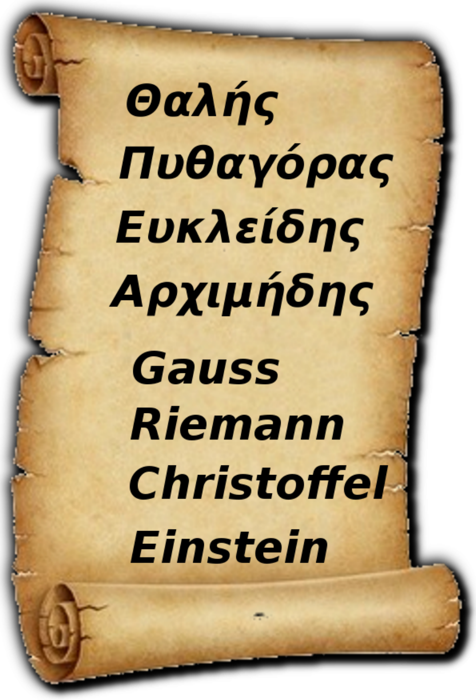
ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΟΣ

Θ. Χριστοδουλάκης **Ε. Κορφιάτης**



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΑΘΗΝΑ 2015

Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

HEALLINK
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Θεοδόσιος Χριστοδουλάκης, Ευάγγελος Κορφιάτης

ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΟΣ

Κριτικός Αναγνώστης
Θεοχάρης Αποστολάτος

Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών,
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο,
Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου www.kallipos.gr

ISBN: 978-960-603-071-0
Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας
Θεοδόσιος Χριστοδουλάκης, Ευάγγελος Κορφιάτης

Ευκλείδια Αιτήματα

- Ἠιτήσθω ἀπό παντός σημείου ἐπί πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμήν ἀγαγεῖν.
- Καί πεπερασμένην εὐθεῖαν κατά τό συνεχές ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.
- Καί παντί κέντρῳ καί διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.
- Καί πάσας τάς ὀρθάς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.
- Καί ἐάν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τά ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίας δύο ορθῶν ἐλλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τάς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν ἐφ' ἃ μέρη εἰσίν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλλάσσονες.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

1.1 Υπενθυμίσεις από την θεωρία πινάκων

Έστω $A=[A_{ij}]$ ένας μxν πίνακας. Ο πρώτος δείκτης (i) παίρνει τιμές από 1 έως μ και δηλώνει την γραμμή στην οποία βρίσκεται το στοιχείο A_{ij} και ο δεύτερος (j) παίρνει τιμές από 1 έως ν και δηλώνει την στήλη. Έτσι A_{23} είναι το στοιχείο που βρίσκεται στη $2^η$ γραμμή και την $3^η$ στήλη. Ο **ανάστροφος** A^T (transpose) ενός μxν πίνακα A είναι ένας νxμ πίνακας, ο οποίος προκύπτει από τον A αν μετατρέψουμε τις γραμμές του A σε στήλες και τις στήλες σε γραμμές. Για παράδειγμα το στοιχείο που βρίσκεται στην $2^η$ γραμμή κα $3^η$ στήλη του A^T είναι το στοιχείο του A που βρίσκεται στην $3^η$ γραμμή και $2^η$ στήλη. Επομένως έχουμε:
$(A^T)_{ij} = A_{ji}$

Σχόλια

1. Ένας νx1 πίνακας A έχει ν γραμμές και μία στήλη (**πίνακας στήλη**).
   Για λόγους απλότητας,τα στοιχεία του δεν τα συμβολίζουμε με A_{11}, A_{21}, …. , $A_{ν1}$, αλλά με A_1 , A_2 …. , $A_ν$.
   Το τυχαίο στοιχείο της i γραμμής το συμβολίζουμε με A_i, i=1,2.. ν.

2. Ένας 1xν πίνακας A έχει 1 γραμμή και ν στήλες (**πίνακας γραμμή**).
   Τα στοιχεία του, για λόγους απλότητας, δεν τα συμβολίζουμε με A_{11}, A_{12} …. , $A_{1ν}$, αλλά και πάλι με A_1 , A_2… . , $A_ν$.
   Το τυχαίο στοιχείο της i στήλης συμβολίζεται επίσης με A_i, i=1,2.. ν.

3. Ο ανάστροφος ενός πίνακα στήλη είναι ένας πίνακας γραμμή και αντιστρόφως.

Μεταξύ των πινάκων ορίζονται διάφορες **πράξεις.**

1) Άθροισμα δύο (ομοειδών υποχρεωτικά) πινάκων

Έστω A=[A_{ij}] και B=[B_{ij}] δύο μxν πίνακες. Ονομάζουμε άθροισμα των δύο πινάκων ένα μxν πίνακα C, που προκύπτει με πρόσθεση των στοιχείων του A με τα αντίστοιχα στοιχεία του B.
Επομένως ισχύει ότι:

$$C = A + B \Leftrightarrow C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

ή εν συντομία

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

2) Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα

Ονομάζουμε γινόμενο του αριθμού λ με τον μxν πίνακα A, έναν μxν πίνακα που τα στοιχεία του προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας τα στοιχεία του A με λ.
Δηλαδή ορίζουμε ότι:

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij}$$

3) Πολλαπλασιασμός πινάκων

Έστω A ένας μxν πίνακας και B ένας νxρ πίνακας. Ονομάζουμε γινόμενο του A με τον B έναν μxρ πίνακα C τα στοιχεία του οποίου προκύπτουν από την σχέση:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{\nu} A_{ik} B_{kj} \text{ με i=1…μ και j=1….ρ,}$$

ή εν συντομία

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{\nu} A_{ik} B_{kj}$$

Έτσι για παράδειγμα αν ο A είναι ένας 2x3 πίνακας και ο B ένας 3x4 πίνακας το γινόμενο του A με τον B είναι ένας 2x4 πίνακας C . Το στοιχείο που βρίσκεται στη $2^{η}$ γραμμή και $4^{η}$ στήλη του C έχει τιμή

$$C_{24} = \sum_{k=1}^{3} A_{2k} B_{k4} = A_{21} B_{14} + A_{22} B_{24} + A_{23} B_{34}$$

Ειδικές περιπτώσεις:

Έστω A ένας μxν πίνακας, X ένας 1xμ πίνακας γραμμή και Y ένας νx1 πίνακας στήλη. Ορίζονται τότε τα γινόμενα XA (πίνακας γραμμή), AY (πίνακας στήλη), YX (νxμ πίνακας) από τις σχέσεις:

$$(XA)_i = \sum_{k=1}^{\mu} X_k A_{ki}$$

$$(AY)_i = \sum_{k=1}^{\nu} A_{ik} Y_k$$

$$(YX)_{ij} = Y_i X_j$$

Έστω τώρα A=[A_{ij}] ένας νxν τετραγωνικός πίνακας και X=(X_i) πίνακας στήλη νx1. Μπορούμε να ορίσουμε τα γινόμενα AX (πίνακας στήλη), X^TA (πίνακας γραμμή), XX^T (νxν πίνακας), X^TX (1x1 πίνακας δηλαδή αριθμός)

$$(AX)_i = \sum_{k=1}^{\nu} A_{ik} X_k$$

$$(X^T A)_i = \sum_{k=1}^{\nu} X_k^T A_{ki} = \sum_{k=1}^{\nu} X_k A_{ki}$$

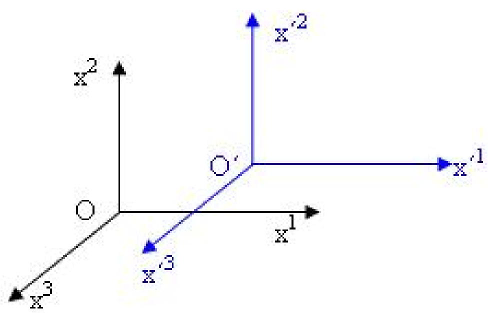
$$(XX^T)_{ij} = X_i X_j$$

$$X^T X = \sum_{k=1}^{\nu} X_k X_k$$

1.2 Μεταθέσεις – Στροφές συστήματος αναφοράς – Ορθογώνιοι πίνακες

1.2.1 Μεταθέσεις

Θεωρούμε δύο τρισορθογώνια συστήματα συντεταγμένων $Ox^1x^2x^3$ και $Ox'^1x'^2x'^3$ με παράλληλους άξονες. Έστω b^1, b^2, b^3 οι συντεταγμένες της αρχής Ο΄ ως προς Ο.



Ένα τυχαίο σημείο Μ του χώρου έχει συντεταγμένες (x^1, x^2, x^3) ως προς το Ο και συντεταγμένες x'^1, x'^2, x'^3 ως προς το Ο΄.

Είναι γνωστή η σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες x΄ με τις x.

$$\begin{aligned} x'^1 &= x^1 - b^1 \\ x'^2 &= x^2 - b^2 \\ x'^3 &= x^3 - b^3 \end{aligned}$$

Ορίζουμε τον πίνακα συντεταγμένων (πίνακας στήλη)

$$x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

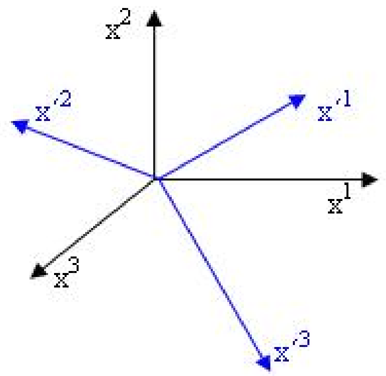
Επομένως η σχέση μετασχηματισμού συντεταγμένων γίνεται:

$$x' = x - b \text{ με } b = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix}$$

Σε γλώσσα συνιστωσών η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί:

$$x'^i = x^i - b^i, i = 1, 2, 3$$

1.2.2 Στροφές



Θεωρούμε δύο ορθοκανονικά συστήματα συντεταγμένων με κοινή αρχή O≡O´. Ένα τυχαίο σημείο M του χώρου θα έχει συντεταγμένες (x^1,x^2,x^3) ως προς το O και (x'^1,x'^2,x'^3) ως προς το O´. Ζητάμε τη σχέση που έχουν οι συντεταγμένες x με τις x´.

Έστω $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ και $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ τα μοναδιαία διανύσματα στους τρεις άξονες των O και O´ αντιστοίχως. Έστω δε $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του M ως προς την κοινή αρχή.

Ισχύει ότι

$$\vec{r} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x^i\vec{e}_i = x^i\vec{e}_i$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη **σύμβαση άθροισης του Einstein** σύμφωνα με την οποία : *Αν σε μια παράσταση εμφανίζεται ο ίδιος δείκτης σε άνω και κάτω θέση τότε υπονοείται άθροιση σε αυτόν τον δείκτη και το σύμβολο της άθροισης παραλείπεται.*

Παράδειγμα: $a^{ij}u_j = a^{i1}u_1 + a^{i2}u_2 + a^{i3}u_3$

Ομοίως για τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{r}$ στο άλλο σύστημα συντεταγμένων ισχύει ότι: $\vec{r} = x'^i\vec{e}'_i$.

Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη προκύπτει ότι:

$$x'^i\vec{e}'_i = x^i\vec{e}_i \tag{1.2.1}$$

Επειδή τα $\vec{e}'_i$ είναι 3 γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, κάθε άλλο διάνυσμα θα γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός αυτών. Επομένως και τα $\vec{e}_i$ γράφονται σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{e}'_i$.
Υπάρχει λοιπόν πίνακας $R=(R^i{}_m)$ έτσι ώστε

$$\boxed{\vec{e}_i = R^j{}_i \vec{e}'_j} \tag{1.2.2}$$

Αντικαθιστώντας στην (1.2.1) προκύπτει ότι:

$$x'^j \vec{e}'_j = x^i \vec{e}_i \Leftrightarrow x'^j \vec{e}'_j = x^i R^j{}_i \vec{e}'_j \Leftrightarrow (x'^j - R^j{}_i x^i)\vec{e}'_j = 0$$

Και επειδή τα $\vec{e}'_j$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα:

$$\boxed{x' = Rx \Leftrightarrow x'^j = R^j{}_i x^i} \tag{1.2.3}$$

Εκτός από τις 9 ποσότητες R^i_j ορίζουμε τις ποσότητες R_{ij} και $R_i{}^j$ (δηλαδή «ανεβοκατεβάζουμε δείκτες») μέσω των σχέσεων

$$R_{ij} = R^j_i = R^i_j$$

(πχ $R_{12}=R_1{}^2 = R^1{}_2$). Όπως θα φανεί παρακάτω η ανάγκη ενός τέτοιου παράδοξου ορισμού είναι απαραίτητη, για να τηρήσουμε τη σύμβαση άθροισης του Einstein (και όχι μόνο).
Για τον πίνακα R μπορούμε να αποδείξουμε το επόμενο

Θεώρημα 1.2.2.1 *Ο πίνακας R όπως ορίζεται από την σχέση (1.2.2) ικανοποιεί την σχέση:*

$$\boxed{R^T R = R R^T = I} \tag{1.2.4}$$

Απόδειξη
Επειδή το $Ox^1x^2x^3$ είναι ορθοκανονικό, για τα 9 εσωτερικά γινόμενα $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ (συνημίτονα κατευθύνσεως) θα ισχύει ότι : αν i=j τότε $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 1$ και αν $i \neq j$ τότε $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$.
Επομένως $\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n = \epsilon_{mn}$
(Ο ε είναι ο Ευκλείδιος μετρικός τανυστής, ο οποίος ως πίνακας συμπίπτει με τον μοναδιαίο 3x3 πίνακα I).

Αντικαθιστώντας τα $\vec{e}$ από την (1.2.2) προκύπτει ότι:

$$\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n = \epsilon_{mn} \Leftrightarrow (\vec{e}'_i R^i{}_m) \cdot (\vec{e}'_j R^j{}_n) = \epsilon_{mn} \Leftrightarrow R^i{}_m R^j{}_n \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = \epsilon_{mn} \Leftrightarrow$$

$$R^i{}_m \epsilon_{ij} R^j{}_n = \epsilon_{mn} \Leftrightarrow (R^T I R)_{mn} = I_{mn} \Leftrightarrow R^T R = I.$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι οι R και R^T είναι ο ένας αντίστροφος του άλλου και επομένως $RR^T=I$.

