος πυρήνας έχει σταθερή πιθανότητα διάσπασης $p = \lambda \Delta t = 10^{-3}$ στο χρονικό διάστημα $\Delta t = 1s$. Το πρόγραμμα θα πρέπει να επιστρέφει στην "έξοδό" του το πλήθος των αδιάσπαστων πυρήνων ύστερα από συνολικό χρόνο εξομοίωσης ίσο με $1000s$.

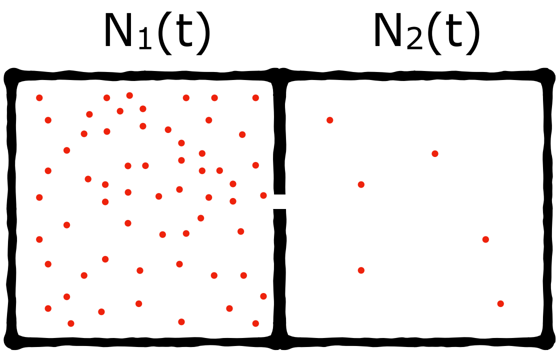
Υποδείξεις: Ανά μονάδα χρόνου, κάθε πυρήνας περνάει από δοκιμή Bernoulli (ανεξαρτησία διασπάσεων, άνευ μνήμης). Για τις ανάγκες του πειράματος θα χρειαστεί να φτιάξετε ένα κέρμα δύο όψεων με πιθανότητα $p = \lambda \Delta t = 10^{-3}$ να φέρει κορώνα, το όποιο θα χρησιμοποιείτε για να αποφασίζετε αν κάποιος πυρήνας θα υποστεί διάσπαση ρίχνοντας το κέρμα $N(t)$ φορές, όπου $N(t)$ ο πληθυσμός των εναπομεινάντων πυρήνων την χρονική στιγμή t.



Δείτε την λύση του προβλήματος στο YouTube

Πρόβλημα 9 (μη παραδοτέο)

Θεωρείστε ότι έχουμε ένα αέριο σε δύο συγκοινωνούντα δοχεία, με $N_1(t)$ και $N_2(t)$ το πλήθος των ατόμων που βρίσκεται σε κάθε δοχείο.



Να βρεθεί η χρονική εξέλιξη των δύο πληθυσμών $N_1(t)$ και $N_2(t)$ αν:

$$N_1(0) = 100$$
$$N_2(0) = 0$$

και $p = \lambda\Delta t = 1\%$ πιθανότητα για κάθε μόριο του αερίου να διασχίσει την τρύπα και να περάσει από το ένα δοχείο στο άλλο στο χρονικό διάστημα $[t, t + \Delta t]$.

Πρόβλημα 10 (μη παραδοτέο)

Η τυχαία μεταβλητή

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

προκύπτει υπολογίζοντας τον μέσο όρο N ανεξάρτητων μετρήσεων της τυχαίας μεταβλητής X.

A) Κάνοντας χρήση γεννήτριας τυχαίων αριθμών $X \sim Unif(0,1)$ φτιάξτε δείγματα δεδομένων των $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ και $\bar{X}_{20}$

$$\begin{aligned} S_1 &= [\bar{X}_{1,j}] \\ S_2 &= [\bar{X}_{2,j}] \\ S_{20} &= [\bar{X}_{20,j}] \end{aligned}$$

και *εκτιμήστε* τον μέσο όρο και την τυπική τους απόκλιση.

B) Ποια είναι η *αναμενόμενη* τυπική απόκλιση του $\bar{X}_N$ όταν το $N \gg 20$? Τι διαφορετικό περιμένουμε σε περίπτωση που η X δεν έχει ομοιόμορφη κατανομή (π.χ. $X \sim x^2$)? Γιατί είναι ωφέλιμο να υπολογίζουμε τον μέσο όρο πολλών ανεξάρτητων πειραματικών μετρήσεων της ίδιας ποσότητας?

Υπόδειξη: συμβουλευτείτε τις σημειώσεις σας για το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα από το μάθημα της Θεωρίας Πιθανοτήτων (10ΥΚΟ13).

Πρόβλημα 11 (μη παραδοτέο)

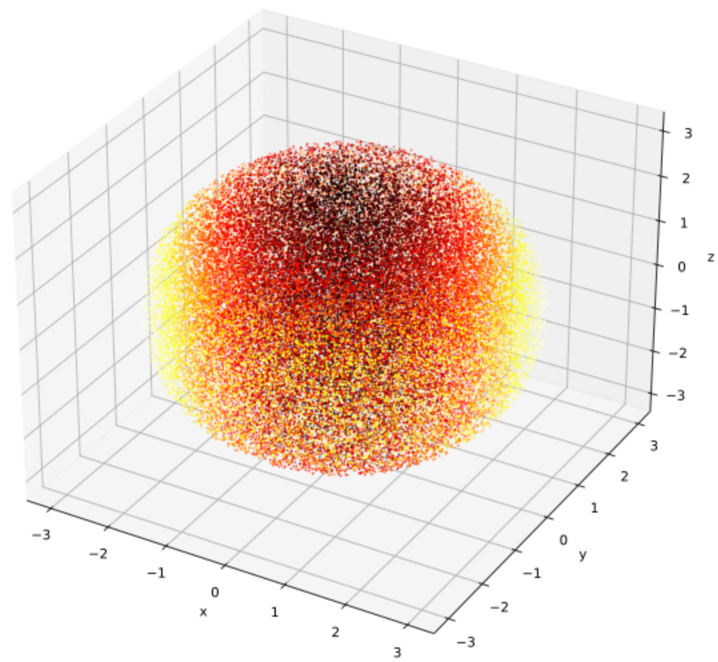
Υπολογίστε το

$$I = \int_{0.5}^{10.5} \frac{1}{x} dx$$

με την μέθοδο απλοϊκού Monte–Carlo καθώς και την αβεβαιότητα της εκτίμησης που κάνατε. Ποιο είναι το αναμενόμενο (θεωρητικά) σχετικό σφάλμα αν έχετε στην διάθεσή σας $N = 10^{10}$ δείγματα τυχαίων αριθμών ομοιόμορφης κατανομής? (**Λύση** του προβλήματος εδώ και εδώ.)

Πρόβλημα 12 (μη παραδοτέο)

Υπολογίστε την μάζα σφαίρας ακτίνας $R = 3$ και πυκνότητας $\rho(x, y, z) = \frac{5}{648\pi}(x^2 + y^2)$ με κέντρο την αρχή των αξόνων με την μέθοδο Monte–Carlo.



Δείτε την λύση του προβλήματος στο YouTube καθώς και τον κώδικα που χρησιμοποίησα για να φτιάξω την παραπάνω εικόνα στο GitHub.

Πρόβλημα 13 (μη παραδοτέο)

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{10} e^x dx$ (και η αβεβαιότητά του) με την μέθοδο της απλοϊκής (crude) Monte–Carlo ολοκλήρωσης, χρησιμοποιώντας $N = 1000$ τυχαίους αριθμούς. Να δομήσετε το πρόγραμμά σας έχοντας ως αφετηρία γεννήτρια τυχαίων αριθμών ομοιόμορφης κατανομής στο $[0, 1]$.

α) Να υπολογιστεί το *σχετικό σφάλμα* $\delta\hat{I}/\hat{I}$ της MC ολοκλήρωσης

β) Να υπολογιστεί (αναλυτικά) το θεωρητικώς αναμενόμενο *σχετικό σφάλμα* $\delta I/I$ της μεθόδου, για το ίδιο πλήθος τυχαίων δειγμάτων ($N = 1000$).

γ) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση $\sqrt{s^2}$ ενός δείγματος[1] αποτελούμενο από 4×10^4 MC ολοκληρώσεις (με N = 1000 η κάθε μία) και να την συγκρίνετε με το δI και το $\delta\hat{I}$ που υπολογίσατε στα ερωτήματα (α) και (β). Να φτιάξετε ένα ιστόγραμμα που να δείχνει την κατανομή των $\hat{I}$ και να σχολιάσετε την μορφή της.

δ) Εάν χωρίσουμε το διάστημα ολοκλήρωσης στα δύο, έτσι ώστε

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^5 e^x dx + \int_5^{10} e^x dx$$

και "επενδύσουμε" στις επιμέρους δύο ολοκληρώσεις τους διαθέσιμους τυχαίους αριθμούς χωρισμένους σε δύο ίσα δείγματα $N = N_1 + N_2 = 500 + 500$, περιμένουμε το σχετικό σφάλμα της απλοϊκής MC ολοκλήρωσης να μεγαλώσει, να μικρύνει ή να μείνει το ίδιο? Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας επαναλαμβάνοντας το ερώτημα (β) για τα επιμέρους ολοκληρώματα I_1, I_2 και υπολογίζοντας την συνολική αβεβαιότητα του αθροίσματός τους.

ε) Να επαναλάβετε τα ερωτήματα (α), (β) και (γ) για την ολοκλήρωση με την μέθοδο απόρριψης MC (hit-or-miss) θεωρώντας $N = 1000$ ζευγάρια τυχαίων αριθμών (x, y) που έχουν παραχθεί ομοιόμορφα στο $[0, 1] \times [0, 1]$.

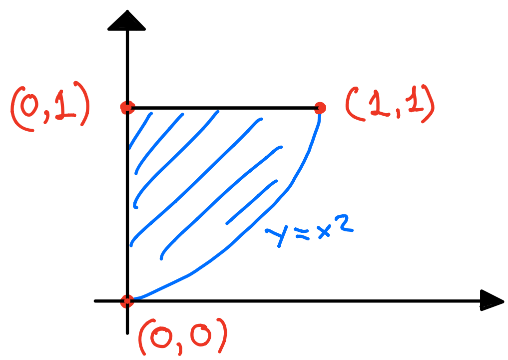
(**Λύση** του προβλήματος εδώ και εδώ.)

[1] Το s^2 ορίστηκε στο πρόβλημα 1 ως η τετραγωνική διασπορά ενός δείγματος παρατηρήσεων (μετρήσεων).

Πρόβλημα 14 (μη παραδοτέο)

Να υπολογιστεί με την απλοϊκή (crude) Monte-Carlo ολοκλήρωση, η μάζα των παρακάτω αντικειμένων και η αβεβαιότητά τους, για $N = 1000$ γεγονότα.

a) Δισδιάστατη πλάκα που οριοθετείται στην περιοχή $\{x \geq 0, y \leq 1, y \geq x^2\}$ (διαστάσεις μήκους σε μέτρα) με πυκνότητα $\rho(x, y) = \frac{20}{13}(x + y)\,[\mathrm{kg/m^3}]$.



b) Κύβος πυκνότητας $\rho(x, y) = \frac{12}{31}(x^2 + yz)\,[\mathrm{kg/m^3}]$ που οριοθετείται στην περιοχή $\{0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2, 1 \leq z \leq 2\}$ με διαστάσεις μήκους μετρημένες σε μέτρα.

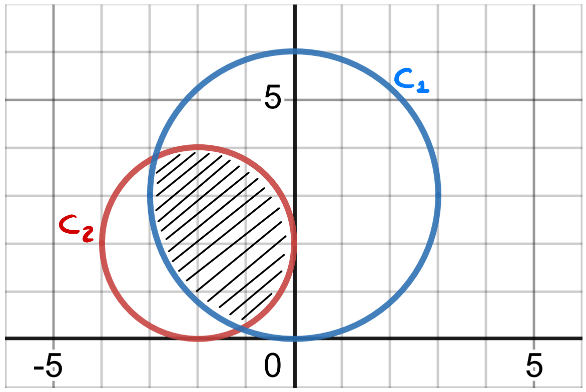
Δίνεται, προς σύγκριση, ο ακριβής υπολογισμός της μάζας των δυο σωμάτων είναι $M = 1\,\mathrm{kg}$.

Η άσκηση αυτή είναι λυμένη στο web.

`https://github.com/theofil/CompPhysics/tree/master/problems/2019_2020`

Η διδακτική της αξία ωστόσο παραμένει, υπό την προϋπόθεση ότι κάποιος θα προσπαθήσει να την λύσει δίχως να συμβουλευτεί (εξ αρχής) τις δοσμένες λύσεις.

Πρόβλημα 15 (μη παραδοτέο)



Θεωρήστε την γραμμοσκιασμένη επιφάνεια που σχηματίζεται λόγω επικάλυψης μεταξύ δύο κύκλων C_1 και C_2 με εξισώσεις:

$$x^2 + (y-3)^2 = 3^2 \; [C_1]$$
$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 2^2 \; [C_2]$$

α) Υπολογίστε αριθμητικά το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας (I) καθώς και την αβεβαιότητα αυτού (δI), χρησιμοποιώντας $N = 2 \times 10^4$ τυχαίους αριθμούς με ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1).

β) Πόσο μεγάλο αναμένουμε να είναι το δI, αν έχουμε στην διάθεσή μας $N = 2 \times 10^{18}$ τυχαίους αριθμούς με ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1)?

Δίνεται ο ακριβής υπολογισμός του ολοκληρώματος, $I = 8.378598258$.

Η λύση του προβλήματος βρίσκεται στο github.

Μια από τις λύσεις που μου έστειλαν για το πρόβλημα 15, η οποία είναι *τελείως λάθος*, είναι η παρακάτω:

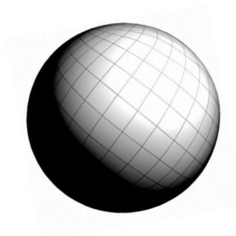
```
import numpy as np
import math
import random

def U(): return np.random.uniform()

N=2*10**4
hit = 0

def f(x,y): return x**2 + (y-3)**2
def g(x,y): return (x+2)**2 + (y-2)**2


for i in range(N):
    x1 = U()*6 - 3 #3 = RC1, region of interest (-3,3)
    y1 = U()*6 # 6 = C1-max point, region of interest(0,6)
    x2 = U()*4 - 4 #4 = RC2, region of interest (-4,0)
    y2 = U()*4 # 4 = C2-max point, region of interest(0,4)

    if f(x1,y1)<= 9 and g(x2,y2)<=4:
        hit += 1

#probability of "hitting" in the area of interest
p = hit/N

#Estimated overlapping area

#we find the points where the two circles intersect.
#A_segment = (1/2)*r^2*(theta-Sintheta) solved geometrically

V = 13.994985
I = p * V

#Error estimates
dI = V*(p - p**2)**0.5/N**0.5
print('%2.5f ± %2.5f'%(I,dI))
```

Υπολογίστε την θεωρητικώς αναμενόμενη τιμή του παραπάνω αλγόριθμου και δείξτε ότι δεν υπολογίζει το ζητούμενο. Στείλτε μου αν θέλετε την αναμενόμενη τιμή του I που υπολογίσατε στο compPhysicsEKPA@gmail.com.

Πρόβλημα 16 – D-σφαίρα (*)

Η άσκηση αυτή είναι προϊόν συζήτησης που είχα με τον Καθ. κ. Ι. Παπαδημητρίου.

Βρείτε τον όγκο μίας στερεάς σφαίρας (μπάλας)[2] μοναδιαίας ακτίνας ($R = 1$) στις $D-$ διαστάσεις.



Φτιάξτε ένα διάγραμμα που να έχει στον οριζόντιο άξονα τον αριθμό των διαστάσεων και στον κατακόρυφο τον όγκο που υπολογίσατε και την αβεβαιότητα αυτού απεικονισμένο με την χρήση errorbars. Βρείτε το μέγιστο της κατανομής στο διάστημα $1 \leq D \leq 16$.