Αναζητούμε τώρα τις αντίστροφες σχέσεις των (1.2.2) και (1.2.3) . Συγκεκριμένα ισχύει το εξής

Θεώρημα 1.2.2.2 *Ισχύουν οι σχέσεις:*

$$\boxed{\vec{e}\,'_i = R_i{}^j \vec{e}_j} \tag{1.2.5}$$

$$\boxed{x = R^T x' \Leftrightarrow x^j = R_i{}^j x'^i} \tag{1.2.6}$$

Απόδειξη

A)Ισχύει ότι:

$$\vec{e}_i = R^j{}_i \vec{e}\,'_j \Rightarrow \vec{e}_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ji} \vec{e}\,'_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} R_{mi} \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3} R_{mi} \sum_{j=1}^{3} R_{ji} \vec{e}\,'_j \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{3} R_{mi} \vec{e}_i = \sum_{j=1}^{3} \vec{e}\,'_j \sum_{i=1}^{3} R_{mi} R_{ji} = \sum_{j=1}^{3} \vec{e}\,'_j \sum_{i=1}^{3} R_{mi} R^T_{ij} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{3} R_{mi} \vec{e}_i = \sum_{j=1}^{3} \vec{e}\,'_j (RR^T)_{mj} = \sum_{j=1}^{3} \vec{e}\,'_j \delta_{mj} = \vec{e}\,'_m \Rightarrow$$

$$\vec{e}\,'_m = \sum_{i=1}^{3} R_{mi} \vec{e}_i = R_m{}^i \vec{e}_i$$

B) Για το B μπορούμε αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια μέθοδο. Για λόγους ποικιλίας εναλλακτικά μπορούμε να κάνουμε την εξής απόδειξη:
Ισχύει ότι:

$$RR^T = I \Rightarrow R^T = R^{-1}$$

Επίσης

$$x'^j = R^j{}_i x^i \Rightarrow x' = Rx \Rightarrow R^{-1}x' = R^{-1}Rx \Rightarrow x = R^T x' \Rightarrow$$

$$x^i = \sum_{j=1}^{3} R^T_{ij} x'^j = \sum_{j=1}^{3} R_{ji} x'^j \Rightarrow x^i = R_j{}^i x'^j$$

Για το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων μπορούμε να αποδείξουμε το εξής

Θεώρημα 1.2.2.3 *Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι αναλλοίωτο κάτω από στροφές ορθοκανονικών συστημάτων συντεταγμένων.*

<u>*Απόδειξη*</u>

Έστω $\vec{u}$ και $\vec{v}$ δύο διανύσματα του χώρου με συντεταγμένες u^i και v^i.

Έστω δε $u = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix}$ και $v = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$ οι αντίστοιχοι πίνακες συντεταγμένων.

Το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων στο πρώτο σύστημα συντεταγμένων είναι:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 = u^T v = v^T u$$

Στο δεύτερο σύστημα συντεταγμένων ισχύει ότι :

$$u'^T v' = (Ru)^T (Rv) = u^T R^T R v = u^T v$$

Έστω τώρα ένα διάνυσμα του χώρου με πίνακα συντεταγμένων u.
Το τετράγωνο του μέτρου του είναι το εσωτερικό γινόμενο

$$|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2$$

Σε γλώσσα πινάκων αυτό σημαίνει ότι: $|\vec{u}|^2 = u^T u$
Για να γράψουμε το μέτρο του διανύσματος σε γλώσσα συντεταγμένων με συμπαγή τρόπο ορίζουμε τους εξής περίεργους (ταυτοτικούς) πίνακες και κάνουμε τις εξής συμφωνίες:
Ορίζουμε τον **Ευκλείδιο μετρικό τανυστή με δύο δείκτες κάτω:** $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 1$.
Ορίζουμε τον **Ευκλείδιο μετρικό τανυστή με δύο δείκτες άνω:** $\epsilon^{11} = \epsilon^{22} = \epsilon^{33} = 1$
Ορίζουμε τον **δέλτα του Kronecker με ένα δείκτη άνω και ένα δείκτη κάτω:** $\delta^1_1 = \delta^2_2 = \delta^3_3 = 1$
Τα στοιχεία και των τριών πινάκων είναι μηδέν όταν οι δείκτες είναι άνισοι.
Θεωρούμε τώρα μια ποσότητα με καθορισμένη διάταξη δεικτών.
Αν κάποιος δείκτης είναι κάτω (**συναλλοίωτος δείκτης**) μπορεί να ανυψωθεί με τον πίνακα ϵ^{ij}.
Αν κάποιος δείκτης είναι πάνω (**ανταλλοίωτος δείκτης**) μπορεί να υποβιβαστεί με τον πίνακα ϵ_{ij}.

<u>*Παράδειγμα 1:*</u>

Έστω ότι έχουμε το ανταλλοίωτο διάνυσμα a^i. Μπορούμε να ορίσουμε το συναλλοίωτο διάνυσμα a_i από την σχέση $a_i = \epsilon_{ij} a^j$ (εννοείται η άθροιση στο j).

<u>*Παράδειγμα 2:*</u>

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ανταλλοίωτο τανυστή (πίνακας A^{ij}). Μπορούμε να ορίσουμε τον αντίστοιχο μικτό και τον αντίστοιχο συναλλοίωτο μέσω των σχέσεων:

$$A^i{}_j = A^{im} \epsilon_{mj} \text{ και } A_{ij} = \epsilon_{im} A^{mn} \epsilon_{nj}$$

Σχόλια

Προφανώς, επειδή ο ϵ_{ij} είναι ο ταυτοτικός πίνακας, οι τιμές των συντεταγμένων του ανταλλοίωτου και του συναλλοίωτου διανύσματος συμπίπτουν και επομένως ίσως να αναρωτηθεί κανείς τον λόγο ύπαρξης αυτών των περίεργων ορισμών. Η ανάγκη τους προκύπτει φυσιολογικά σε γενικευμένα συστήματα συντεταγμένων, στα οποία ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα και το συζυγές συναλλοίωτο διάνυσμα έχουν και διαφορετικές τιμές συνιστωσών και κυρίως *διαφορετικό νόμο μετασχηματισμού*. Σε αυτό το στάδιο ας θεωρήσουμε ότι τα παραπάνω είναι αποτέλεσμα μιας ιδιοτροπίας με στόχο τη σωστή διαχείριση της θέσης των δεικτών. Ο πίνακας $R_i^{\ j}$ προκύπτει από τον πίνακα $R^i_{\ j}$ με την παραπάνω διαδικασία.

Υιοθετώντας τις παραπάνω συμφωνίες το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων μπορεί να γραφεί ως:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \epsilon_{ij} u^i v^j = u^i v_i = u_i v^i \tag{1.2.7}$$

Το τετράγωνο του μέτρου ενός διανύσματος γράφεται ως:

$$|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \epsilon_{ij} u^i u^j = u^i u_i \tag{1.2.8}$$

Η βασική ιδιότητα RR^T=I του πίνακα στροφής μπορεί να γραφεί ως:

$$RIR^{\mathrm{T}} = \mathrm{I} \Rightarrow (RIR^T)_{ij} = \varepsilon_{ij} \Rightarrow \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} R_{im}\varepsilon^{mn}R^T_{nj} = \varepsilon_{ij} \Rightarrow$$

$$\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} R_{im}\varepsilon^{mn}R_{jn} = \varepsilon_{ij} \Rightarrow$$

$$\boxed{R^i{}_m \varepsilon^{mn} R^j{}_n = \varepsilon^{ij}} \tag{1.2.9}$$

Ομοίως η σχέση $R^T R$=I γίνεται:

$$R^T IR = \mathrm{I} \Rightarrow (R^T IR)_{ij} = \varepsilon_{ij} \Rightarrow \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} R^T_{im}\varepsilon^{mn}R_{nj} = \varepsilon_{ij} \Rightarrow$$

$$\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} R_{mi}\varepsilon^{mn}R_{nj} = \varepsilon_{ij} \Rightarrow$$

$$\boxed{R^m{}_i \varepsilon_{mn} R^n{}_j = \varepsilon_{ij}} \tag{1.2.10}$$

Θεωρούμε τώρα τον μετασχηματισμό $x' = Rx + b$ με R πίνακα στροφής.

Ο μετασχηματισμός αυτός αντιστοιχεί προφανώς σε στροφή και μετάθεση του

συστήματος συντεταγμένων και εν γένει δεν διατηρεί ούτε το εσωτερικό γινόμενο ούτε το μέτρο ενός διανύσματος. *Διατηρεί όμως την απόσταση δύο σημείων.* Η ιδιότητα αυτή φαίνεται ως εξής:
Έστω M_1 και M_2 δύο σημεία του χώρου
Τα διανύσματα θέσης των δύο σημείων ως προς τα δύο συστήματα συντεταγμένων έχουν πίνακες συντεταγμένων $x_{(1)}$, $x_{(2)}$, $x'_{(1)}$, $x'_{(2)}$ (ο δείκτης μέσα στην παρένθεση απαριθμεί σημεία και όχι συντεταγμένες).
Το διάνυσμα που συνδέει τα δύο σημεία έχει πίνακα συντεταγμένων $\Delta x = x_{(2)} - x_{(1)}$ στο ένα σύστημα συντεταγμένων και $\Delta x' = x'_{(2)} - x'_{(1)}$ στο άλλο.
Από τον μετασχηματισμό έχουμε: $x'_{(1)} = R\, x_{(1)} + b$ και $x'_{(2)} = R\, x_{(2)} + b$.
Αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει ότι: $\Delta x' = R\, \Delta x$.
Από τα εκτεθέντα παραπάνω έχουμε ότι

$$\boxed{|\Delta\vec{x}|^2 = \epsilon_{ij}\Delta x^i \Delta x^j = |\Delta\vec{x}\,'|^2} \tag{1.2.11}$$

Αν τα σημεία είναι απειροστά κοντά τότε το τετράγωνο της απειροστής απόστασής τους γράφεται:

$$\boxed{dl^2 = \epsilon_{ij} dx^i dx^j = dl'^2} \tag{1.2.12}$$

1.2.3 Ορθογώνιοι πίνακες

Ένας 3x3 πίνακας R καλείται **ορθογώνιος** όταν ικανοποιεί την σχέση

$$\boxed{R^T R = R R^T = I} \tag{1.2.13}$$

Ιδιότητες

1. Το σύνολο των ορθογωνίων πινάκων αποτελεί ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

2. Επειδή το πρώτο μέλος της σχέσης (1.2.13) είναι ένας συμμετρικός 3x3 πίνακας, η σχέση αυτή επιβάλλει 6 περιορισμούς στα 9 στοιχεία του πίνακα R αφήνοντας τα υπόλοιπα 3 απροσδιόριστα. Επομένως ένας ορθογώνιος πίνακας μπορεί να περιέχει εν γένει 3 ελεύθερες παραμέτρους.

3. Παίρνοντας ορίζουσες και των δύο μελών της (1.2.13) και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $|R| = |R^T|$ καταλήγουμε στην σχέση $|R|^2 = 1 \Rightarrow |R| = \pm 1$.

4. Το υποσύνολο των ορθογωνίων πινάκων με ορίζουσα +1 περιέχει τις πραγματικές στροφές (κινήσεις) του συστήματος συντεταγμένων και αποτελεί υποομάδα του συνόλου των ορθογωνίων πινάκων, ενώ το υποσύνολο με

ορίζουσα –1 περιέχει τις κατοπτρικές συμμετρίες ή συνδυασμούς στροφών και κατοπτρικών συμμετριών και δεν αποτελεί υποομάδα (δεν περιέχει το μοναδιαίο πίνακα) . Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό x΄=y και y΄=x (αλλαγή στα ονόματα των αξόνων). Ο μετασχηματισμός αυτός περιγράφεται από τον πίνακα $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, ο οποίος είναι ορθογώνιος με |R|=-1. Το σύστημα συντεταγμένων που ορίζει δεν μπορεί να προκύψει με κίνηση του αρχικού.

1.3 Παραμετρική μορφή καμπύλης Επαναπαραμετροποίηση καμπύλης.

1.3.1 Παραμετρική μορφή καμπύλης

Ας θεωρήσουμε μια γραμμή στο επίπεδο. Ένας συνήθης τρόπος για να περιγράψουμε την γραμμή με συντεταγμένες είναι μια συνάρτηση f(x). Η γραμμή είναι το σύνολο των σημείων M(x,y) του επιπέδου με y=f(x).
Ένας «πρωτόγονος» τρόπος για να σχεδιάσουμε την γραμμή σε ένα χιλιοστομετρικό χαρτί είναι να βάλουμε αυθαίρετες τιμές στο x να βρούμε από τον τύπο της συνάρτησης τις αντίστοιχες τιμές του y, να σημειώσουμε στο επίπεδο τα σημεία (x,y) και να χαράξουμε την γραμμή.
Αναφέρουμε ενδεικτικά μερικά μειονεκτήματα αυτού του τρόπου έκφρασης της εξίσωσης μιας γραμμής.

- Αν η γραμμή έχει ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο στον άξονα y δεν περιγράφεται με τον παραπάνω τρόπο.

- Μπορεί η γραμμή να μην περιγράφεται μόνο από μια συνάρτηση, αλλά από δύο η περισσότερους κλάδους. Για παράδειγμα ο κύκλος με κέντρο την αρχή και ακτίνα R περιγράφεται από τους κλάδους
  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ και $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$

- Στα σημεία που η γραμμή έχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα y η αντίστοιχη συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη. Πχ η εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου στο σημείο (R,0).

Ένας εναλλακτικός τρόπος να εκφράσουμε την εξίσωση μιας γραμμής είναι η λεγόμενη **παραμετρική μορφή**. Οι δύο συντεταγμένες x και y δίνονται συναρτήσει μιας παραμέτρου λ: δηλαδή, έχουμε δύο συναρτήσεις $f^1(\lambda)$ και $f^2(\lambda)$ και η γραμμή είναι το σύνολο των σημείων M(x,y) του επιπέδου με $x = f^1(\lambda)$ και $y = f^2(\lambda)$. Προφανώς αν θέλουμε να σχεδιάσουμε την γραμμή πρέπει να βάλουμε αυθαίρετες τιμές στο λ, να βρούμε από τους τύπους των συντεταγμένων της γραμμής τις αντίστοιχες τιμές των x και y, να σημειώσουμε στο επίπεδο τα σημεία (x,y) και να χαράξουμε την γραμμή. Αν τέλος θέλουμε να γράψουμε την εξίσωση της γραμμής στην μορφή y=f(x) θα πρέπει να κάνουμε απαλοιφή της παραμέτρου λ.

Παραδείγματα

1) Η γραμμή με εξισώσεις συντεταγμένων $x = \lambda^2$ και $y = 7\lambda^2$ είναι η ημιευθεία με εξίσωση $y = 7x$, για $x, y \geq 0$.

2) Η γραμμή με εξισώσεις συντεταγμένων $x = \rho cos\lambda$ και $y = \rho sin\lambda$ είναι ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$.

3) Η ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y και διέρχεται από το σημείο (3,0) έχει παραμετρική εξίσωση την x=3 , y=λ.

4) Αν έχουμε μια καμπύλη στην μορφή y=f(x) μπορούμε να θεωρήσουμε το x σαν παράμετρο λ και να γράψουμε την εξίσωση της καμπύλης σε παραμετρική μορφή (x=λ , y=f(λ)).

Αν μια γραμμή δίνεται σε παραμετρική μορφή x=x(λ) και y=y(λ) τότε το **διάνυσμα θέσης των σημείων της καμπύλης** είναι το

$$\vec{r}(\lambda) = x(\lambda)\vec{i} + y(\lambda)\vec{j}$$

Η ταχύτητα v της καμπύλης ορίζεται να είναι το διάνυσμα

$$\vec{v}(\lambda) = \frac{d\vec{r}(\lambda)}{d\lambda} = x'(\lambda)\vec{i} + y'(\lambda)\vec{j}$$

Η επιτάχυνση a της καμπύλης ορίζεται να είναι το διάνυσμα

$$\vec{\mathrm{a}}(\lambda) = \frac{d\vec{v}(\lambda)}{d\lambda} = x''(\lambda)\vec{i} + y''(\lambda)\vec{j}$$

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τον κύκλο με διάνυσμα θέσης

$$\vec{r}(\lambda) = R(\cos(\lambda)\vec{i} + \sin(\lambda)\vec{j})$$

Η ταχύτητα της καμπύλης είναι το διάνυσμα

$$\vec{v}(\lambda) = R(-\sin(\lambda)\vec{i} + \cos(\lambda)\vec{j})$$

Με λ=0 (σημείο (R,0)) είναι $\vec{v} = R\vec{j}$, που είναι παράλληλη στον άξονα y.