Στείλτε μου το διάγραμμα που φτιάξατε στο compPhysicsEKPA@gmail.com.

[2] Ο όγκος μιας στερεάς σφαίρας στις $n = 3$ διαστάσεις είναι $\frac{4}{3}\pi R^3$, στις $n = 2$ γίνεται πR^2 και για $n = 1$ είναι απλά $2R$.

Πρόβλημα 17 (μη παραδοτέο)

Δίνεται η εξίσωση,

$$\tan x = \frac{x}{1-x^2}. \tag{1}$$

a) Να λυθεί η εξ.(1) στο διάστημα $x \in [2, 4]$ χρησιμοποιώντας:

1) την μέθοδο της διχοτόμησης με 15 επαναλήψεις. *Θεωρήστε σαν τελική εκτίμηση της ρίζας* (ρ) *το μέσο του διαστήματος διχοτόμησης στην 15ή επανάληψη, δηλ.* $\hat{\rho} = 0.5(b_{14} + a_{14}) \approx \rho$, *με* $a_0 = 2$ *και* $b_0 = 4$.

2) την επαναληπτική σχέση[3]

$$x_{\rm n+1} = x_{\rm n} - f(x_{\rm n})/f'(x_{\rm n})$$

με

$$f(x) = \tan x - \frac{x}{1-x^2}$$

χρησιμοποιώντας $x_0 = 3.0$ και θεωρώντας σαν εκτιμητή της ρίζας το $x_6 = \hat{\rho} \approx \rho$.

Να εκτυπωθούν οι τιμές $\hat{\rho}$ και $f(\hat{\rho})$ για τις δυο περιπτώσεις. Ποια μέθοδος έδωσε $f(\hat{\rho})$ που να είναι περισσότερο συμβατό με το 0 ?

β) Να διερευνηθεί η ύπαρξη ριζών στο διάστημα $x \in [4, 10]$.
– *θέμα ελεύθερης ανάπτυξης* ;-)

Υπόδειγμα κώδικα:

```
/*   C/C++   */
#include "math.h"
double f(double x){return tan(x) - x/(1 - x*x);}
double df(double x){/* implement f'(x) */}
int main()
{
  double a = 2;
  double b = 4;
  double n = 0;
  double x = 3;
  while( n < 15 )
  {
    // ... implement  bisection logic
    double c = 0.5*(a + b);
```

[3] Η σχέση αυτή είναι διάσημη με το όνομα Newton-Raphson.

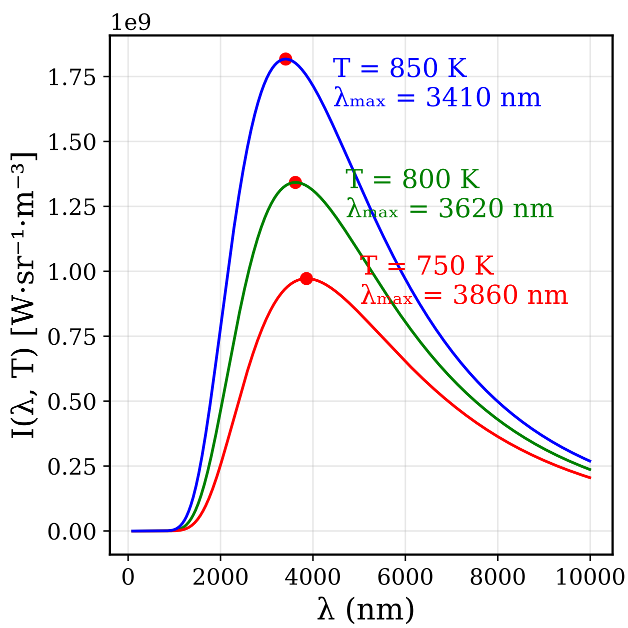
```
        // ... implement newton-raphson
        if ( n < 6 )
        {
           // x = x - f(x)/f'(x)
           // if (n == 5) ektypwsi twn x, f(x)
        }
        n = n + 1;
      }
    }

### /*   Python   */ ###
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt # for exploratory graphics ;-)
def f(x): return np.tan(x) - x/(1-x**2)
def df(x): return 0. # implement here the derivative

# first: plot f(x) to get an idea how it varies
x = np.linspace(-10,10,100)  # an array with 100 steps for x [-10, 10]
y = f(x)
ax, fig = plt.subplots(figsize=(10,10))
plt.plot(x, y)               # plots f(x)
plt.plot(x, [0. for i in x]) # plots y = 0, i.e., x-axis
plt.show()

# logic for bisection/newton similar as for the C/C++ example
```

Πρόβλημα 18 (με bonus αν παραδοθεί ως 18.11.2025)

Ο νόμος ακτινοβολίας του Planck μας λέει ότι η ένταση της ακτινοβολίας ανά μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα μήκους κύματος λ από ένα μέλαν σώμα[4] σε θερμοκρασία T δίνεται από τη σχέση:

$$I(\lambda) = \frac{2hc^2\lambda^{-5}}{e^{hc/(\lambda k_B T)} - 1},$$

όπου $h = 6.62607015 \times 10^{-34}$ J $\cdot$ s είναι η σταθερά του Planck, $c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s η ταχύτητα του φωτός, και $k_B = 1.380649 \times 10^{-23}$ J/K η σταθερά του Boltzmann.



Μπορείτε να βρείτε τον κώδικα που χρησιμοποίησα για να φτιάξω την παραπάνω εικόνα στο GitHub.

(α) Θεωρητικό μέρος

Να δείξετε, με παραγώγηση της παραπάνω εξίσωσης ως προς λ, ότι το μήκος κύματος στο οποίο η εκπεμπόμενη ακτινοβολία είναι μέγιστη ικανοποιεί την εξίσωση:

[4] Το μέλαν σώμα είναι ένα ιδανικό φυσικό αντικείμενο που απορροφά όλη την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που προσπίπτει πάνω του, ανεξαρτήτως συχνότητας ή γωνίας πρόσπτωσης. Όταν θερμανθεί, εκπέμπει ακτινοβολία με φάσμα που εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία του και περιγράφεται από τον νόμο του Planck. Η εκπομπή αυτή ονομάζεται θερμική ακτινοβολία και αποτελεί θεμελιώδες παράδειγμα συστήματος σε θερμική ισορροπία.

$$5e^{-hc/(\lambda k_B T)} + \frac{hc}{\lambda k_B T} - 5 = 0.$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$, να δείξετε ότι το μήκος κύματος της μέγιστης ακτινοβολίας υπακούει στον **νόμο μετατόπισης του Wien**:

$$\lambda = \frac{b}{T},$$

όπου η λεγόμενη **σταθερά μετατόπισης του Wien** είναι $b = \frac{hc}{k_B x}$, και η ποσότητα x είναι η λύση της εξίσωσης:

$$5e^{-x} + x - 5 = 0.$$

(β) Αριθμητική επίλυση

Να γράψετε ένα πρόγραμμα που να επιλύει την παραπάνω εξίσωση με ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-6}$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο σταθερού σημείου, και να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της σταθεράς μετατόπισης b.

(γ) Εφαρμογή στη θερμοκρασία του Ήλιου

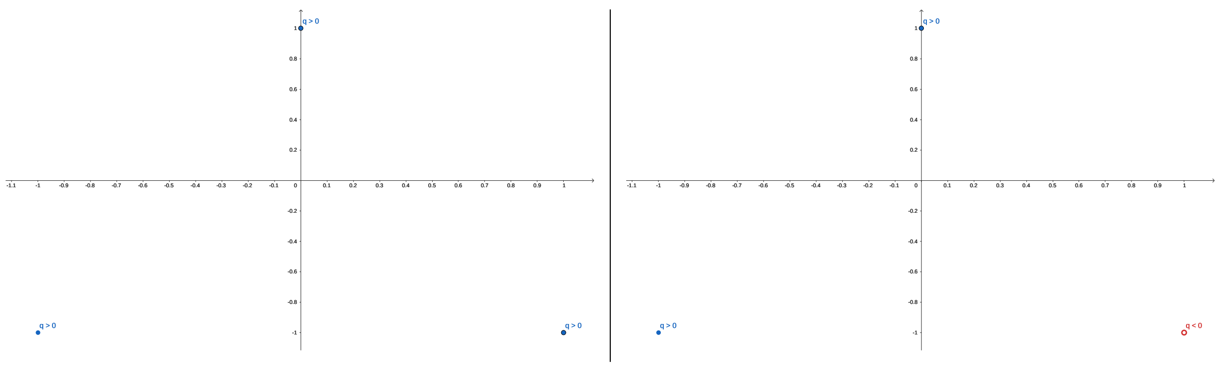
Ο νόμος μετατόπισης του Wien αποτελεί τη βάση για τη μέθοδο της **οπτικής πυρομετρίας**, η οποία χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της θερμοκρασίας σωμάτων μέσω της παρατήρησης του χρώματος της θερμικής ακτινοβολίας που εκπέμπουν.

Αν το μέγιστο της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας του Ήλιου παρατηρείται στο μήκος κύματος $\lambda = 502\,\mathrm{nm}$, να υπολογίσετε, με βάση τις παραπάνω σχέσεις και τη δική σας τιμή της σταθεράς μετατόπισης, τη **θερμοκρασία της επιφάνειας του Ήλιου**.

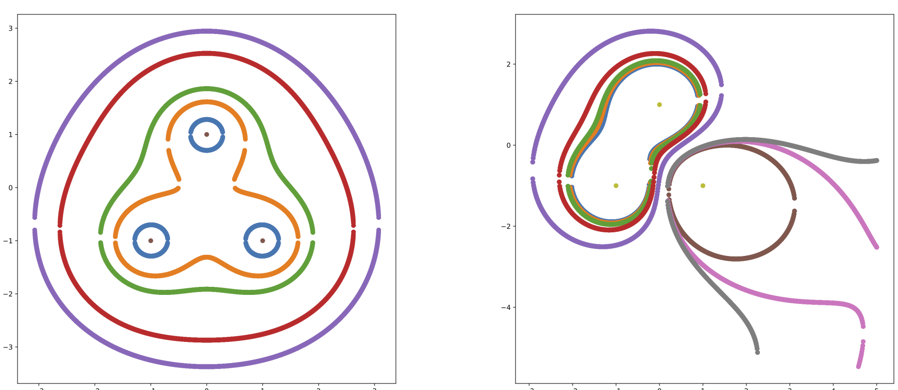
Η λύση του προβλήματος βρίσκεται στο github.

Πρόβλημα 19 – Εφαρμογή (μη παραδοτέο)

Βρείτε τις ισοδυναμικές καμπύλες στο επίπεδο $z = 0$, μιας (διαμορφώσιμης από τον χρήστη) διακριτής κατανομής ηλεκτρικού φορτίου. Το συνολικό δυναμικό στην θέση $\vec{r}$ είναι $V(\vec{r}) = \sum_{\mathrm{i}} kq_{\mathrm{i}}/|\vec{r} - \vec{r}_{\mathrm{i}}|$ όπου το i απαριθμεί τα φορτία πήγες που έχετε τοποθετήσει στις θέσεις $\vec{r}_{\mathrm{i}}$. Θεωρείστε για απλότητα ότι τα φορτία πηγές κείτονται στο επίπεδο xy ($z = 0$) και έχουν $|q_{\mathrm{i}}| = 1$, $k = 1$. Λύστε τις μη-γραμμικές εξισώσεις $V(x, y) = V_{\mathrm{ref}}$ στο επίπεδο xy ($z = 0$), χρησιμοποιώντας την μέθοδο της διχοτόμησης (Bisection) δίνοντας μόνοι σας κάποιες τιμές για στο δυναμικό αναφοράς V_{ref}[5] και υπολογίζοντας για ποια y το δυναμικό ισούται με V_{ref} για $x = [-5.0, -4.9, ...4.9, 5.0]$. Ως παράδειγμα, θεωρείστε τις δύο παρακάτω κατανομές φορτίου που βρίσκονται στο επίπεδο xy ($z = 0$).



Μια πιθανή υλοποίηση του παραπάνω προγράμματος (με αντικειμενοστραφή σύνταξη) βρίσκεται στο GitHub και δίνεται ως παράδειγμα εφαρμογής στην φυσική, αλγορίθμων που λύνουν γρήγορα και αυτοματοποιημένα μη-γραμμικές εξισώσεις. Φτιάξτε τις δικές σας υλοποιήσεις/γραφικά με όποιον τρόπο θέλετε.



[5] π.χ. $V_{\mathrm{ref}} = V(0.25, 0), V(0, 0.25)...V(1.5, 0), V(2.5, 0), V(3.0, 0)$.

Πρόβλημα 20 (μη παραδοτέο)

Έστω η αναδρομική σχέση σταθέρου σημείου $x_{\mathrm{n}+1} = 5 + \sqrt{x_{\mathrm{n}}}$, με $x_0 = 4$. Βρείτε αναλυτικά το σταθερό σημείο ρ για $n \to \infty$, λύνοντας την εξίσωση $\rho = 5 + \sqrt{\rho}$. Γράψτε υπολογιστικό αλγόριθμο που να υπολογίζει τα x_{n} και βρείτε πόσες επαναλήψεις χρειάζονται για να γίνει το $|x_{\mathrm{n}+1} - x_{\mathrm{n}}| < 10^{-6}$.

Η άσκηση αυτή είναι υποσύνολο λυμένης άσκησης στο GitHub και στις σημειώσεις του μαθήματος (2022) υπάρχει αναλυτική εκτίμηση του σφάλματος $|x_{\mathrm{n}} - \rho|$.

Πρόβλημα 21 (μη παραδοτέο)

Απαντήσεις στην επομένη σελίδα.

a) Να υπολογιστούν οι τρεις πρώτες επαναλήψεις των μεθόδων Gauss-Seidel και Jacobi για το σύστημα $AX = b$, με

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

έχοντας σαν αρχική εκτίμηση το $X^{\mathrm{T}} = [0, 0, 0]^{\mathrm{T}}$. Να διερευνηθεί η συμπεριφορά των Gauss-Seidel και Jacobi για το ίδιο πρόβλημα και $n = 200$ επαναλήψεις.

b) Να λυθεί το σύστημα[6] $AX = b$, με

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

και

$$b = [4, -1, -5, -2, \quad 2, \quad 2, -1, \quad 1, \quad 6]^{\mathrm{T}}$$

Να επαληθευθεί η ορθότητα των λύσεων υπολογίζοντας τη συμβατότητα του $AX - b$ με το μηδενικό διάνυσμα (πίνακα-στήλη) για τα ερωτήματα a) και β).

[6] Πίνακες της μορφής A προκύπτουν κατά την διακριτοποίηση της εξίσωσης Poisson σε τετραγωνικό πλέγμα στις δυο διαστάσεις, βλέπε σημειώσεις μαθήματος – παράδειγμα με $\nabla^2\phi(x, y) = -\rho(x, y)/\epsilon$.