1.3.2 Επαναπαραμετροποίηση καμπύλης

Η εξίσωση μιας γραμμής σε παραμετρική μορφή δεν είναι μοναδική. Για παράδειγμα οι παραμετρικές εξισώσεις ($x = 3\lambda$, $y = 21\lambda$) και ($x = 3sin\lambda$, $y = 21sin\lambda$) απεικονίζονται στην ίδια γραμμή (την ευθεία $y = 7x$).

Επομένως για την έκφραση μιας γραμμής σε παραμετρική μορφή υπάρχει *ελευθερία επιλογής παραμέτρου*. Για να αλλάξουμε παράμετρο, θεωρούμε την παράμετρο λ σαν συνάρτηση μιας άλλης παραμέτρου μ και εκφράζουμε τα x και y συναρτήσει του μ.

Παράδειγμα
Θεωρούμε την γραμμή με παραμετρική εξίσωση x=λ και $y = \sqrt{\lambda}$ με λ>0.
Θέτουμε $\lambda=\mu^2$. Επομένως $x=\mu^2$ και y=μ με μ>0.

Μια παράμετρος με ιδιαίτερη σημασία στην θεωρία των καμπυλών είναι **το μήκος s της καμπύλης**. Η επαναπαραμετροποίηση συναρτήσει του μήκους s της καμπύλης μπορεί να γίνει ως εξής:
Έστω η καμπύλη με εξίσωση

$$\vec{r}(\lambda) = x(\lambda)\vec{i} + y(\lambda)\vec{j}$$

Θεωρούμε δύο σημεία της καμπύλης απειροστά κοντά: Η απόσταση των δύο σημείων είναι

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, d\lambda$$

Η παραπάνω σχέση είναι μια διαφορική εξίσωση μέσω της οποίας μπορούμε να εκφράσουμε το λ συναρτήσει του s.

Παράδειγμα
Θεωρούμε τον κύκλο με παραμετρική εξίσωση $\vec{r} = R\left(\cos(\lambda)\vec{i} + \sin(\lambda)\vec{j}\right)$
Προφανώς ισχύει ότι dx=-Rsinλ dλ και dy=Rcosλ dλ.
Ενεργώντας όπως παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:
$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = Rd\lambda \Rightarrow$ s=λR+c
Για να «βγάλουμε το dλ εκτός ρίζας» υποθέσαμε ότι μετράμε το μήκος κατά την κατεύθυνση αύξησης του λ (δηλαδή αν dλ>0 τότε και ds>0)
Θεωρούμε σαν αρχή μετρήσεως των μηκών, το σημείο (R,0) . Επομένως με λ=0 είναι και s=0. Συμεπώς c=0.
Λύνοντας ως προς λ και αντικαθιστώντας στην παραμετρική εξίσωση της καμπύλης προκύπτει ότι: $\vec{r} = R(\cos\frac{s}{R}\vec{i} + \sin\frac{s}{R}\vec{j})$

Σχόλια

Σ_1) Αν θεωρήσουμε σαν παράμετρο της καμπύλης το μήκος της τότε η παραμετρική εξίσωσή της είναι μοναδική (με μοναδική ελευθερία την επιλογή της αρχής μετρήσεως των μηκών και την κατεύθυνση κίνησης κατά μήκος της καμπύλης).

Σ_2) Αν χρησιμοποιήσουμε σαν παράμετρο το μήκος της καμπύλης τότε η ταχύτητα της καμπύλης είναι μοναδιαίο διάνυσμα. Αυτό μπορεί να φανεί ως εξής: Έστω

$$\vec{r} = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j}$$

το διάνυσμα θέσης των σημείων της καμπύλης.
Η ταχύτητα της καμπύλης είναι

$$\vec{v}(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} = x'(s)\vec{i} + y'(s)\vec{j}$$

με μέτρο

$$|\vec{v}|^2 = x'^2(s) + y'^2(s) = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(ds)^2} = 1$$

1.4 Συναρτησοειδή –Συναρτησοειδές του Dirac

1.4.1 Τα μαθηματικά

Ας θεωρήσουμε μια πραγματική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Όπως γνωρίζουμε η συνάρτηση αυτή απεικονίζει σε κάθε πραγματικό αριθμό x, ένα άλλο πραγματικό αριθμό f(x). Οι πραγματικές συναρτήσεις δεν είναι οι μόνες απεικονίσεις που χρησιμοποιούμε στα μαθηματικά και στην Φυσική. Όταν μετράμε τα βιβλία σε μια βιβλιοθήκη στην πραγματικότητα χρησιμοποιούμε μια απεικόνιση που σε κάθε βιβλίο αντιστοιχεί έναν φυσικό αριθμό. Η ένταση ενός ηλεκτρικού πεδίου είναι μια απεικόνιση που σε κάθε σημείο του χώρου (διάνυσμα θέσης) απεικονίζει ένα άλλο διάνυσμα (διάνυσμα της έντασης). Υπάρχουν απεικονίσεις που σε κάθε συνάρτηση απεικονίζουν έναν αριθμό. Τέτοιες απεικονίσεις ονομάζονται **συναρτησοειδή**. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων στο [0,1], το οποίο συμβολίζουμε με C[0,1].
Ορίζουμε ένα συναρτησοειδές $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$ μέσω της σχέσης:

$$T(f) = -\int_0^1 f(x)\,dx$$

Μέσω της παραπάνω σχέσης αντιστοιχούμε σε κάθε συνεχή συνάρτηση έναν αριθμό.
Θεωρούμε για παράδειγμα την συνάρτηση f με $f(x) = x^2$. Τότε

$$T(f) = -\int_0^1 f(x)\,dx = -\int_0^1 x^2\,dx = -\frac{1}{3}$$

Θεωρούμε τώρα το σύνολο $\Im$ των συναρτήσεων f που είναι παραγωγίσιμες στο [0,1] με f(1)=0.
Ορίζουμε ένα δεύτερο συναρτησοειδές $S : \Im \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$S(f) = \int_0^1 x f'(x)\,dx$$

Για την συνάρτηση $\varphi \in \Im$ με φ(x)=x^2 -1 ισχύει ότι:

$$S(\varphi) = \int_0^1 x\varphi'(x)\,dx = \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

και

$$T(\varphi) = -\int_0^1 \varphi(x)\,dx = -\int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 dx = \frac{2}{3}$$

Διαπιστώνουμε ότι T(φ)=S(φ)

Θεωρούμε τώρα μια τυχαία συνάρτηση $g \in \Im$. Θα δείξουμε ότι T(g)=S(g). Πράγματι ισχύει οτι:

$$S(g) = \int_0^1 xg'(x)\,dx = [xg(x)]_0^1 - \int_0^1 g(x)\,dx = g(1) - \int_0^1 g(x)\,dx = 0 - \int_0^1 g(x)\,dx = T(g)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι T(g)=S(g) για κάθε $g \in \Im$. Επομένως T=S στο $\Im$.

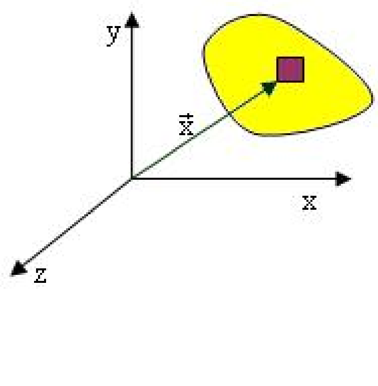
Διατυπώνουμε λοιπόν τον εξής ορισμό:

Δύο συναρτησοειδή λέγονται ίσα αν η τιμή τους για κάθε συνάρτηση του προκαθορισμένου συνόλου συναρτήσεων είναι η ίδια.

Στο παράδειγμα που εξετάσαμε ο περιορισμός του T και του S στο $\Im$ είναι ίσα συναρτησοειδή.

1.4.2 Το φυσικό πρόβλημα

Θεωρούμε μια τυχαία κατανομή ηλεκτρικού φορτίου στο χώρο με συνολικό φορτίο Q. Σε κάθε σημείο M του χώρου με διάνυσμα θέσης $\vec{x}$ μπορούμε να ορίσουμε την πυκνότητα φορτίου



$$\rho(\vec{x}) = \frac{dq}{dV} \qquad (1.4.1)$$

όπου dq το φορτίο που περιέχεται σε ένα στοιχειώδες ορθογώνιο παραλληλόγραμμο όγκου dV με κέντρο το σημείο M.

Από την σχέση (1.4.1) προκύπτει ότι $dq = \rho(\vec{x})dV$

Το συνολικό φορτίο Q μπορούμε να το βρούμε «αθροίζοντας» τα στοιχειώδη φορτία. Επομένως

$$Q = \int dq = \int \rho(\vec{x})\, dV = \iiint \rho(\vec{x})\, dxdydz \tag{1.4.2}$$

Θεωρούμε τώρα ένα ακίνητο σημειακό φορτίο q στην αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων. Πόση είναι η πυκνότητα φορτίου $\rho(\vec{x})$; Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό ας βρούμε τις ιδιότητες που πρέπει να έχει:
I_1) Για $\vec{x} \neq 0$ πρέπει $\rho(\vec{x}) = 0$ (δεν υπάρχει φορτίο παρά μόνο στη θέση $\vec{x} = 0$)
I_2) $q = \int \rho(\vec{x})\, dV$
Θέτουμε $\rho(\vec{x}) = q\delta(\vec{x})$ και οι παραπάνω σχέσεις είναι ισοδύναμες με

$$\delta(\vec{x}) = 0 \text{ για } \vec{x} \neq 0 \text{ και } \int \delta(\vec{x})\, dV = 1$$

Όπως εύκολα καταλαβαίνει κανείς συνάρτηση (με την συνήθη έννοια του όρου) που να ικανοποιεί τις δύο παραπάνω απαιτήσεις δεν υπάρχει.

1.4.3 Η μαθηματική επίλυση του προβλήματος

Η παράσταση $\delta(\vec{x})$ μπορεί να ορισθεί αυστηρά χρησιμοποιώντας την έννοια του συναρτησοειδούς (για την ακρίβεια είναι συναρτησοειδές). Στην μια διάσταση μπορούμε να ορίσουμε το συναρτησοειδές $\mathfrak{M} : C[0,1] \to \mathbb{R}$ με $\mathfrak{M}(f) = f(0)$. Την τιμή του συναρτησοειδούς για μια συνάρτηση f την συμβολίζουμε (όχι τυχαία) με $\int \delta(x)\, dx$. Επομένως, εξ ορισμού ισχύει ότι:

$$\mathfrak{M}(f) = \int f(x)\delta(x)\, dx = f(0)$$

Σχόλια

1. Ο συμβολισμός της τιμής $\mathfrak{M}(f)$ του συναρτησοειδούς $\mathfrak{M}$ για μια συνάρτηση f με ολοκλήρωμα δεν είναι τυχαίος: Το συναρτησοειδές αυτό έχει αρκετές ιδιότητες που θυμίζουν ολοκλήρωμα (θυμηθείτε το σύμβολο του Leibnitz για την παράγωγο, η οποία ενώ δεν είναι πηλίκο έχει ιδιότητες που της επιτρέπουν να συμπεριφέρεται σαν πηλίκο)

2. Το ολοκλήρωμα στον παραπάνω συμβολισμό επεκτείνεται σε όλο το R (από $-\infty$ έως $+\infty$)

3. Κατά την απόδειξη ιδιοτήτων του συναρτησοειδούς $\mathfrak{M}$ χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες του ολοκληρωτικού λογισμού σαν να υπήρχε πραγματικά η συνάρτηση δ(x).

Θεώρημα 1.4.3.1 *Για την "συνάρτηση" δ μπορούμε να αποδείξουμε τις επόμενες ιδιότητες:*
1) $\int f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0)$
2) $\int \delta(x-x_0) = 1$
3) $\delta(x-y) = \delta(y-x)$

Απόδειξη
1) Θέτουμε $z = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + z \Rightarrow dx = dz$ και $\phi(z) = f(x_0 + z)$.
Έχουμε διαδοχικά:

$$\int f(x)\delta(x-x_0)dx = \int f(x_0+z)\delta(z)dz = \int \phi(z)\delta(z)dz = \phi(0) = f(x_0)$$

2) Θεωρώντας την συνάρτηση f με f(x)=1 η ιδιότητα 1) μετατρέπεται στην 2)
3) Θεωρούμε μια τυχαία συνεχή συνάρτηση f. Θα αποδείξουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-y)f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y-x)f(x)dx$$

Για το πρώτο μέλος από την ιδιότητα (1) συμπεραίνουμε ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-y)f(x)dx = f(y)$$

Για τον υπολογισμό του δεύτερου μέλους κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής:
$z = y - x \Rightarrow dz = -dx$
Επομένως:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y-x)f(x)dx = -\int_{+\infty}^{-\infty} \delta(z)f(y-z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z)f(y-z)dz = f(y-0) = f(y)$$

Ομοίως μπορούμε να ορίσουμε το συναρτησοειδές του Dirac σε δύο διαστάσεις: Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση (πραγματική συνάρτηση δυο πραγματικών μεταβλητών)
Ισχύει ότι $\iint f(x^1,x^2)\delta(x^1,x^2)dx^1dx^2 = f(0,0)$
σε πιο συμπαγή μορφή, θέτουμε:
$\vec{x} = (x^1,x^2)$, $f(x^1,x^2) = f(\vec{x})$, $\delta(x^1,x^2) = \delta^2(\vec{x})$ και $dx^1dx^2 = d^2x$
και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\int f(\vec{x})\delta^2(\vec{x})d^2x = f(\vec{0})$$

Θεώρημα 1.4.3.2 *Για το συναρτησοειδές $\delta^2(\vec{x})$ μπορούμε να αποδείξουμε τις εξής ιδιότητες*
1) $\int f(\vec{x})\delta^2(\vec{x}-\vec{x_0})d^2x = f(\vec{x_0})$
2) $\delta^2(\vec{x}) = \delta(x^1)\delta(x^2)$
3) $\delta^2(\vec{x}-\vec{x_0}) = \delta(x^1-x_0^1)\delta(x^2-x_0^2)$
4) $\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) = \delta^2(\vec{y}-\vec{x})$

Απόδειξη
1) Θέτουμε $\vec{y} = \vec{x} - \vec{x_0}$ ($y^1 = x^1 - x_0^1$ και $y^2 = x^2 - x_0^2$)
Επομένως $d^2y = dy^1dy^2 = dx^1dx^2 = d^2x$
Το πρώτο μέλος της αποδεικτέας γίνεται:

$$\int f(\vec{x})\delta^2(\vec{x}-\vec{x_0})d^2x = \int f(\vec{y}+\vec{x_0})\delta^2(\vec{y})d^2y = f(\vec{x_0})$$

2) Θεωρούμε μια τυχαία συνάρτηση f. Η τιμή του συναρτησοειδούς του πρώτου μέλους για την συνάρτηση f είναι:

$$\int f(\vec{x})\delta^2(\vec{x})d^2x = f(\vec{0})$$

Ομοίως για το συναρτησοειδές του δεύτερου μέλους ισχύει ότι:

$$\int f(\vec{x})\delta(x^1)\delta(x^2)d^2x = \iint f(x^1,x^2)\delta(x^1)\delta(x^2)dx^1dx^2 =$$
$$\int \delta(x^1)\left[\int f(x^1,x^2)\delta(x^2)dx^2\right]dx^1$$

Το ολοκλήρωμα μέσα στην παρένθεση ισούται με $f(x^1,0)$. Επομένως ισχύει ότι:

$$\int f(\vec{x})\delta(x^1)\delta(x^2)d^2x = \int \delta(x^1)f(x^1,0)dx^1 = f(0,0) = f(\vec{0})$$

Αφού η τιμές των δύο συναρτησοειδών σε τυχαία συνάρτηση είναι ίσες και τα συναρτησοειδή είναι ίσα.
3) Αποδεικνύεται όπως η 2)
4) Αποδεικνύεται όπως και στην μία διάσταση

Σχόλιο

Οι παραπάνω ορισμοί μπορούν να επεκταθούν και σε περισσότερες από δύο διαστάσεις Ενδεικτικά αναφέρουμε ορισμούς και ιδιότητες στις 3 και 4 διαστάσεις. Στις 3 διαστάσεις ορίζεται η $\delta^3(\vec{x})$, η οποία σε τυχαία συνάρτηση 3 μεταβλητών f , δρα ως εξής:

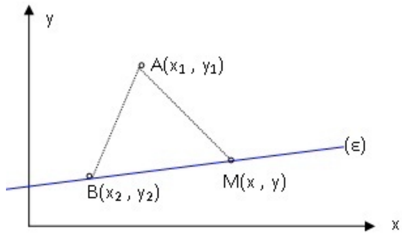
$$\int f(\vec{x})\delta^3(\vec{x})d^3x = f(\vec{0})$$

Ομοίως μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\delta^3(\vec{x}-\vec{x_0}) = \delta(x^1 - x_0^1)\delta(x^2 - x_0^2)\delta(x^3 - x_0^3)$$

Άσκηση

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Έστω δε τυχαία ευθεία (ε) του επιπέδου, σημείο $A(x_1, y_1)$ που δεν ανήκει στην ευθεία, $B(x_2, y_2)$ σημείο της ευθείας και M(x,y) «κινητό» σημείο της ευθείας..