Απαντήσεις:

a) Για $n = 3$ παίρνουμε

$$X = [1.347, -1.116, \quad 0.884]^{\mathrm{T}}$$

για την Gauss-Seidel και

$$X = [2.917, -1.389, \quad 0.167]^{\mathrm{T}}$$

για την Jacobi. Για $n = 200$ παίρνουμε

$$X = [1, -1, \quad 1]^{\mathrm{T}}$$

για την Gauss-Seidel και

$$X = [\sim 10^{37}, \sim 10^{37}, \sim 10^{37}]^{\mathrm{T}}$$

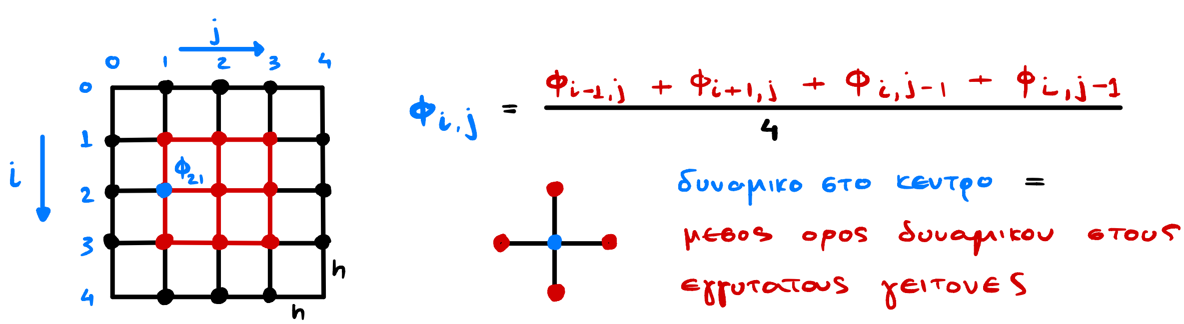
για την Jacobi (δε συγκλίνει). Εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό AX επαληθεύουμε ότι πράγματι το διάνυσμα που συγκλίνει η Gauss-Seidel αποτελεί την λύση του συστήματος.

b) Η λύση του συστήματος είναι η

$$X = [1, \quad 0, -1, \quad 0, \quad 1, \quad 1, \quad 0, \quad 1, \quad 2]^{T}.$$

Εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό AX επαληθεύουμε ότι πράγματι το διάνυσμα αυτό αποτελεί λύση του συστήματος.

Πρόβλημα 22 – Εφαρμογή (μη παραδοτέο)



Δείξτε ότι το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \\ \phi_{13} \\ \phi_{21} \\ \phi_{22} \\ \phi_{23} \\ \phi_{31} \\ \phi_{32} \\ \phi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{01} + \phi_{10} \\ \phi_{02} \\ \phi_{03} + \phi_{04} \\ \phi_{20} \\ 0 \\ \phi_{24} \\ \phi_{41} + \phi_{30} \\ \phi_{42} \\ \phi_{43} + \phi_{34} \end{bmatrix}$$

αντιστοιχεί στην επίλυση της εξίσωσης Laplace $\nabla^2\phi(x,y) = 0$ για την εύρεση του δυναμικού πάνω σε ένα τετραγωνικό πλέγμα

$$\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial y^2} \approx \frac{\phi(x+h,y) + \phi(x-h,y) + \phi(x,y+h) + \phi(x,y-h) - 4\phi(x,y)}{h^2}$$

όταν το δυναμικό στο σύνορο είναι γνωστό (πρόβλημα Dirichlet), όπου h η στοιχειώδης απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών σημείων και $\phi_{ij} = \phi(ih, jh)$. Χρησιμοποιείστε ανάπτυγμα Taylor κρατώντας όρους μέχρι $O(h^2)$

$$\phi(x \pm h, y) = \phi(x,y) \pm \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x^2}h^2 + O(h^3)$$
$$\phi(x, y \pm h) = \phi(x,y) \pm \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial y^2}h^2 + O(h^3)$$

για να δείξετε ότι το δυναμικό σε ένα σημείο του πλέγματος ισούται (κατά προσέγγιση) με τον μέσο όρο του δυναμικού των εγγύτατων γειτόνων

$$4\phi_{i,j} = \phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1}.$$

Ως εφαρμογή, θεωρείστε ότι $h = 1$ και ότι το δυναμικό στο σύνορο είναι παντού 0 εκτός από την πάνω πλευρά οπού γίνεται 3 ($\phi_{0,j} = 3, \phi_{4,j} = \phi_{i,0} = \phi_{i,4} = 0$). Δείξτε ότι για την παραπάνω συνοριακή συνθήκη, το δυναμικό στο εσωτερικό είναι $\phi_{11} = \phi_{13} \approx 1.29$, $\phi_{12} \approx 1.58$, $\phi_{21} = \phi_{23} \approx 0.56$, $\phi_{22} \approx 0.75$ και $\phi_{31} = \phi_{33} \approx 0.21$, $\phi_{22} \approx 0.29$.

Συστήματα με αραιούς πίνακες (sparse matrix) ίδιας περιοδικής μορφής με αυτόν που παρουσιάστηκε στην εφαρμογή αυτή (που ήταν μόλις διαστάσεων 3×3), χρησιμοποιούνται για την διακριτοποίηση της εξίσωσης Laplace σε μεγάλα πλέγματα $n \times n$. Η επίλυση αυτών γίνεται (συνήθως) με επαναληπτικές μεθόδους, καθώς οι ακριβείς μέθοδοι επίλυσης (π.χ. LU) έχουν απαγορευτικό χρόνο εκτέλεσης $\sim O(2n^3/3)$.

Πρόβλημα 23 (μη παραδοτέο)

Να μελετηθεί η ευστάθεια της λύσης του συστήματος

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2+\epsilon & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

με την μέθοδο απαλοιφής Gauss, με και δίχως μερική οδήγηση. Διερευνήστε την ευστάθεια της λύσης θέτοντας διαδοχικά πολύ μικρές τιμές για την παράμετρο ϵ π.χ., $\epsilon = 0, 10^{-15}, 2 \times 10^{-15}, 9 \times 10^{-15}, 10^{-16}$.

Πρόβλημα 24 (μη παραδοτέο)

a) Χρησιμοποιώντας το υπόδειγμα της λογικής του κώδικα που παρατίθεται, να υπολογιστεί το $\epsilon > 0$ που ικανοποιεί την σχέση $1.0 + \epsilon = 1.0$ για αριθμούς κινητής υποδιαστολής διπλής ακρίβειας (double precision – binary64). Έπειτα, για $p(x) = x^2$, να διερευνηθεί η τιμή του λόγου

$$\left.\frac{p(x+n\epsilon) - p(x)}{n\epsilon}\right|_{x=2}, \tag{2}$$

για $n = 1, 2, 3, 4, 5, 50000, 50001, 50002, 50003$. Θεωρώντας ότι η εξ. (2) αποτελεί έναν αριθμητικό εκτιμητή της παραγώγου της $p(x)$ στο $x = 2$, να υπολογιστεί το σχετικό σφάλμα[7] για τις τιμές του n που δίνονται.

b) Να υπολογιστούν οι λόγοι:

(I) $(0.1 + 0.1 - 0.2)/\epsilon$

(II) $(0.1 + 0.2 - 0.3)/\epsilon$

(III) $(7./3. - 4./3. - 3./3.)/\epsilon$

Υπόδειγμα κώδικα για τον υπολογισμό του ϵ:

```
/*   C/C++   */
double e = 1.0;
while(1.0 + e != 1.0) e = 0.5*e;

# Python
e = 1.0
while(1.0 + e != 1.0): e = 0.5*e
```

[7]Γενικός ορισμός, αν $\hat{w}$ εκτιμητής του w, το απόλυτο σχετικό σφάλμα του $\hat{w}$ είναι $|(w - \hat{w})/w|$.

Πρόβλημα 25 (Φεβρουάριος 2019)

Να υπολογιστεί το $x = \sqrt[3]{2}$ χρησιμοποιώντας τρεις επαναλήψεις της μεθόδου Newton-Raphson και αρχική εκτίμηση το $x_0 = 2.0$. Θεωρώντας ως γνωστό ότι $\sqrt[3]{2} = 1.259921$ (στρογγυλοποίηση 6 δεκαδικών ψηφίων), να υπολογιστεί το ποσοστιαίο (%) σχετικό σφάλμα της τελικής εκτίμησης (x_3), όπως αυτή έχει διαμορφωθεί κατόπιν των τριών επαναλήψεων. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων για όλους τους επιμέρους αριθμητικούς υπολογισμούς.

– Λύση – – github –

Πρόβλημα 26 (Φεβρουάριος 2019)

Να υπολογιστεί με την μέθοδο της απλοϊκής (crude) Monte–Carlo ολοκλήρωσης, το ολοκλήρωμα

$$I = \int_1^{11} x^2 dx$$

καθώς και η αβεβαιότητά του, χρησιμοποιώντας τρία δείγματα $u = \{0.5, 0.9, 0.4\}$ γεννήτριας τυχαίων αριθμών ομοιόμορφης πυκνότητας πιθανότητας στο διάστημα $[0, 1]$. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων για όλους τους επιμέρους αριθμητικούς υπολογισμούς.

– Λύση – – github –

Πρόβλημα 27 (Ιούλιος 2020)

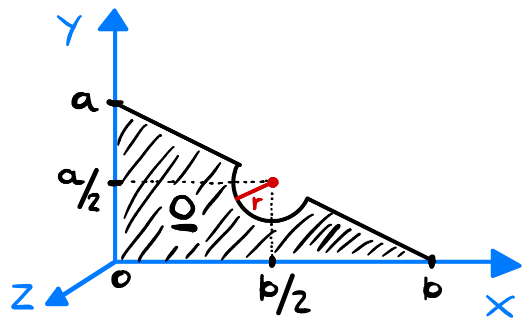
Κύκλος ακτίνας r βρίσκεται εντός τετραγώνου πλευράς $2r$ και έχουν κοινό κέντρο.

a) Να υπολογιστεί το αναμενόμενο σχετικό σφάλμα στην εκτίμηση του εμβαδού ενός κύκλου, μέσω της μεθόδου Monte-Carlo απόρριψης (accept/reject), αν χρησιμοποιηθούν 100 τυχαία σημεία ομοιόμορφης κατανομής εντός του τετραγώνου. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων για την έκφραση του τελικού αποτελέσματος και τους επιμέρους αριθμητικούς υπολογισμούς.

b) Να γραφεί αλγόριθμος που να υπολογίζει το εμβαδόν του κύκλου, καθώς και την αβεβαιότητα αυτού, μέσω της μεθόδου Monte-Carlo απόρριψης (accept/reject). Θεωρείστε ότι διαθέτουμε γεννήτρια τυχαίων αριθμών ομοιόμορφης κατανομής στο $[0, 1]$, η ακτίνα του κύκλου είναι $r = 1$ και το κοινό κέντρο του κύκλου και του τετραγώνου συμπίπτει με την αρχή των αξόνων $(0, 0)$ στο επίπεδο x, y.

– Λύση – – github –

Πρόβλημα 28 (Φεβρουάριος 2022)



Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα Oz της δισδιάστατης πλάκας με την μέθοδο του απλοϊκού (crude) MC,

$$I = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2)\rho(x, y)dxdy$$

θεωρώντας πυκνότητα $\rho(x, y) = (xy/k)e^{-x^2-y^2}$ εντός του χωρίου Ω και $\rho(x, y) = 0$ εκτός αυτού. Θεωρήστε τις αριθμητικές σταθερές $a, b, r = a/4$ ως δεδομένες. Εκτιμήστε την αβεβαιότητα $(\delta \hat{I})$ του υπολογισμού σας. *Θεωρείστε ότι έχετε στην διάθεσή σας γεννήτρια* $U() \sim Unif[0, 1]$ *τυχαίων αριθμών ομοιόμορφα κατανεμημένων στο* $[0, 1]$. Η συνάρτηση $U()$ επιστρέφει έναν τυχαίο αριθμό στο [0,1] και θεωρείται ήδη υλοποιημένη. Μπορείτε να την “καλείτε” εντός του προγράμματός σας.

– Λύση –

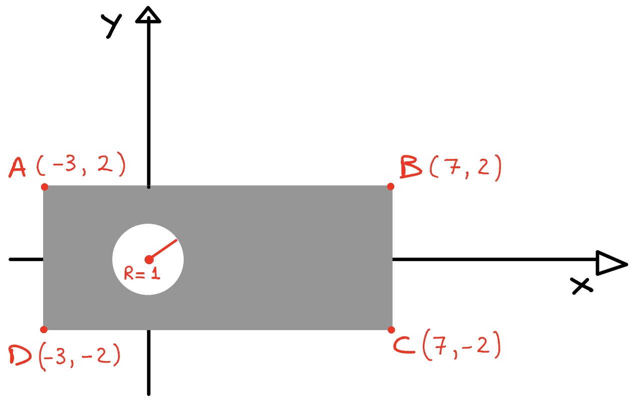
Πρόβλημα 29 (Μάιος 2021)

Έστω η συνάρτηση $g(x) = (x^2 - 1)/3$.

a) Να γραφεί υπολογιστικός αλγόριθμος που θα εκτελεί επαναλήψεις σταθερού σημείου $x_{\mathrm{n}+1} = g(x_{\mathrm{n}})$ για την συνάρτηση $g(x)$ ξεκινώντας από κάποια αρχική τιμή. Θεωρώντας ως αρχική τιμή το $x_0 = \sqrt{10}$, να υπολογίσετε τον αριθμό που θα τύπωνε το πρόγραμμά σας ύστερα από 2 επαναλήψεις.

b) Υπολογίστε αναλυτικά τα σταθερά σημεία τής $g(x)$.

– Λύση –



Πρόβλημα 30 (Μάιος 2021)

Δισδιάστατη πλάκα οριοθετείται από τα σημεία $ABCD$ όπως στο σχήμα. Η πυκνότητά της είναι $\rho(x, y)$ για όλα τα σημεία εντός της σκιασμένης (με χρώμα γκρι) ορθογώνιας περιοχής, τα οποία βρίσκονται εκτός μοναδιαίου κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων. Θεωρείστε ότι είστε σε θέση να υπολογίσετε την τιμή τής $\rho(x, y)$ για οποιοδήποτε ζεύγος τιμών (x, y) αλλά δεν γνωρίζετε τα ακρότατά της. Εντός του μοναδιαίου κύκλου με ακτίνα 1 και κέντρο το (0,0) η πυκνότητα είναι μηδενική. Να γραφεί αλγόριθμος που θα υπολογίζει με την μέθοδο Monte-Carlo την μάζα της πλάκας και την αβεβαιότητα στην εκτίμησή της, θεωρώντας ως δοσμένη μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών ομοιόμορφης κατανομής στο διάστημα $[0, 1]$.