Να αποδειχθεί η σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\overrightarrow{AM})\delta(x-x_2)dx = f(\overrightarrow{AB})$$

Απόδειξη

Έστω y=ax+b η εξίσωση της ευθείας. Ισχύει ότι
$f(\overrightarrow{AM}) = f(x-x_1, y-y_1) = f(x-x_1, ax+b-y_1)$ και
$f(\overrightarrow{AB}) = f(x_2-x_1, y_2-y_1) = f(x_2-x_1, ax_2+b-y_1)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\overrightarrow{AM})\delta(x-x_2)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-x_1, ax+b-y_1)\delta(x-x_2)dx =$$
$$f(x_2-x_1, ax_2+b-y_1) = f(\overrightarrow{AB})$$

1.4.4 Παραδείγματα από τη φυσική

1. Θεωρούμε ένα υλικό σημείο ηλεκτρικού φορτίου q ακίνητο ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων στην θέση $\vec{x}_0$. Η πυκνότητα φορτίου στο χώρο είναι $\rho(\vec{x}) = q\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_0)$

2. Θεωρούμε ένα υλικό σημείο ηλεκτρικού φορτίου q που κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}$ και την στιγμή t=0 διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Το διάνυσμα θέσης του $\vec{x}_q$ σε κάθε χρονική στιγμή δίνεται από την σχέση $\vec{x}_q = \vec{v}t$. Στην περίπτωση αυτή, η πυκνότητα φορτίου σε κάθε σημείο του χώρου εξαρτάται και από τη θέση του σημείου και από την χρονική στιγμή. Είναι δηλαδή χωροχρονική συνάρτηση $\rho(t, \vec{x})$. Η σχέση που την προσδιορίζει είναι προφανώς η εξής:
$\rho(t, \vec{x}) = q\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_q) = q\delta^3(\vec{x}-\vec{v}t)$

3. Η πυκνότητα ρεύματος που αντιστοιχεί στην κίνηση του φορτίου είναι:
$\vec{J}(t, \vec{x}) = q\vec{v}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_q) = q\vec{v}\delta^3(\vec{x}-\vec{v}t)$

Κεφάλαιο 2

ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΓΑΛΙΛΑΙΟΥ

2.1 Αδρανειακά Συστήματα αναφοράς

Τα διάφορα γεγονότα συμβαίνουν στο χώρο και στο χρόνο. Για να προσδιορίσουμε την θέση ενός γεγονότος στο χώρο χρειαζόμαστε (συνήθως) ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Για να προσδιορίσουμε την θέση του στο χρόνο χρειαζόμαστε ένα χρονόμετρο.

Με την έννοια **χωροχρονικό σύστημα αναφοράς** εννοούμε ένα χωρικό σύστημα συντεταγμένων εφοδιασμένο με πανομοιότυπα συγχρονισμένα χρονόμετρα. Η χωροχρονική θέση ενός γεγονότος καθορίζεται από την τετράδα (πίνακας στήλη)

$$X = (x^\mu) = (t, x^i) = \begin{bmatrix} t \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ \vec{x} \end{bmatrix} \tag{2.1.1}$$

Στα επόμενα θεωρούμε ότι οι ελληνικοί δείκτες είναι χωροχρονικοί δείκτες και παίρνουν τιμές από 0 έως 3 ενώ οι λατινικοί δείκτες είναι χωρικοί και παίρνουν τιμές από 1 έως 3. Σχετικά με τα συστήματα αναφοράς τίθεται το εξής ερώτημα:

Είναι όλα τα συστήματα αναφοράς κατάλληλα για την περιγραφή των νόμων της φυσικής;

Όπως γνωρίζουμε, η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα είναι αρνητική. Τα συστήματα αναφοράς που είναι κατάλληλα για την περιγραφή των νόμων της Φυσικής ονομάζονται αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Συγκεκριμένα έχουμε τον εξής ορισμό:

Αδρανειακό (ΑΣΑ) λέγεται ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο ισχύει ο πρώτος νόμος του Newton, δηλαδή είναι ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο το ελεύθερο σωμάτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.
Ο πρώτος νόμος του Newton είναι ο νόμος εκείνος, ο οποίος αξιώνει την ύπαρξη τέτοιων συστημάτων.

Τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς έχουν τις εξής ιδιότητες:

- Ένα σύστημα αναφοράς το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι επίσης αδρανειακό σύστημα αναφοράς

- Ένα σύστημα αναφοράς το οποίο εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς δεν είναι αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

2.2 Μετασχηματισμός Γαλιλαίου

Θεωρούμε δύο ορθοκανονικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς $Ox^1x^2x^3$ και $O'x'^1x'^2x'^3$. Υποθέτουμε ότι η μονάδα μέτρησης του μήκους καθώς και η μονάδα μέτρησης του χρόνου είναι ίδια και στα δύο συστήματα συντεταγμένων.

Θεωρούμε ένα συγκεκριμένο χωροχρονικό σημείο και αναζητούμε την σχέση που έχουν οι συντεταγμένες του σημείου αυτού στο ένα σύστημα συντεταγμένων με τις συντεταγμένες του στο άλλο.
Για να επιλύσουμε το παραπάνω πρόβλημα θεωρούμε τις εξής ειδικές περιπτώσεις όσον αφορά την σχετική θέση και κίνηση των δύο ΑΣΑ.

2.2.1 Χρονικές μεταθέσεις

Τα δύο ΑΣΑ είναι ακίνητα το ένα σε σχέση με το άλλο και οι άξονες τους ταυτίζονται. Επομένως $x'^i = x^i$ i=1,2,3. Υποθέτουμε επίσης, ότι την στιγμή που το ρολόι του Ο΄δείχνει t΄=0 το ρολόι του Ο δείχνει t=τ. Επομένως όταν το ρολόι του Ο δείχνει t το ρολόι του Ο΄ θα δείχνει t΄=t-τ. Ο παραπάνω μετασχηματισμός γράφεται σε μορφή πινάκων:

$$X' = X - \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.2.2 Χωρικές μεταθέσεις

Τα δύο ΑΣΑ είναι ακίνητα το ένα σε σχέση με το άλλο και οι άξονες τους είναι παράλληλοι. Υποθέτουμε επίσης ότι τα ρολόγια τους είναι συγχρονισμένα έτσι ώστε όταν τα ρολόγια του πρώτου δείχνουν μηδέν το ίδιο να δείχνουν και τα ρολόγια του δεύτερου. Και επειδή έχουν την ίδια μονάδα μέτρησης t΄=t.
Έστω ότι οι συντεταγμένες της αρχής O΄ ως προς το O είναι (b^1, b^2, b^3) .
Στην περίπτωση αυτή σύμφωνα με όσα εκτέθηκαν στην παράγραφο 1.2.1 ισχύει ότι:

$$X' = X - \begin{bmatrix} 0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix}$$

Συνοψίζοντας τις δύο παραπάνω περιπτώσεις, για τις **χωροχρονικές μεταθέσεις** συμπεραίνουμε ότι:

$$X' = X - b$$

με

$$b = \begin{bmatrix} \tau \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix}$$

και με συμβολισμό δεικτών

$$x'^{\mu} = x^{\mu} - b^{\mu}, \quad \mu=0,1,2,3$$

2.2.3 Χωρικές στροφές

Τα δύο ΑΣΑ είναι ακίνητα το ένα σε σχέση με το άλλο, έχουν κοινή αρχή, συγχρονισμένα ρολόγια (t = t΄) και οι άξονες τους έχουν τυχαίο προσανατολισμό. Θεωρούμε ένα σημείο M του χώρου με συντεταγμένες (x^1, x^2, x^3) ως προς το ένα ΑΣΑ και συντεταγμένες και (x'^1, x'^2, x'^3) ως προς το άλλο. Ο χωροχρονικός μετασχηματισμός συντεταγμένων μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$x'^{\mu} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}, \ \mu=0,1,2,3 \tag{2.2.1}$$

Για να βρούμε τις τιμές των στοιχείων του πίνακα Γ έχουμε να παρατηρήσουμε τα εξής:
Η (2.2.1) για μ=0 γίνεται:

$$x'^0 = \Gamma^0{}_{\nu}\, x^{\nu} = \Gamma^0{}_0\, x^0 + \Gamma^0{}_1\, x^1 + \Gamma^0{}_2\, x^2 + \Gamma^0{}_3\, x^3$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $t' = t \Rightarrow x'^0 = x^0$. Επομένως $\Gamma^0{}_0 = 1$ και $\Gamma^0{}_i = 0$.
Όταν το μ πάρει την τιμή ενός χωρικού δείκτη (μ=i) η (2.2.1) γίνεται:

$$x'^i = \Gamma^i{}_\nu\, x^\nu = \Gamma^i{}_0\, x^0 + \Gamma^i{}_1\, x^1 + \Gamma^i{}_2\, x^2 + \Gamma^i{}_3\, x^3 = \Gamma^i{}_0\, t + \Gamma^i{}_j\, x^j$$

Όμως από τα εκτεθέντα στην §1.2.2 για τις στροφές ισχύει ότι: $x'^i = R^i{}_j x^j$
Συγκρίνοντας τις παραπάνω προκύπτει ότι: $\Gamma^i{}_0 = 0$ και $\Gamma^i{}_j = R^i{}_j$
Τελικά ο 4x4 πίνακας Γ έχει την μορφή $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$ με R κάποιο πίνακα στροφής.

2.2.4 Προωθήσεις Γαλιλαίου

Θεωρούμε δύο ΑΣΑ με παράλληλους άξονες και συγχρονισμένα ρολόγια. Υποθέτουμε επίσης ότι την στιγμή t=t′=0 οι αρχές τους συμπίπτουν. Έστω $\vec{u}$ η ταχύτητα του Ο′ ως προς Ο. Επειδή η αρχή Ο′ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, οι συντεταγμένες της ως προς Ο την στιγμή t θα είναι (u^1t, u^2t, u^3t)=(u^1x^0, u^2x^0, u^3x^0). Επομένως στην περίπτωση αυτή οι μετασχηματισμοί Γαλιλαίου είναι:

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 \\ x'^1 &= x^1 - u^1 x^0 \\ x'^2 &= x^2 - u^2 x^0 \\ x'^3 &= x^1 - u^3 x^0 \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

ή σε μορφή πίνακα

$$\begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u^1 & 1 & 0 & 0 \\ -u^2 & 0 & 1 & 0 \\ -u^3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X' = \Gamma X$$

με $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u & I \end{bmatrix}$ πίνακα 4x4.

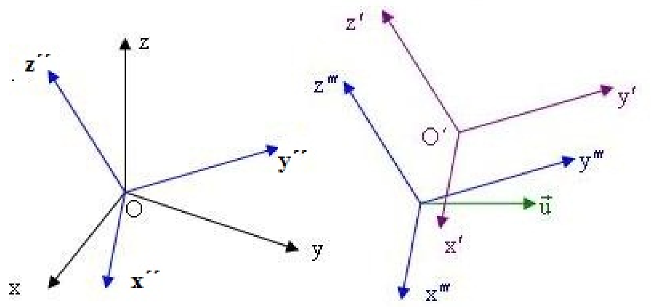
2.2.5 Γενικός μετασχηματισμός Γαλιλαίου

Θεωρούμε τώρα την γενική περίπτωση που τα ρολόγια των δύο ΑΣΑ δεν είναι συγχρονισμένα, οι άξονες τους δεν είναι παράλληλοι και το Ο′ κινείται ως προς το Ο με ταχύτητα $\vec{u}$.

Για να βρούμε την σχέση που έχουν οι χωροχρονικές συντεταγμένες στο Ο με τις χωροχρονικές συντεταγμένες στο Ο′ θεωρούμε τους εξής διαδοχικούς μετασχηματισμούς:

- Εκτελούμε μια στροφή R μέσω του μετασχηματισμού
  $X \to X'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} X$
- Προωθούμε κατά $\vec{u}$ μέσω του μετασχηματισμού
  $X'' \to X''' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u & I \end{bmatrix} X'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u & R \end{bmatrix} X$
- Εκτελούμε μια χωροχρονική μετάθεση κατά b.
  $X''' \to X' = X''' + b$

Ο γενικός μετασχηματισμός Γαλιλαίου είναι: $X' = \Gamma X + b$
με $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u & R \end{bmatrix}$ όπου ο b είναι ένας αυθαίρετος 4x1 πίνακας στήλη, ο u είναι ένας αυθαίρετος 3x1 πίνακας στήλη και ο R είναι ένας 3x3 πίνακας στροφής.



Σχόλια:

1. Για τα μοναδιαία διανύσματα στα δύο συστήματα συντεταγμένων ισχύουν οι σχέσεις (1.2.2) και (1.2.5).

2. Οι συνιστώσες u^1, u^2, u^3 του πίνακα - στήλη u, είναι οι συντεταγμένες της ταχύτητας $\vec{u}$ στο σύστημα συντεταγμένων $Ox''y''z''$. Λαμβάνοντας δε υπ' όψιν ότι $\vec{e}''_i = \vec{e}'_i$ προκύπτει ότι $\vec{u} = u^i \vec{e}'_i = u^i R_i{}^j \vec{e}_j$.

3. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένας μετασχηματισμός Γαλιλαίου είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος g=(Γ,b) με τους πίνακες Γ και b ως ανωτέρω.

4. Έστω O_1, O_2, O_3 τρία ΑΣΑ. Έστω δε g_1=(Γ_1 , b_1) και g_2=(Γ_2 , b_2) οι μετασχηματισμοί Γαλιλαίου από το O_1 στο O_2 και από το O_2 στο O_3 αντιστοίχως. Επομένως ισχύει ότι:
   $X_2 = \Gamma_1 X_1 + b_1$ (1)
   $X_3 = \Gamma_2 X_2 + b_2$ (2)

Αντικαθιστώντας την $1^η$ στην $2^η$ προκύπτει ότι: $X_3 = \Gamma_2\Gamma_1 X_1 + \Gamma_2 b_1 + b_2$
Μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο σύνθετος μετασχηματισμός είναι μετασχηματισμός Γαλιλαίου. Συγκεκριμένα ισχύει το εξής :

Θεώρημα 2.2.5.1 *Θεωρούμε το σύνολο $\mathfrak{C}$ των μετασχηματισμών Γαλιλαίου. Στο σύνολο αυτό ορίζουμε μια πράξη * ως έξής:*

Αν $g_1 = (\Gamma_1, b_1) \in \mathfrak{C}$ και $g_2 = (\Gamma_2, b_2) \in \mathfrak{C}$ θέτουμε $g_2 * g_1 = (\Gamma_2\Gamma_1, \Gamma_2 b_1 + b_2)$.
Τότε το σύνολο $\mathfrak{C}$ με την παραπάνω ορισθείσα πράξη αποτελεί ομάδα.
Απόδειξη

- Κλειστότητα
  Έστω $g_1 = (\Gamma_1, b_1) \in \mathfrak{C}$ και $g_2 = (\Gamma_2, b_2) \in \mathfrak{C}$.
  Θα αποδείξουμε ότι ο $g = g_2 * g_1 \in \mathfrak{C}$
  Θέτουμε $\Gamma = \Gamma_2\Gamma_1$ και $b = \Gamma_2 b_1 + b_2$
  Έστω ότι $\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u_1 & R_1 \end{bmatrix}$ και $\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u_2 & R_2 \end{bmatrix}$.
  Ισχύει ότι: $\Gamma_2\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u_2 & R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u_1 & R_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(R_2 u_1 + u_2) & R_2 R_1 \end{bmatrix}$.
  Θέτουμε $u = R_2 u_1 + u_2$ και $R = R_2 R_1$.
  Επειδή οι R_1, R_2 είναι πίνακες στροφής ισχύει ότι
  $R_1^T R_1 = I$ και $R_2^T R_2 = I$.
  Επομένως $RR^T = (R_2 R_1)^T (R_2 R_1) = R_1^T (R_2^T R_2) R_1 = R_1^T R_1 = I$
  Άρα $g \in \mathfrak{C}$.

- Προσεταιριστική ιδίοτητα
  Η απόδειξη της προσεταιριστικής ιδιότητας είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της πράξης

- Ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου
  Θεωρούμε το στοιχείο e=(I,0) με I τον μοναδιαίο 4x4 πίνακα και 0 τον μηδενικό 4x1. Αν $g = (\Gamma, b) \in \mathfrak{C}$ ισχύει ότι:
  $g * e = (\Gamma, b) * (I, 0) = (\Gamma I, \Gamma 0 + b) = (\Gamma, b) = g$ και
  $e * g = (I, 0) * (\Gamma, b) = (I\Gamma, b + 0) = (\Gamma, b) = g$

- Ύπαρξη αντιστρόφου.
  Έστω $g = (\Gamma, b) \in \mathfrak{C}$ με $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u & R \end{bmatrix}$ και R 3x3 πίνακα στροφής.
  Θέτουμε $R' = R^{-1}$, $u' = -R^{-1}u$, $\Gamma' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u' & R' \end{bmatrix}$ και b΄=-Γ΄ b.

Ισχύει ότι

$$\Gamma\Gamma' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u' & R' \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\Gamma\Gamma' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R^{-1}u & R^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = I$$

και

$$\Gamma'\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u' & R' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u & R \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\Gamma'\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R^{-1}u & R^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = I$$

Θέτουμε g΄=(Γ΄, b΄) και εύκολα επιβεβαιώνουμε ότι g*g΄=g΄*g=e.

2.3 Νόμος μετασχηματισμού των φυσικών μεγεθών

Θεωρούμε δύο ΑΣΑ που συνδέονται με ένα μετασχηματισμό Γαλιλαίου (Γ,b) όπου $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u & R \end{bmatrix}$.
Οι χωροχρονικές συντεταγμένες (ενός κινούμενου υλικού σημείου) στο ένα συνδέονται με τις συντεταγμένες του στο άλλο με τις σχέσεις

$$t' = t + b^0 \Rightarrow dt' = dt \Rightarrow \frac{d}{dt'} = \frac{d}{dt}$$
$$x'^i = R^i{}_j x^j - u^i t + b^i$$

Μετασχηματισμός της ταχύτητας
Παραγωγίζοντας τις συντεταγμένες ως προς το χρόνο βρίσκουμε τον νόμο μετασχηματισμού της ταχύτητας:

$$v'^i = R^i{}_j v^j - u^i \tag{2.3.1}$$

Σε διανυσματική μορφή η παραπάνω σχέση γίνεται:
$\vec{v}\,' = v'^i \vec{e}\,'_i = R^i{}_j v^j \vec{e}\,'_i - u^i \vec{e}\,'_i = v^j \vec{e}_j - u^i \vec{e}\,'_i \Rightarrow$

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{u}$$

Μετασχηματισμός της επιτάχυνσης
Παραγωγίζοντας τις συντεταγμένες της ταχύτητας βρίσκουμε τον νόμο μετασχηματισμού της επιτάχυνσης:

$$\mathrm{a}'^i = R^i{}_j \mathrm{a}^j \tag{2.3.2}$$

Σε διανυσματική μορφή ισχύει ότι: $\vec{\mathrm{a}}' = \mathrm{a}'^i \vec{e}'_i = \mathrm{a}^j \vec{e}_j = \vec{\mathrm{a}} \Rightarrow$

$$\vec{\mathrm{a}}' = \vec{\mathrm{a}}$$

Μετασχηματισμός της ορμής

Επειδή $\vec{p} = m\vec{v}$, ο νόμος μετασχηματισμού της ορμής είναι παρόμοιος με την νόμο μετασχηματισμού της ταχύτητας. Επομένως

$$p'^i = R^i{}_j p^j - m u^i \tag{2.3.3}$$

και σε διανυσματική μορφή

$$\vec{p}' = \vec{p} - m\vec{u}$$

2.4 Η εμβέλεια και τα όρια του Μετασχηματισμού του Γαλιλαίου

2.4.1 Η εμβέλεια

Τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς τα ορίσαμε (για λόγους οικονομίας στις βασικές αρχές) να είναι εκείνα τα συστήματα αναφοράς στα οποία ισχύει ο νόμος της αδράνειας του Newton. Θα έφτανε όμως αυτή η ιδιότητά τους για να τα αναγάγουμε σε ιδιαίτερη κλάση; Στην πραγματικότητα τα ΑΣΑ έχουν πολύ πιο ισχυρή ιδιότητα: **Όλοι οι νόμοι της κλασσικής μηχανικής ισχύουν οι ίδιοι ανεξαρτήτως αδρανειακού συστήματος αναφοράς.**

Ας πάρουμε για παράδειγμα την αρχή διατήρησης της ορμής .

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σύστημα N σωματιδίων με συντεταγμένες $x^i_{(\alpha)}$ με i=1,2,3 και α=1,2,3,…N (ο δείκτης μέσα στην παρένθεση απαριθμεί το σωματίδιο). Δεχόμαστε ότι η ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή στο ένα σύστημα $\vec{p}(t_1) = \vec{p}(t_2)$ και θα αποδείξουμε ότι παραμένει σταθερή και στο άλλο. Ισχύει ότι:

$$\vec{p}(t_1) = \vec{p}(t_2) \Leftrightarrow p^i(t_1) = p^i(t_2) \Leftrightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} p^i_{(\alpha)}(t_1) = \sum_{\alpha=1}^{N} p^i_{(\alpha)}(t_2)$$

Στο άλλο σύστημα συντεταγμένων (με χρήση της (2.3.3))ισχύει ότι:

$$p'^i(t_1) = \sum_{\alpha=1}^{N} \left[R^i{}_j\, p^j_{(\alpha)}(t_1) - m_{(\alpha)} u^i \right] = R^i{}_j \sum_{\alpha=1}^{N} p^j_{(\alpha)}(t_1) - u^i \sum_{\alpha=1}^{N} m_{(\alpha)} \Rightarrow$$

$$p'^i(t_1) = R^i{}_j \sum_{\alpha=1}^{N} p^j_{(\alpha)}(t_2) - u^i \sum_{\alpha=1}^{N} m_{(\alpha)} = \sum_{\alpha=1}^{N} \left[R^i{}_j\, p^j_{(\alpha)}(t_2) - m_{(\alpha)} u^i \right] = p'^i(t_2)$$

2.4.2 Τα όρια

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση ενός κύματος το οποίο διαδίδεται με ταχύτητα υ σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο (πχ ένα σχοινί). Η εξίσωση που περιγράφει την διάδοση του κύματος στο σχοινί είναι η κυματική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 \Psi(t,x)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi(t,x)}{\partial t^2} = 0 \tag{2.4.1}$$

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό συντεταγμένων που επάγεται από μια προώθηση κατά μήκος του άξονα x.

$$\text{Δηλαδή } \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως ο μετασχηματισμός συντεταγμένων είναι: t΄=t και x΄ = x - u t.

Ποια μορφή θα πάρει η κυματική εξίσωση στο άλλο σύστημα συντεταγμένων; Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό θα ξεκινήσουμε από την (2.4.1) και χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητών, που ορίζει ο μετασχηματισμός, θα βρούμε την μορφή που παίρνει στο άλλο ΑΣΑ. Επειδή το Ψ είναι βαθμωτό μέγεθος ισχύει ότι Ψ(t , x)=Ψ΄(t΄, x΄) Για τους τελεστές παραγώγισης έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = -u\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}$$

Για τις δεύτερες παραγώγους του Ψ έχουμε:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\Psi = \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x'}\Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x'^2}$$

και

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left(-u\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}\right)\left(-u\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}\right)\Psi' =$$

$$u^2\frac{\partial^2 \Psi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial t'^2} - 2u\frac{\partial^2 \Psi'}{\partial x'\partial t'}$$

Επομένως η κυματική εξίσωση γίνεται:

$$\left(1 - \frac{u^2}{v^2}\right)\frac{\partial^2 \Psi'}{\partial x'^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi'}{\partial t'^2} - 2\frac{u}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi'}{\partial x'\partial t'} = 0$$

Παρατηρούμε ότι η κυματική εξίσωση δεν παραμένει αναλλοίωτη (αλλάζει μορφή) κάτω από μετασχηματισμούς Γαλιλαίου. Βρισκόμαστε λοιπόν ενώπιον του εξής γεγονότος: Ένα παρατηρητής που κινείται με σταθερή ταχύτητα u ως προς το σχοινί πρέπει να γράψει διαφορετική εξίσωση και επομένως διαφορετικό φυσικό νόμο. Για το φαινόμενο που περιγράψαμε υπάρχει αντίλογος. Επειδή το κύμα που μελετάμε είναι ένα μηχανικό κύμα που διαδίδεται σε ένα σχοινί υπάρχει προνομιακό σύστημα αναφοράς. Το σύστημα ηρεμίας του σχοινιού. Επομένως μπορούμε να υποχωρήσουμε στην απαίτηση μας, για την ισοδυναμία όλων των αδρανειακών συστημάτων όσον αφορά την περιγραφή της διάδοσης του κύματος και να δεχθούμε ότι η κυματική εξίσωση ισχύει μόνο στο σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο το μέσο διάδοσης ηρεμεί.

Κεφάλαιο 3

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LORENTZ

3.1 Εισαγωγή

Διαπιστώσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο την αδυναμία των μετασχηματισμών του Γαλιλαίου να διατηρούν αναλλοίωτη την κυματική εξίσωση. Όμως η ύπαρξη προνομιακού συστήματος αναφοράς μετριάζει την αρνητικότητα του αποτελέσματος. Τι γίνεται όμως αν το κύμα που διαδίδεται είναι Ηλεκτρομαγνητικό;

Επειδή τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται και στο κενό, δεν υπάρχει προνομιακό σύστημα αναφοράς και επομένως η απαίτηση για την ισοδυναμία όλων των αδρανειακών συστημάτων αναφοράς εμφανίζεται και πάλι. Επιπλέον υπάρχει το πρόβλημα της ταχύτητας διάδοσης του φωτός.

Ας θεωρήσουμε μια πηγή φωτός ακίνητη ως προς ένα αδρανειακό παρατηρητή. Τότε, στο σύστημα αυτό, το φως που εκπέμπει διαδίδεται με ταχύτητα c. Αν θεωρήσουμε ένα δεύτερο αδρανειακό παρατηρητή που απομακρύνεται με ταχύτητα u από την πηγή τότε εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου βρίσκουμε ότι στο σύστημα αναφοράς του παρατηρητή το φως διαδίδεται με ταχύτητα c-u. Τα πειραματικά δεδομένα όμως οδηγούν στο αντίθετο συμπέρασμα:

Η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Χρειαζόμαστε λοιπόν μια νέα Φυσική. Οι αρχές που πρέπει να υπακούει η Φυσική αυτή πρέπει να είναι οι παρακάτω:

A_1) Υπάρχουν χωροχρονικά συστήματα αναφοράς στα οποία το ελεύθερο σωμάτιο κινείται με σταθερή ταχύτητα (Ύπαρξη ΑΣΑ).

A_2) Αν ένα σύστημα αναφοράς κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι επίσης αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

A_3) Οι νόμοι της Φυσικής είναι ίδιοι σε όλα τα ΑΣΑ.

A_4) Η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια σε όλα τα ΑΣΑ.

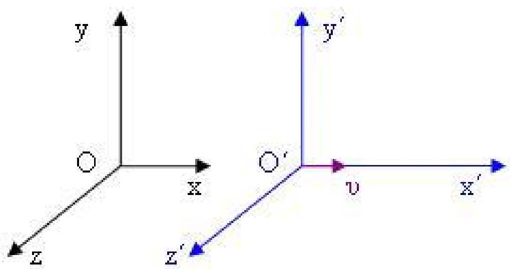
A_5) Για ταχύτητες πολύ μικρότερες της ταχύτητας του φωτός θα πρέπει η Φυσική να δίνει προσεγγιστικά την Φυσική του Newton.

Ποές παρεμβάσεις πρέπει να κάνουμε στην θεωρία μας ώστε να ικανοποιεί τις παραπάνω αρχές; Η πρώτη προφανής παρέμβαση είναι η αλλαγή στον μετασχηματισμό συντεταγμένων. Μια δεύτερη που δεν είναι ακόμη προφανής είναι η αλλαγή των ορισμών των φυσικών μεγεθών, η εισαγωγή νέων μεγεθών ή ακόμη και η τροποποίηση των φυσικών νόμων ώστε τα νέα φυσικά μεγέθη και οι νέοι φυσικοί νόμοι να είναι σύμφωνοι με τις παραπάνω αρχές.