– Λύση –

Πρόβλημα 31 (Ιούνιος 2022)

Δίνεται το σύστημα $Ax = b$. Βρείτε την διάσπαση LU (Doolittle) του πίνακα A. Για να είναι έγκυρη η απάντηση παρακαλούμε να συμπεριλάβετε όλους τους αριθμητικούς υπολογισμούς που κάνατε προκειμένου να φτάσετε στο τελικό σας αποτέλεσμα.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 11 & 14 \end{bmatrix} \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix}$$

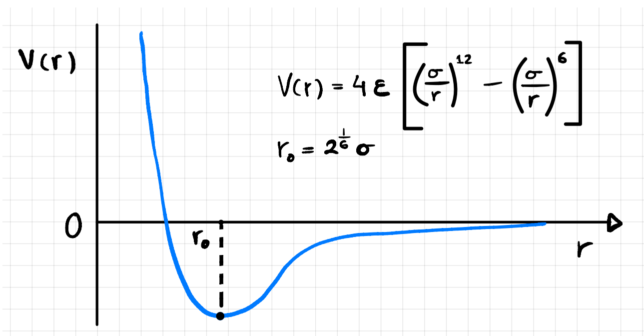
– Λύση –

Πρόβλημα 32 (Σεπτέμβριος 2022)

Το δυναμικό Lennard-Jones χρησιμοποιείται στην μοντελοποίηση της δυναμικής ενέργειας μεταξύ ουδετέρων ατόμων ή μορίων. Έχει την μορφή

$$V(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6} \right],$$

όπου r η απόσταση μεταξύ των δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων και ϵ και σ παράμετροι του



μοντέλου. Το σημείο ισορροπίας (ελάχιστη δυναμική ενέργεια) βρίσκεται στην θέση $r_0 = \sigma 2^{1/6}$. Θεωρώντας $\epsilon = 1$ και $\sigma = 1$ λύστε την εξίσωση $V(r) = 3\epsilon = 3$ με την μέθοδο Newton - Raphson γράφοντας κατάλληλο υπολογιστικό αλγόριθμο. Υλοποιήστε συνθήκη τερματισμού στο πρόγραμμά σας όταν η προσεγγιστική λύση που υπολογίζει δεν αλλάζει περισσότερο από 10^{-6} ή αν αυτή βρεθεί εκτός των ορίων $0 < r < 10$. Να αιτιολογηθεί γραφικά η σύγκληση του αλγορίθμου σας στην ζητουμένη τιμή, αν ως εναρκτήρια θέση έχουμε τα:

α) $r = 1$

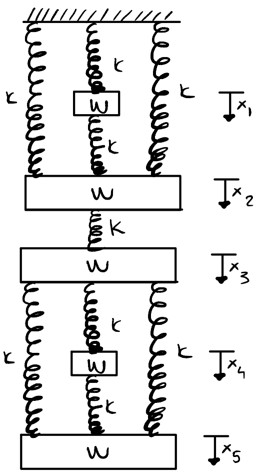
β) $r = r_0 = 2^{1/6} \approx 1.12$

γ) $r = 2$

– Λύση – – github –

Πρόβλημα 33 (Μάιος 2023)

Πέντε σώματα ίδιας μάζας είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους με ελατήρια όπως στο σχήμα. Υπό την επίδραση του βάρους τους τα ελατήρια εκτρέπονται από το φυσικό τους μήκος κατά x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 και το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία. Η εύρεση των x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ανάγεται στο παρακάτω σύστημα. Θεωρήστε ότι $W/k = 1$.



$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W/k \\ W/k \\ W/k \\ W/k \\ W/k \end{bmatrix}$$

Έχοντας ως αρχική εκτίμηση το $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$,

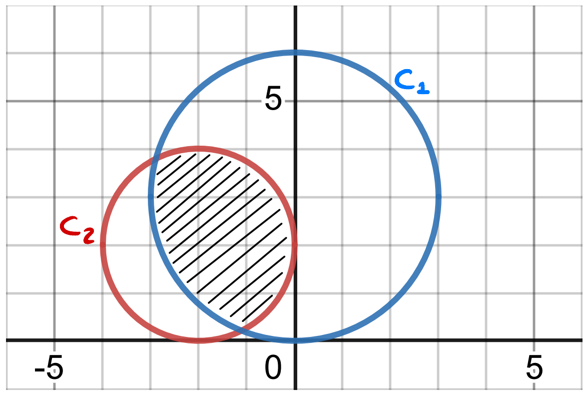
α) Συντάξτε υπολογιστικό αλγόριθμο που θα υπολογίζει επαναληπτικά τα x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 χρησιμοποιώντας την μέθοδο Jacobi.

β) Υπολογίστε τις τιμές που θα έχουν τα x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 μετά από μια επανάληψη με την μέθοδο Jacobi.

γ) Πως θα άλλαζε η απάντησή σας στο β) ερώτημα, αν αντί της Jacobi υλοποιούσαμε την επαναληπτική μέθοδο Gauss - Seidel?

– Λύση –

Πρόβλημα 34 (Σεπτέμβριος 2023)



Θεωρήστε την γραμμοσκιασμένη επιφάνεια που σχηματίζεται λόγω επικάλυψης μεταξύ δύο κύκλων C_1 και C_2 με εξισώσεις:

$$x^2 + (y-3)^2 = 3^2 \; [C_1]$$
$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 2^2 \; [C_2]$$

όπως στο σχήμα. Θεωρήστε επιπροσθέτως ότι έχετε γράψει κάποιο πρόγραμμα που παρήγαγε 1000 τυχαία σημεία (x, y) ομοιόμορφα κατανεμημένα στην επιφάνεια του κύκλου $C1$ και ότι 300 από αυτά έτυχαν να βρεθούν εντός της γραμμοσκιασμένης περιοχής.

α) Υπολογίστε αριθμητικά το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας (I) καθώς και την αβεβαιότητα αυτού (δI). *Υπόδειξη: Δεν ζητείται συγγραφή κώδικα.* [**μονάδες 1.5**]

β) Γράψτε υπολογιστικό αλγόριθμο (κώδικα) που να παράγει σημεία με ομοιόμορφη κατανομή εντός της γραμμοσκιασμένης περιοχής. Θεωρήστε ως ήδη υλοποιημένη γεννήτρια $U()$ τυχαίων αριθμών ομοιόμορφης κατανομής μεταξύ του 0 και 1. [**μονάδες 1.0**]

– Λύση –

Πρόβλημα 35 (Σεπτέμβριος 2021)

Να γραφεί πρόγραμμα που θα εξομοιώνει την ραδιενεργό διάσπαση $N = 1000$ πυρήνων συναρτήσει του χρόνου, σε διακριτά χρονικά βήματα $\Delta t = 1s$. Θεωρήστε ότι κάθε αδιάσπαστος πυρήνας έχει σταθερή πιθανότητα διάσπασης $p = \lambda\Delta t = 10^{-3}$ στο χρονικό διάστημα $\Delta t = 1s$. Το πρόγραμμα θα πρέπει να επιστρέφει στην "έξοδό" του το πλήθος των αδιάσπαστων πυρήνων ύστερα από συνολικό χρόνο εξομοίωσης ίσο με $1000s$. Θεωρείστε ότι έχετε στην διάθεσή σας ήδη υλοποιημένη γεννήτρια $U() \sim \mathrm{Unif}[0, 1]$ τυχαίων αριθμών ομοιόμορφα κατανεμημένων στο $[0, 1]$. *Η συνάρτηση $U()$ επιστρέφει έναν τυχαίο αριθμό στο [0,1] και θεωρείται ήδη υλοποιημένη. Μπορείτε να την "καλείτε" εντός του προγράμματός σας.*

– Λύση –

Πρόβλημα 36 (Σεπτέμβριος 2021)

Να λύσετε το σύστημα $Ax = b$ με την μέθοδο LU (Doolittle). Δίνονται οι πίνακες LU. Προσδιορίστε πρώτα τις αριθμητικές τιμές των στοιχείων l_{31} και u_{15}, που έχουν παραλειφθεί από την εκφώνηση. Για να είναι έγκυρη η απάντηση παρακαλούμε να συμπεριλάβετε όλους τους αριθμητικούς υπολογισμούς που κάνατε προκειμένου να φτάσετε στο τελικό σας αποτέλεσμα. *Υπόδειξη: για την επίλυση του προβλήματος, όλοι οι απαιτούμενοι υπολογισμοί εμπλέκουν αποκλειστικά πράξεις μεταξύ ακεραίων. Αποφύγετε αριθμητικά λάθη χρησιμοποιώντας την αριθμητική σας μηχανή.*