3.2 Προώθηση Lorentz

3.2.1 Προώθηση κατά μήκος ενός άξονα

Θεωρούμε δύο ΑΣΑ Oxyz και O΄x΄y΄z΄ με παράλληλους άξονες. Θεωρούμε επίσης ότι το O΄ κινείται ως προς το O με σταθερή ταχύτητα υ κατά την κατεύθυνση του άξονα x. Τέλος, για λόγους απλότητας, θεωρούμε ότι την στιγμή t=0 το O΄ συμπίπτει με το O και είναι t΄=0.



Αναζητούμε γραμμικό μετασχηματισμό συντεταγμένων της μορφής:

$$t' = bt + \mathrm{a}x \tag{3.2.1}$$

$$x' = gt + fx \tag{3.2.2}$$

$$y' = y \text{ και } z' = z$$

Τα a, b, g, f είναι εν γένει συναρτήσεις του υ. Επομένως, για δοθέν υ είναι σταθερές. Ζητάμε να προσδιορίσουμε τις τιμές των a, b, g, f ώστε ο μετασχηματισμός να είναι σύμφωνος με τις αρχές τις ειδικής σχετικότητας.

Απαίτηση 1: Το σημείο O΄ κινείται ως προς το O με ταχύτητα υ. Επομένως πρέπει όταν $x' = 0$ να ισχύει ότι $x = vt$. Συνεπώς, η (3.2.2) γίνεται:

$$0 = gt + fvt \Rightarrow g = -fv \tag{3.2.3}$$

Απαίτηση 2: Το σημείο Ο κινείται ως προς το Ο΄ με ταχύτητα -υ
Πρέπει με $x = 0$ να ισχύει ότι $x' = -vt'$. Συνεπώς, οι (3.2.1) και (3.2.2) γίνονται:

$$t' = bt$$

$$-vt' = gt \Rightarrow -bvt = gt \Rightarrow g = -bv \tag{3.2.4}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις $g = -fv$ και $g = -bv$ προκύπτει ότι $f = b$.
Επομένως ο μετασχηματισμός γίνεται:

$$t' = bt + \mathrm{a}x \tag{3.2.5}$$

$$x' = b(-vt + x) \tag{3.2.6}$$

$$y' = y \text{ και } z' = z$$

Απαίτηση 3: Η ταχύτητα διάδοσης του φωτός είναι ίδια σε όλα τα ΑΣΑ.
Θεωρούμε ότι την στιγμή $t = 0$, που οι αρχές των δύο συστημάτων συμπίπτουν, το Ο εκπέμπει ένα φωτεινό σήμα στην διεύθυνση του άξονα x. Μετά από χρόνο t το σήμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $x = ct$. Για να είναι η ταχύτητα διάδοσης του φωτός ίδια στα δύο ΑΣΑ θα πρέπει και $x' = ct'$.
Αντικαθιστώντας τις παραπάνω στις (3.2.5) και (3.2.6) προκύπτει ότι:

$$t' = bt + \mathrm{a}ct \tag{3.2.7}$$

$$ct' = b(-vt + ct) \tag{3.2.8}$$

Αντικαθιστώντας την (3.2.7) στην (3.2.8) προκύπτει τελικά ότι: $\mathrm{a} = -\frac{bv}{c^2}$

Με τα παραπάνω ο μετασχηματισμός παίρνει την μορφή:

$$t' = b(t - \frac{v}{c^2}x) \tag{3.2.9}$$

$$x' = b(-vt + x) \tag{3.2.10}$$

Απαίτηση 4: Η κυματική εξίσωση παραμένει αναλλοίωτη

Η απαίτηση αυτή σημαίνει ότι η παράσταση $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$ με την αλλαγή των μεταβλητών που περιγράφουν οι (3.2.9) και (3.2.10) μετατρέπεται στην $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t'^2}$.
Για τους τελεστές παραγώγισης ισχύει ότι:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} = b\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = b\left(-v\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}\right)$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\Psi =$$

$$b^2\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)\Psi - \frac{b^2}{c^2}\left(-v\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}\right)\left(-v\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}\right)\Psi =$$

$$b^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x'^2} - b^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t'^2}$$

Επομένως, για να παραμείνει αναλλοίωτη η κυματική εξίσωση, πρέπει

$$b^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow b = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

και $|υ|<c$.

Μια επιπλέον υπόθεση που θα πρέπει να επιβάλλουμε είναι η εξής: Όταν υ=0 τότε τα δύο ΑΣΑ ταυτίζονται και επομένως ο μετασχηματισμός θα είναι x΄=x και t΄=t . Αυτό σημαίνει ότι για υ=0 πρέπει b=1. Επομένως πρέπει να διαλέξουμε την λύση για το b με το $+$.
Άρα τελικά $b = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$
Θέτουμε

$$\gamma = b \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.2.11}$$

και ο τελικός μετασχηματισμός Lorentz είναι:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{3.2.12}$$

$$x' = \gamma(-vt + x) \tag{3.2.13}$$

$$y' = y \text{ και } z' = z$$

Σχόλια

Σ₁) Το εννοιολογικό περιεχόμενο της (3.2.13) είναι οικείο και από τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου. Η απάντηση στο ερώτημα «που έγινε ένα γεγονός κατά τον παρατηρητή Ο΄;» εξαρτάται τόσο από το που έγινε το γεγονός κατά τον Ο, όσο και από το πότε έγινε κατά τον Ο. Το μόνο «περίεργο» είναι ο παράγοντας γ στο δεύτερο μέλος της (3.2.13).

Σ₂) Με την (3.2.12) τα πράγματα είναι τελείως διαφορετικά. Βρισκόμαστε σε μια τελείως νέα κατάσταση: Η απάντηση στο ερώτημα «πότε έγινε ένα γεγονός κατά τον Ο΄;» εξαρτάται τόσο από το πότε έγινε κατά τον Ο όσο και από το πού έγινε. Η έννοια του απόλυτου χρόνου του Νεύτωνα είναι πια παρελθόν.

Σ₃) Οι σχέσεις (3.2.12) και (3.2.13) μπορούν να γραφούν σε μορφή πινάκων ως εξής:

Θέτοντας $X = \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ και $X' = \begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$, ο μετασχηματισμός συντεταγμένων γίνεται:

$$X' = \Lambda X \text{ με } \Lambda = \Lambda(v) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c^2} & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Σ_4) Αν θεωρήσουμε τις (3.2.12) και (3.2.13) σαν ένα σύστημα με αγνώστους τα t και x βρίσκουμε ότι

$$t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x') \text{ και } x = \gamma(vt' + x') \tag{3.2.14}$$

Το παραπάνω συμπέρασμα ήταν αναμενόμενο αφού το O κινείται με ταχύτητα –v ως προς το O΄.

Σ_5) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο σχόλιο ή υπολογίζοντας απ' ευθείας τον αντίστροφο του Λ οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι

$$\Lambda^{-1}(v) = \Lambda(-v)$$

Σ_6) Η υπόθεση ότι ο μετασχηματισμός, που συνδέει τις συντεταγμένες ενός γεγονότος στα δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς, είναι γραμμικός (σχέσεις 3.2.1, 3.2.2) μπορεί να παραλειφθεί: Στο τέλος του κεφαλαίου 5 αποδεικνύεται ότι η γραμμικότητα μπορεί να προκύψει από ασθενέστερες υποθέσεις.

Εφαρμογή 3.1 (Διαστολή του χρόνου) *Θεωρούμε ένα τραίνο που κινείται με σταθερή ταχύτητα $v = 0,6c$ ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς O . Ένας επιβάτης του τραίνου ακίνητος ως προς το τραίνο κοιτάζει το ρολόι του, κλείνει τα μάτια του και τα ανοίγει πάλι. Διαπιστώνει ότι ο χρόνος που πέρασε είναι 2sec. Να βρεθεί η χρονική διάρκεια κατά την οποία είχε τα μάτια του κλειστά όπως την μετρά ο O.*

Λύση

Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο στο τραίνο με αρχή τον επιβάτη. Θεωρούμε επίσης τα εξής δύο γεγονότα.

Γεγονός 1: Ο επιβάτης κλείνει τα μάτια του.

Οι συντεταγμένες του γεγονότος αυτού ως προς O΄ είναι t'_1, $x'_1 = 0$ ενώ ως προς το O είναι t_1 , x_1.

Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό (3.2.14) συμπεραίνουμε ότι:

$$t_1 = \gamma(t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_1) \Rightarrow t_1 = \gamma t'_1$$

Γεγονός 2: Ο επιβάτης ανοίγει τα μάτια του.
Οι συντεταγμένες του γεγονότος αυτού ως προς Ο΄ είναι t'_2, $x'_2 = 0$ ενώ ως προς το Ο είναι t_2 , x_2. Ισχύει ότι:

$$t_2 = \gamma(t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_2) \Rightarrow t_2 = \gamma t'_2$$

Από την εκφώνηση συμπεραίνουμε ότι $\Delta t' = 2sec$.
Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι $\Delta t = \gamma \Delta t'$.
Επιπλέον $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.6^2}} = \frac{1}{0.8} = 1.25$
Επομένως Δt=2.5 sec

Εφαρμογή 3.2 (Συστολή του μήκους) *Ο επιβάτης του προηγούμενου προβλήματος τεντώνει το χέρι του κατά την διεύθυνση κίνησης του τραίνου και χρησιμοποιώντας την μετροταινία που βρίσκεται στο χαρτοφύλακά του βρίσκει ότι το χέρι του έχει μήκος 70cm. Να βρεθεί το μήκος του χεριού του επιβάτη όπως το μετρά ο Ο.*

Λύση

Οι συντεταγμένες των άκρων του χεριού του επιβάτη στο Ο΄ είναι $x'_1 = 0$ και $x'_2 = 0,7m$.

Για να βρει ο Ο το μήκος του χεριού του επιβάτη πρέπει να *μετρήσει ταυτόχρονα (στο σύστημά του) τις συντεταγμένες των άκρων του χεριού του επιβάτη.*
Πρέπει επομένως $t_1 = t_2 \Rightarrow \Delta t = 0$
Για να μπορέσουμε να επιβάλουμε την παραπάνω συνθήκη , θα πρέπει παρ' όλο που ζητάμε το Δx να χρησιμοποιήσουμε τον «ορθό» μετασχηματισμό:

$$x'_1 = \gamma(-vt_1 + x_1) \text{ και } x'_2 = \gamma(-vt_2 + x_2)$$

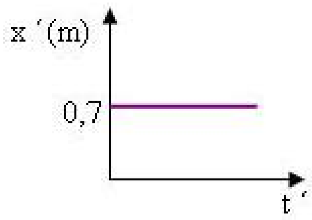
Αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει ότι $\Delta x' = \gamma(-v\Delta t + \Delta x)$
Επειδή δε $\Delta t = 0$ καταλήγουμε στην σχέση:

$$\Delta x' = \gamma \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} = \frac{0.7}{1.25} = 0.56m$$

Εφαρμογή 3.3 *Θεωρούμε τον μύθο της εφαρμογής 3.1. Να σχεδιαστεί η κοσμική γραμμή που διαγράφει η άκρη του χεριού του επιβάτη στο Ο και στο Ο΄.*

Λύση
Η κοσμική γραμμή είναι εξ ορισμού το σύνολο των σημείων του χωροχρόνου από τα οποία «διέρχεται» η άκρη του χεριού του επιβάτη

α) Στο O΄



Επειδή η άκρη A του χεριού του επιβάτη έχει σταθερή χωρική συντεταγμένη $x' = 0.7m$, τα χωροχρονικά σημεία από τα οποία διέρχεται είναι όλα τα σημεία (t', x') με $x' = 0.7m$. Επομένως θα διαγράφει μια γραμμή παράλληλη στον άξονα t΄ που διέρχεται από το σημείο $0.7m$ του άξονα x΄.

β) Στο O.

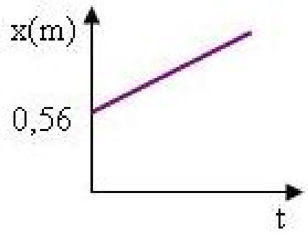
1ος τρόπος:
Θεωρούμε τον μετασχηματισμό
$t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x')$ και $x = \gamma(vt' + x')$.
Αντικαθιστούμε $x' = 0.7m$ και κάνουμε απαλοιφή του t΄ για να βρούμε την σχέση t και x.
Μετά από λίγη άλγεβρα καταλήγουμε στην σχέση:
$x = \frac{x'}{\gamma} + vt \Rightarrow x = 0.56 + 0.6ct$
2ος τρόπος:
Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $x' = \gamma(-vt + x)$.
Λύνουμε ως προς x και έχουμε: $x = \frac{x'}{\gamma} + vt \Rightarrow x = 0.56 + 0.6ct$

Εφαρμογή 3.4 *Υποθέτουμε ότι ο γνωστός μας πια επιβάτης μετρά με την μετροταινία του το μήκος του τραίνου και το βρίσκει L. Την στιγμή $t' = 0$, ευρισκόμενος στο πίσω μέρος του τραίνου, εκτοξεύει με έναν δείκτη Laser ένα φωτεινό σήμα προς τα εμπρός. Να βρείτε στα συστήματα O και O΄:*
α)Την χρονική στιγμή που η ακτίνα φτάνει στο μπροστινό μέρος του τραίνου
β) Την κοσμική γραμμή που διαγράφει η ακτίνα.

Λύση α)*1ος τρόπος:*
Επειδή, στο σύστημα O΄, το μήκος του τραίνου είναι L, ισχύει ότι
$L = ct' \Rightarrow t' = \frac{L}{c}$.
Επομένως, για το γεγονός: *«Άφιξη του φωτεινού σήματος στο μπροστινό μέρος του τραίνου»* ισχύει ότι $\begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L/c \\ L \end{bmatrix}$.
Αντικαθιστώντας στον μετασχηματισμό (3.2.14) προκύπτει ότι:

$$t = \frac{\gamma L(c+v)}{c^2} \text{ και } x = \frac{\gamma L(c+v)}{c}$$

2ος τρόπος:



Το φωτεινό σήμα εκπέμπεται στην θέση $x' = 0$ την στιγμή $t' = 0$. Επομένως στο σύστημα O εκπέμπεται την στιγμή $t = 0$ στη θέση $x = 0$. Η εξίσωση κίνησης του φωτεινού σήματος στο σύστημα O είναι $x_1 = ct$.

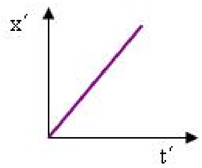
Το μπροστινό μέρος του τραίνου ($x' = L$) κινείται ως προς το O. Για να βρούμε την εξίσωση κίνησης του στο O αντικαθιστούμε στην σχέση $x' = \gamma(-vt + x)$ όπου x′=L και λύνουμε ως προς x. Επομένως η εξίσωση κίνησης του μπροστινού μέρους του τραίνου είναι $x_2 = \frac{L}{\gamma} + vt$. Το φωτεινό σήμα συναντά το μπροστινό μέρος του τραίνου όταν

$$x_1 = x_2 \Rightarrow ct = \frac{L}{\gamma} + vt \Rightarrow t = \frac{L}{\gamma(c-v)}$$

.

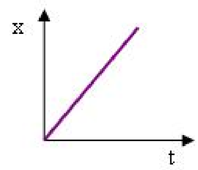
Ενδιαφέρον από πλευράς πράξεων παρουσιάζει η απόδειξη της ισοδυναμίας των δύο αποτελεσμάτων. Ισχύει ότι:

$$t = \frac{L}{\gamma(c-v)} = \frac{\gamma L}{\gamma^2(c-v)} = \frac{\gamma L}{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}(c-v)} = \frac{\gamma L(c+v)}{c^2}$$



β) Στο σύστημα του τραίνου η εξίσωση κίνησης της φωτεινής ακτίνας είναι $x' = ct'$. Επομένως η κοσμική γραμμή είναι τα σημεία του επιπέδου (t', x') με $x' = ct'$ (ευθεία)

Επειδή στο σύστημα O είναι $x = ct$ η κοσμική γραμμή και στο (t, x) είναι η ίδια



Εφαρμογή 3.5 (Σχετική ταχύτητα) *Θεωρούμε τώρα ότι ο επιβάτης εκτοξεύει μια μικρή σφαίρα η οποία κινείται κατά μήκος του τραίνου με σταθερή ταχύτητα u ως προς το τραίνο. Να βρεθεί η ταχύτητά της ως προς το O.*

Λύση

Για την κίνηση της σφαίρας ως προς το O′ ισχύει ότι $x' = ut'$.
Αντικαθιστώντας στις (3.2.14) προκύπτει ότι:

$$t = \gamma t'(1 + \frac{uv}{c^2}) \text{ και } x = \gamma t'(v + u)$$

Απαλείφοντας τον χρόνο t′ προκύπτει ότι: $x = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}t$.
Επομένως η ταχύτητα της σφαίρας ως προς το O είναι $\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$

Σχόλιο

Από τον τρόπο με τον οποίο βρήκαμε την σχετική ταχύτητα της σφαίρας ως προς το O θα μπορούσε να βγει το συμπέρασμα ότι η σχέση που καταλήξαμε ισχύει μόνο αν η κίνηση της σφαίρας είναι ομαλή. Αυτό όμως δεν είναι αλήθεια όπως φαίνεται από τα παρακάτω.

Έστω u η στιγμιαία ταχύτητα της σφαίρας ως προς το τραίνο.
Ισχύει ότι

$$u = \frac{dx'}{dt'} \Rightarrow dx' = udt'$$

Διαφορίζοντας τις (3.2.14) προκύπτει ότι:

$$dt = \gamma(dt' + \frac{v}{c^2}dx') \text{ και } dx = \gamma(vdt' + dx')$$

Επομένως

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$$

3.2.2 Χωροχρονικές συντεταγμένες – Γενική προώθηση Lorentz

Στην μέχρι τώρα μελέτη μας θεωρούσαμε σαν χωροχρονικές συντεταγμένες τον χρόνο t και τις τρεις χωρικές συντεταγμένες x^1, x^2, x^3. Για λόγους διαστάσεων και ομοιομορφίας στις σχέσεις ορίζουμε την χρονική συντεταγμένη $x^0 = ct$. Έτσι όλες οι συντεταγμένες έχουν διαστάσεις μήκους. Θέτουμε επίσης

$$\beta = \frac{v}{c} \tag{3.2.15}$$

Με αυτούς τους ορισμούς οι σχέσεις (3.2.11) , (3.2.12) και (3.2.13) γίνονται:

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x) \quad x' = \gamma(-\beta x^0 + x) \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Θέτοντας:

$$X' = \begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}, \Lambda_{(x)}(\beta) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ με } |\beta| < 1 \tag{3.2.16}$$

ο μετασχηματισμός συντεταγμένων σε μορφή πίνακα γράφεται:

$$X' = \Lambda X \tag{3.2.17}$$

και σε συνιστώσες

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{3.2.18}$$

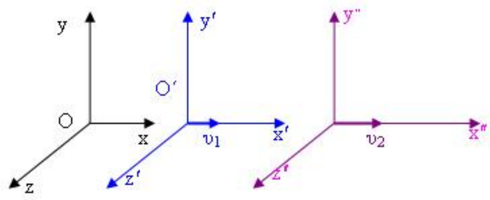
με μ=0,1,2,3 και υπονοείται άθροιση στον δείκτη ν από 0 έως 3

Ιδιότητες του Λ

1. $\Lambda(0) = I$ όπου I ο μοναδιαίος 4x4 πίνακας. Η σχέση αυτή σε συνιστώσες μπορεί να γραφεί $\Lambda(0)^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ όπου δ το δέλτα του Kronecker (δηλ $\delta^0{}_0 = \delta^1{}_1 = \delta^2{}_2 = \delta^3{}_3 = 1$ και $\delta^\mu{}_\nu = 0$ όταν $\mu \neq \nu$)

2. $\Lambda(\beta) \cdot \Lambda(-\beta) = I$
   Η σχέση αυτή σημαίνει ότι $\Lambda^{-1}(\beta) = \Lambda(-\beta)$ όπου $\Lambda^{-1}(\beta)$ ο αντίστροφος πίνακας του $\Lambda(\beta)$.

3. $\Lambda(\beta_1) \cdot \Lambda(\beta_2) = \Lambda\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\right)$
   Η απόδειξη της παραπάνω σχέσης είναι θέμα στοιχειώδους άλγεβρας και αφήνεται στον αναγνώστη. Ποιο είναι όμως το περιεχόμενο της σχέσης αυτής; Θεωρούμε τρία ΑΣΑ Ο,Ο΄,Ο΄΄.



   Έστω v_1 η ταχύτητα του Ο΄ ως προς Ο και v_2 η ταχύτητα του Ο΄΄ ως προς το Ο΄. Τότε η ταχύτητα του Ο΄΄ ως προς το Ο είναι $v = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε ότι η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο όταν οι δύο προωθήσεις είναι κατά την ίδια διεύθυνση (πχ και οι δύο κατά την διεύθυνση x)

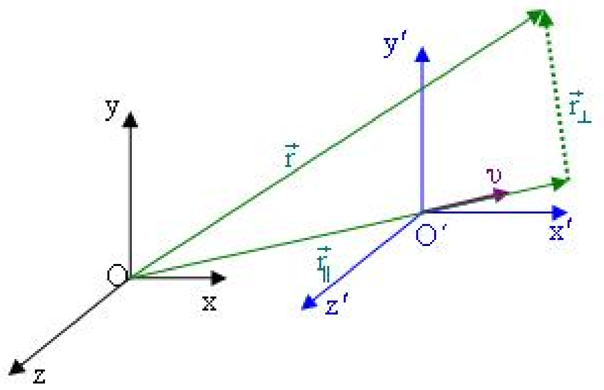
4. Αν έχουμε μία προώθηση κατά την διεύθυνση y τότε οι σχέσεις μετασχηματισμού θα είναι προφανώς :
   $x'^0 = \gamma(x^0 - \beta y)$, $x' = x$, $y' = \gamma(-\beta x^0 + y)$, z΄=z.
   Ο πίνακας Λ για μια προώθηση κατά τον άξονα y είναι

$$\Lambda_{(y)}(\beta) = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.2.19}$$

5. Για μια προώθηση κατά τον άξονα z είναι

$$\Lambda_{(z)}(\beta) = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \tag{3.2.20}$$

Η γενικευμένη προώθηση μπορεί να βρεθεί ως εξής:



Θεωρούμε ότι το O΄ κινείται ως προς το O με ταχύτητα $\vec{v}$ τυχαίας διεύθυνσης όπως στο σχήμα. Αναλύουμε τα διανύσματα θέσης ενός τυχαίου σημείου σε δύο συνιστώσες. Μια κατά την διεύθυνση της ταχύτητας v και μια κάθετη σε αυτή. Για να εκφράσουμε τις συνιστώσες συναρτήσει των $\vec{r}$ και $\vec{v}$ έχουμε να παρατηρήσουμε τα εξής:
Ισχύει ότι

$$\vec{r} = \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp \Rightarrow \vec{r}_\perp = \vec{r} - \vec{r}_\parallel$$

Επειδή

$$\vec{r}_\parallel \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{r}_\parallel = \lambda\vec{v}$$

Συνεπώς

$$\vec{r}_\perp \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{r}_\perp \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (\vec{r} - \vec{r}_\parallel) \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (\vec{r} - \lambda\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v^2}$$

Επομένως:

$$\vec{r}_\parallel = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v^2}\vec{v} \quad \text{και} \quad \vec{r}_\perp = \vec{r} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v^2}\vec{v}$$

Ο μετασχηματισμός Lorentz δεν επηρεάζει την κάθετη στην ταχύτητα συνιστώσα και μεταβάλει κατά τα γνωστά την παράλληλη σε αυτήν.
Επομένως ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
\vec{r}'_\perp &= \vec{r}_\perp \\
\vec{r}'_\parallel &= \gamma(-\vec{v}t + \vec{r}_\parallel) \\
t' &= \gamma(t - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}_\parallel}{c^2}) = \gamma(t - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c^2})
\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση γίνεται $x'^0 = \gamma x^0 - \gamma \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{v^i}{c} x^i$

Πρέπει όμως

$$x'^0 = \Lambda^0{}_\nu x^\nu = \Lambda^0{}_0 x^0 + \Lambda^0{}_i x^i$$

Επομένως

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma \quad \text{και} \quad \Lambda^0{}_i = -\gamma \frac{v^i}{c}$$

Για να βρούμε τις χωρικές συντεταγμένες στο Ο΄ πρέπει να βρούμε το εσωτερικό γινόμενο του $\vec{r}\,'$ με τα $\vec{e}_i$.

Ισχύει ότι:

$$x'^i = \vec{r}\,' \cdot \vec{e}_i = (\vec{r}\,'_\parallel + \vec{r}\,'_\perp) \cdot \vec{e}_i = \vec{r}\,'_\parallel \cdot \vec{e}_i + \vec{r}\,'_\perp \cdot \vec{e}_i = \gamma(\vec{r}_\parallel - \vec{v}t) \cdot \vec{e}_i + \vec{r}_\perp \cdot \vec{e}_i \Rightarrow$$
$$x'^i = \vec{r} \cdot \vec{e}_i + (\gamma - 1)\vec{r}_\parallel \cdot \vec{e}_i - \gamma \vec{v} \cdot \vec{e}_i t = \vec{r} \cdot \vec{e}_i + \lambda(\gamma - 1)\vec{v} \cdot \vec{e}_i - \gamma \vec{v} \cdot \vec{e}_i t \Rightarrow$$
$$x'^i = x^i + \lambda(\gamma - 1)v^i - \gamma v^i t = x^i + \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{v^2}(\gamma - 1)v^i - \gamma v^i t \Rightarrow$$
$$x'^i = -\gamma \frac{v^i}{c} x^0 + \sum_{j=1}^{3} \delta^i_j x^j + \frac{\gamma - 1}{v^2} v^i \sum_{j=1}^{3} x^j v^j \Rightarrow$$
$$x'^i = -\gamma \frac{v^i}{c} x^0 + \sum_{j=1}^{3} (\delta^i_j + \frac{\gamma - 1}{v^2} v^i v^j) x^j$$

Πρέπει όμως

$$x'^i = \Lambda^i{}_\nu x^\nu = \Lambda^i{}_0 x^0 + \Lambda^i{}_j x^j$$

Συνεπώς,

$$\Lambda^i{}_0 = -\gamma \frac{v^i}{c} \quad \text{και} \quad \Lambda^i{}_j = \delta^i_j + \frac{\gamma - 1}{v^2} v^i v^j$$

Συνοψίζοντας, για την γενική προώθηση Lorentz ισχύει ότι:

$$\begin{array}{ll} \Lambda^0{}_0 = \gamma & \Lambda^0{}_i = -\gamma \beta^i \\ \Lambda^i{}_0 = -\gamma \beta^i & \Lambda^i j = \delta^i_j + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \beta^i \beta^j \end{array}$$

και σε μορφή πίνακα

$$\Lambda(\beta) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma \beta^T \\ -\gamma \beta & I + \frac{\gamma-1}{|\vec{\beta}|^2} \beta \beta^T \end{bmatrix} \tag{3.2.21}$$

με β τον 3x1 πίνακα στήλη $\beta = \begin{bmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \beta^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^1/c \\ v^2/c \\ v^3/c \end{bmatrix}$,

$$|\vec{\beta}|^2 = \beta^T \beta = (\beta^1)^2 + (\beta^2)^2 + (\beta^3)^2 \quad , \quad \gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 - |\vec{\beta}|^2}} \quad \text{και} \quad |\vec{\beta}| < 1$$

Σχόλια

1) Μια χρήσιμη εξάσκηση στις πράξεις μεταξύ πινάκων είναι η απόδειξη της σχέσης $\Lambda(\beta)\Lambda(-\beta) = I \Leftrightarrow \Lambda^{-1}(\beta) = \Lambda(-\beta)$, η οποία αφήνεται στον αναγνώστη.

2) Ανωτέρω βρήκαμε την γενική προώθηση Lorentz, η οποία έχει τρεις παραμέτρους β^1, β^2, β^3. Εξακολουθούν να παραμένουν ως επιτρεπτοί μετασχηματισμοί οι 3 χωρικές στροφές, οι 3 χωρικές μεταθέσεις και η 1 χρονική μετάθεση. Επομένως ο γενικός μετασχηματισμός Lorentz μπορεί να γραφεί στην μορφή $X' = \tilde{R}\Lambda X + b$ όπου $\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$, R 3x3 πίνακας στροφής και Λ προώθηση Lorentz.

3.3 Χωροχρονική απόσταση και ο χώρος Minkowski

Θεωρούμε δύο χωροχρονικά σημεία 1 και 2. Οι συντεταγμένες τους, σε κάποιο σύστημα αναφοράς Ο, είναι $x^\mu_{(1)}$ και $x^\mu_{(2)}$.

Θέτουμε

$$\boxed{\Delta S^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta \vec{x})^2}$$

Θεωρούμε ένα άλλο σύστημα αναφοράς Ο΄. Μπορούμε να αποδείξουμε την εξής ιδιότητα:

Θεώρημα 3.3.1 *Για τα δύο συστήματα συντεταγμένων ισχύει ότι:*

$$\Delta S^2 = \Delta S'^2 \tag{3.3.1}$$

Απόδειξη

α) Αν περιοριστούμε σε χωροχρονικές μεταθέσεις ($X' = X + b$) τότε $\Delta X' = \Delta X$ και η σχέση γίνεται τετριμμένη.

β) Θεωρούμε την περίπτωση χωρικών στροφών

Στην περίπτωση αυτή $t' = t \Rightarrow \Delta x'^0 = \Delta x^0$ και από την βασική ιδιότητα των στροφών προκύπτει ότι: $\Delta \vec{x}'^2 = \Delta \vec{x}^2$. Επομένως η (3.3.1) είναι προφανής.

γ) Θεωρούμε τώρα την περίπτωση προώθησης Lorentz κατά την διεύθυνση x. Όπως γνωρίζουμε, για τον μετασχηματισμό των συντεταγμένων ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
\Delta x^0 &= \gamma(\Delta x'^0 + \beta \Delta x'^1) \\
\Delta x^1 &= \gamma(\Delta x'^1 + \beta \Delta x'^0) \\
\Delta x^2 &= \Delta x'^2 \\
\Delta x^3 &= \Delta x'^3
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στο πρώτο μέλος της (3.3.1) προκύπτει (με στοιχειώδεις πράξεις) το δεύτερο.