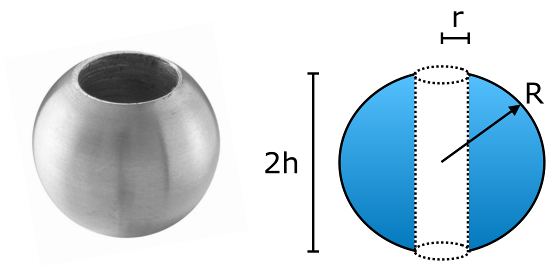
$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 7 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 10 \\ 1 & 5 & 8 & 12 & 9 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 7 \\ 14 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & u_{15} \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

– Λύση –

Πρόβλημα 37 (Φεβρουάριος 2023)

Σφαιρικό δαχτυλίδι ύψους $2h$ κατασκευάζεται από μια σφαίρα ακτίνας R στην οποία διανοίγουμε μια οπή ακτίνας r έτσι ώστε ο κύλινδρος που δημιουργείται να έχει το ίδιο κέντρο με την σφαίρα. Θεωρείστε $h = 3$, $R = 5$, $r = 4$ και ότι έχετε στην διάθεσή σας γεννήτρια $U()$ τυχαίων αριθμών ομοιόμορφα κατανεμημένων μεταξύ του 0 και 1.



a) Συντάξτε υπολογιστικό αλγόριθμο που θα υπολογίζει με την μέθοδο ολοκλήρωσης Monte Carlo τον όγκο (I) του σφαιρικού δαχτυλιδιού, καθώς και την αβεβαιότητα (δI) στην εκτίμησή αυτού, παράγοντας ομοιόμορφα $N = 10^4$ σημεία εντός τρισδιάστατου κύβου ακμής $2R$, ο οποίος εγκιβωτίζει την σφαίρα και έχει κοινό κέντρο με αυτήν. **[1.5 μονάδα]**

b) Ο αναλυτικός υπολογισμός του όγκου του σφαιρικού δαχτυλιδιού είναι $\frac{4}{3}\pi h^3$. Δοθέντος αυτού, υπολογίστε *αναλυτικά* πόσο μεγάλο πρέπει να γίνει το N, ώστε το αναμενόμενο σχετικό σφάλμα στην εκτίμηση του ολοκληρώματος να γίνει $\delta I/I < 0.01$. (Δεν απαιτείται η συγγραφή υπολογιστικού αλγορίθμου για το ερώτημα αυτό.) **[1 μονάδα]**

Σημείωση: Ο αναλυτικός υπολογισμός του όγκου του σφαιρικού δαχτυλιδιού οδηγεί στην ποσότητα $\frac{4}{3}\pi h^3$ που είναι ανεξάρτητη των R και r, δηλαδή προκύπτει ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε τον όγκο (και άρα και την μάζα αν είναι γνωστή η πυκνότητα) ενός τέτοιου αντικειμένου μετρώντας μόνο το ύψος του.

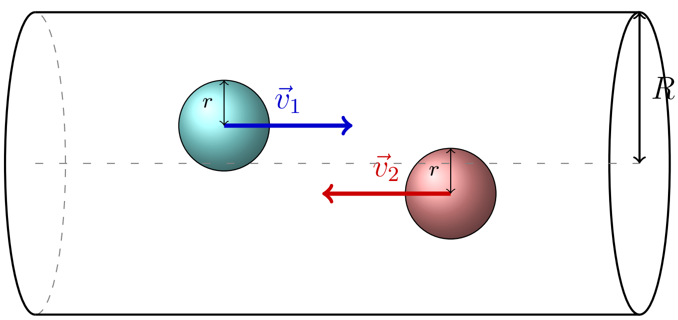
– Λύση –

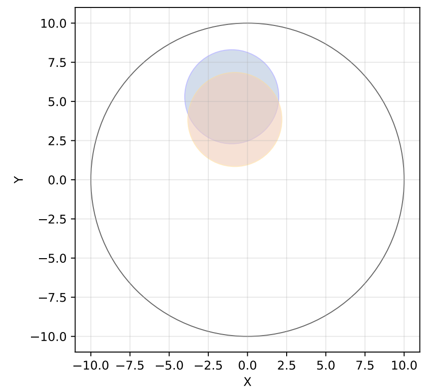
Πρόβλημα 37 (Μάιος 2025)

Υπολογίστε με τη μέθοδο σταθερού σημείου, εκτελώντας δύο επαναλήψεις, τη λύση της εξίσωσης $\gamma(w) = 5$ με $\gamma(w) = \frac{1}{2}(e^w + e^{-w})$, έχοντας ως αρχική εκτίμηση την τιμή $w_0 = \ln 2$. Δίνονται οι ακριβείς λύσεις $w = \pm\,\mathrm{arcosh}(5) \approx \pm 2.292432$. Αναμένεται τοπική σύγκλιση? Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

– Λύση –

Πρόβλημα 37 (Φεβρουάριος 2026)



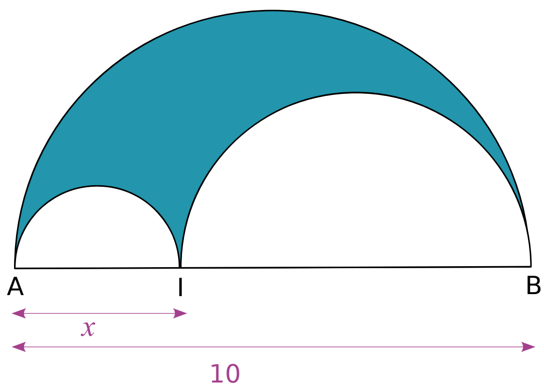


Δύο σφαίρες ακτίνας r κινούνται μέσα σε κυλινδρικό σωλήνα ακτίνας R με αντίθετες ταχύτητες, παράλληλα στον άξονά του, πλησιάζοντας η μία την άλλη. Κατά την είσοδό τους από τα δύο άκρα του σωλήνα, οι εγκάρσιες θέσεις των κέντρων των σφαιρών επιλέγονται τυχαία, ανεξάρτητα και ομοιόμορφα εντός κύκλου ακτίνας $R - r$, ώστε οι σφαίρες να βρίσκονται πλήρως εντός του σωλήνα[8]. Θέστε $R = 10$ και $r = 3$.

Οι σφαίρες συγκρούονται αν η εγκάρσια απόσταση των κέντρων τους είναι μικρότερη από $2r$, όπως φαίνεται στο παράδειγμα του σχήματος δεξιά (εγκάρσια τομή). Να συντάξετε υπολογιστικό αλγόριθμο που να υπολογίζει την πιθανότητα σύγκρουσης και τη στατιστική αβεβαιότητά της με τη μέθοδο Monte–Carlo. Θεωρείστε ότι έχετε στη διάθεσή σας γεννήτρια $U() \sim \mathrm{Unif}[0, 1]$.

[8] Υπόδειξη: Δειγματοληψία εισόδου κάθε σφαίρας με απόρριψη, παράγοντας τυχαία σημεία σε τετράγωνο πλευράς $2(R - r)$ και κρατώντας μόνο όσα βρίσκονται εντός του κύκλου ακτίνας $R - r$.

Πρόβλημα 37 (Μάιος 2026)



Να συντάξετε υπολογιστικό αλγόριθμο που να υπολογίζει το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής και τη στατιστική αβεβαιότητά του με τη μέθοδο Monte–Carlo. Θεωρήστε ότι έχετε στη διάθεσή σας γεννήτρια $U() \sim \text{Unif}[0,1]$ και ότι $x = 2$. Να υπολογίσετε αναλυτικά (κλειστός τύπος, χωρίς κώδικα) την αναμενόμενη στατιστική αβεβαιότητα του προγράμματός σας για $N = 10^4$ τυχαία σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα σε ορθογώνια περιοχή βάσης 10 και ύψους 5.

– Λύση –