δ) Θεωρούμε την γενική προώθηση Lorentz
Αναλύουμε και πάλι το χωρικό διάνυσμα θέσης σε δύο συνιστώσες: μια παράλληλη στην ταχύτητα υ και μια κάθετη σε αυτήν. Ο μετασχηματισμός Lorentz είναι κατά τα γνωστά ο:

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{r}_{\perp} &= \Delta\vec{r}\,'_{\perp} \\
\Delta\vec{r}_{\|} &= \gamma(\vec{\beta}\Delta x\,'^{0} + \Delta\vec{r}\,'_{\|}) \\
\Delta x^{0} &= \gamma(\Delta x\,'^{0} + \vec{\beta}\cdot\Delta\vec{r}\,'_{\|})
\end{aligned}$$

Από το γ) συμπεραίνουμε ότι:

$$-(\Delta x^0)^2 + (\Delta\vec{r}_{\|})^2 = -(\Delta x\,'^0)^2 + (\Delta\vec{r}\,'_{\|})^2$$

Αντικαθιστώντας στο πρώτο μέλος της (3.3.1) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
&\Delta S^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta\vec{r})^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta\vec{r}_{\|} + \Delta\vec{r}_{\perp})^2 = \\
&-(\Delta x^0)^2 + (\Delta\vec{r}_{\|})^2 + (\Delta\vec{r}_{\perp})^2 = -(\Delta x\,'^0)^2 + (\Delta\vec{r}\,'_{\|})^2 + (\Delta\vec{r}\,'_{\perp})^2 = \Delta S\,'^2
\end{aligned}$$

ε) Θεωρούμε τον γενικό μετασχηματισμό Lorentz $X' = \tilde{R}\Lambda X + b$ όπου $\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$, R 3x3 πίνακας στροφής και Λ προώθηση Lorentz. Τον μετασχηματισμό αυτό μπορούμε να τον δούμε σαν διαδοχή των εξής μετασχηματισμών:

$$X \to X'' = \Lambda X \quad X'' \to X''' = \tilde{R}X'' \quad X''' \to X' = X''' + b$$

Από τα εκτεθέντα παραπάνω προκύπτει ότι: $\Delta S^2 = \Delta S\,''^2 = \Delta S\,'''^2 = \Delta S\,'^2$

Το γεγονός ότι οι μετασχηματισμοί Lorentz αφήνουν αμετάβλητη την ποσότητα ΔS^2 αναδεικνύει την ποσότητα αυτή σε κυρίαρχο μέγεθος στην θεωρία της ειδικής σχετικότητας.

Συγκεκριμένα η ποσότητα ΔS^2 ορίζει την **χωροχρονική απόσταση** δύο γεγονότων. Για να μπορέσουμε να γράψουμε την χωροχρονική απόσταση με μορφή πινάκων πρέπει να ορίσουμε τους αντίστοιχους των πινάκων ε_{ij} και ε^{ij}, που ορίσαμε για την χωρική απόσταση δύο σημείων:

Ορίζουμε λοιπόν τον **συναλλοίωτο μετρικό τανυστή** $\eta_{\mu\nu}$ ως εξής:
$\eta_{00} = -1, \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$ και μηδέν σε κάθε άλλη περίπτωση. Επομένως σε μορφή πίνακα

$$\eta = [\eta_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \qquad (3.3.2)$$

Ομοίως ορίζεται και ο **ανταλλοίωτος μετρικός τανυστής** $\eta^{\mu\nu}$, ο οποίος ως πίνακας είναι ο αντίστροφος του $\eta_{\mu\nu}$. Επειδή $\eta\cdot\eta = I$ ο αντίστροφος του η είναι ο ίδιος ο η. Οι σχέση των συνιστωσών των δύο τανυστών είναι $\eta^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$ όπου δ ο ταυτοτικός 4x4 πίνακας ($\delta^0_0 = \delta^1_1 = \delta^2_2 = \delta^3_3 = 1$ κλπ).

Ο ανταλλοίωτος μετρικός τανυστής $\eta^{\mu\nu}$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανύψωση ενός δείκτη (μετατροπή ενός συναλλοίωτου δείκτη σε ανταλλοίωτο): Για παράδειγμα έστω A_μ ένα συναλλοίωτο διάνυσμα. Το αντίστοιχο ανταλλοίωτο ορίζεται από την σχέση:

$$A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu \tag{3.3.3}$$

Ομοίως ο συναλλοίωτος μετρικός τανυστής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υποβιβασμό ενός δείκτη:

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu \tag{3.3.4}$$

Σχόλια

1) Προς το παρόν ένα ανταλλοίωτο και ένα συναλλοίωτο διάνυσμα ξεχωρίζουν μόνο από την θέση των δεικτών τους. Δηλαδή ένα συναλλοίωτο διάνυσμα έχει τον δείκτη κάτω και ένα ανταλλοίωτο έχει τον δείκτη πάνω.

2) Οι τιμές των συντεταγμένων ενός συναλλοίωτου και του αντίστοιχου ανταλλοίωτου διανύσματος δεν είναι ίσες: Θεωρούμε ένα συναλλοίωτο διάνυσμα A_μ με πίνακα συντεταγμένων $[A_\mu] = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$. Είναι στοιχειώδες (με χρήση της (3.3.3)) να αποδείξουμε ότι ο πίνακας συντεταγμένων του αντίστοιχου ανταλλοίωτου διανύσματος είναι ο $[A^\mu] = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$.

3) Αν υποβιβάσουμε ένα δείκτη και στην συνέχεια τον ανυψώσουμε, το τελικό διάνυσμα είναι ίδιο με το αρχικό.
Πράγματι ας θεωρήσουμε ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα A^μ. Θέτουμε A_μ το αντίστοιχο συναλλοίωτο ($A_\mu = \eta_{\mu\nu}A^\nu$). Ας συμβολίσουμε προς το παρόν με B^μ το ανταλλοίωτο διάνυσμα που προκύπτει από το A_μ. Ισχύει ότι:
$B^\mu = \eta^{\mu\nu}A_\nu = \eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho}A^\rho = \delta^\mu_\rho A^\rho = A^\mu$.

4) Κάνοντας χρήση των παραπάνω, η παράσταση ΔS^2 μπορεί να γραφτεί ως:

$$\Delta S^2 = \eta_{\mu\nu}(\Delta x)^\mu (\Delta x)^\nu \tag{3.3.5}$$

ή σε μορφή πινάκων

$$\Delta S^2 = (\Delta X)^T \eta (\Delta X) \tag{3.3.6}$$

Αποδείξαμε παραπάνω ότι ο γενικός μετασχηματισμός Lorentz $X' = LX + b$ με $L = \tilde{R}\Lambda$ όπου Λ προώθηση Lorentz και $\tilde{R}$ χωρική στροφή, αφήνει αναλλοίωτη την χωροχρονική απόσταση. Τι σημαίνει αυτό για τον πίνακα L; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι η εξής πρόταση:

Θεώρημα 3.3.2 *Ο πίνακας L του γενικού μετασχηματισμού Lorentz ικανοποιεί την σχέση*

$$L^T \eta L = \eta \tag{3.3.7}$$

Απόδειξη

$1^{ος}$ τρόπος:

Ισχύει ότι:

$$\Delta X' = L\Delta X \Rightarrow (\Delta X')^T = (\Delta X)^T L^T$$

Ο μετασχηματισμός Lorentz αφήνει την ποσότητα ΔS^2 αμετάβλητη. Από αυτό και την σχεση (3.3.6) προκύπτει ότι:

$$\Delta S'^2 = \Delta S^2 \Rightarrow (\Delta X')^T \eta (\Delta X') = (\Delta X)^T \eta (\Delta X) \Rightarrow$$
$$(\Delta X)^T L^T \eta L (\Delta X) = (\Delta X)^T \eta (\Delta X)$$

Επειδή το ΔX είναι αυθαίρετο πρέπει $L^T \eta L = \eta$.

$2^{ος}$ τρόπος:

Αν κάποιος δεν πείθεται από το επιχείρημα με το οποίο «απλοποιήθηκε» το ΔX και θέλει να κάνει απ' ευθείας υπολογισμό θα πρέπει να κάνει το εξής:

Υποθέτουμε κατ' αρχάς ότι $L = \tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$ όπου R χωρική στροφή με $R^T R = I$.

Ισχύει ότι:

$$L^T \eta L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R^T R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \eta$$

Έστω τώρα $L = \Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta^T \\ -\gamma\beta & I + \lambda\beta\beta^T \end{bmatrix}$, με $\lambda = \frac{\gamma - 1}{|\vec{\beta}|^2}$ προώθηση Lorentz.

Επομένως $\Lambda^T = \Lambda$ και

$$\Lambda^T \eta = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta^T \\ -\gamma\beta & I + \lambda\beta\beta^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma & -\gamma\beta^T \\ \gamma\beta & I + \lambda\beta\beta^T \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε το γινόμενο

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \begin{bmatrix} -\gamma & -\gamma\beta^T \\ \gamma\beta & I+\lambda\beta\beta^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta^T \\ -\gamma\beta & I+\lambda\beta\beta^T \end{bmatrix}$$

- Το στοιχείο πρώτης γραμμής και πρώτης στήλης είναι:

$$-\gamma^2 + \gamma^2\beta^T\beta = -\gamma^2(1-|\vec{\beta}|^2) = -1$$

- Το στοιχείο πρώτης γραμμής και «δεύτερης στήλης» (πίνακας 1x3) είναι:

$$\gamma^2\beta^T - \gamma\beta^T - \lambda\gamma\beta^T\beta\beta^T = \gamma^2\beta^T - \gamma\beta^T - \frac{\gamma-1}{|\vec{\beta}|^2}\gamma|\vec{\beta}^2|\beta^T =$$
$$(\gamma^2-\gamma-\gamma^2+\gamma)\beta^T = 0$$

- Το στοιχείο «δεύτερης γραμμής» και πρώτης στήλης (πίνακας 3x1) είναι:

$$\gamma^2\beta - \gamma\beta - \lambda\gamma\beta\beta^T\beta = \gamma^2\beta - \gamma\beta - \frac{\gamma-1}{|\vec{\beta}|^2}\gamma\beta|\vec{\beta}|^2 =$$
$$(\gamma^2-\gamma-\gamma^2+\gamma)\beta = 0$$

- Το στοιχείο «δεύτερης γραμμής» και «δεύτερης στήλης» (πίνακας 3x3) είναι:

$$-\gamma^2\beta\beta^T + I + 2\lambda\beta\beta^T + \lambda^2\beta\beta^T\beta\beta^T = -\gamma^2\beta\beta^T + I + 2\lambda\beta\beta^T + \lambda^2\beta|\vec{\beta}|^2\beta^T$$

  Ο συντελεστής του $\beta\beta^T$ είναι:

$$-\gamma^2+2\lambda+\lambda^2|\vec{\beta}|^2 = -\gamma^2+2\frac{\gamma-1}{|\vec{\beta}|^2}+\frac{(\gamma-1)^2}{|\vec{\beta}|^2} = -\gamma^2+\frac{\gamma^2-1}{|\vec{\beta}|^2} = -\gamma^2+\gamma^2 = 0$$

  Άρα το στοιχείο «δεύτερης γραμμής» και «δεύτερης στήλης» είναι I.

Επομένως $\Lambda^T\eta\Lambda = \eta$.

Στην γενική περίπτωση που $L = \tilde{R}\Lambda$ ισχύει ότι:

$$L^T\eta L = (\tilde{R}\Lambda)^T\eta(\tilde{R}\Lambda) = \Lambda^T\tilde{R}^T\eta\tilde{R}\Lambda = \Lambda^T(\tilde{R}^T\eta\tilde{R})\Lambda = \Lambda^T\eta\Lambda = \eta$$

Αποδείξαμε μέχρι τώρα ότι ο γενικός γραμμικός μετασχηματισμός Lorentz X′=LX+b διατηρεί την χωροχρονική απόσταση και επομένως ικανοποιεί την σχέση $L^T\eta L = \eta$.

Ισχύει και το αντίστροφο του θεωρήματος. Αν δηλαδή ένας μετασχηματισμός διατηρεί την χωροχρονική απόσταση τότε είναι μετασχηματισμός Lorentz. Συγκεκριμένα ισχύει το εξής

Θεώρημα 3.3.3 *Έστω 4x4 πίνακας L για τον οποίο ισχύει η σχέση $L^T \eta L = \eta$. Τότε υπάρχει 3x1 πίνακας στήλη β και 3x3 ορθογώνιος πίνακας R έτσι ώστε $L = \Lambda(\beta)\tilde{R}$ όπου $\Lambda(\beta)$ η προώθηση Lorentz που ορίζει το β.*

Απόδειξη

Ο πίνακας L είναι ένας 4x4 πίνακας. Έστω ότι το στοιχείο της 0 γραμμής και 0 στήλης είναι $L^0{}_0 = \alpha$. Τα υπόλοιπα 3 στοιχεία της μηδενικής στήλης ορίζουν έναν 3x1 πίνακα–στήλη v ($L^i{}_0 = v^i$). Τα υπόλοιπα 3 στοιχεία της μηδενικής γραμμής ορίζουν έναν 1x3 πίνακα–γραμμή. Ο ανάστροφος αυτού του πίνακα–γραμμή είναι ένας πίνακας–στήλη, τον οποίο συμβολίζουμε με u ($L^0{}_i = u_i$). Το απομένον τμήμα του L είναι ένας 3x3 πίνακας Δ.

Επομένως, ο L έχει την μορφή $L = \begin{bmatrix} \alpha & u^T \\ v & \Delta \end{bmatrix}$.

Επειδή ο πίνακας L ικανοποιεί την σχέση $L^T \eta L = \eta$ προκύπτει ότι:

$$\begin{bmatrix} \alpha & u^T \\ v & \Delta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & u^T \\ v & \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & v^T \\ u & \Delta^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & u^T \\ v & \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 + v^T v & -\alpha u^T + v^T \Delta \\ -\alpha u + \Delta^T v & -u u^T + \Delta^T \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$-\alpha^2 + v^T v = -1 \tag{1}$$

$$\Delta^T v = \alpha u \Leftrightarrow \alpha u^T = v^T \Delta \tag{2}$$

$$\Delta^T \Delta - u u^T = I \tag{3}$$

Από την (1) συμπεραίνουμε ότι $\alpha^2 = 1 + v^T v \Rightarrow \alpha^2 \geq 1$.

Υποθέτουμε ότι α>0. (Η περίπτωση α<0 θα εξεταστεί στο τέλος)

Θέτουμε $\beta = -\frac{v}{\alpha}$ και $\tilde{R} = \Lambda(-\beta)L$

Θα αποδείξουμε ότι $\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$ με $R^T R = I$ (I ο μοναδιαίος 3x3).

Για το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$ ισχύει ότι:

$$|\vec{\beta}|^2 = \beta^T \beta = \frac{v^T v}{\alpha^2} \Rightarrow |\vec{\beta}|^2 = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{1 - |\vec{\beta}|^2} \Rightarrow \alpha = \gamma(\beta) := \gamma$$

Υπολογίζουμε την ποσότητα $\lambda \beta \beta^T$ που εμφανίζεται στην προώθηση Lorentz.

$$\lambda \beta \beta^T = \frac{\gamma - 1}{|\vec{\beta}|^2} \beta \beta^T = \frac{\gamma - 1}{\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}} \frac{v v^T}{\alpha^2} = \frac{v v^T}{\alpha + 1}$$

Για τον πίνακα $\tilde{R}$ ισχύει ότι:

$$\tilde{R} = \Lambda(-\beta)L = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta^{\mathrm{T}} \\ \gamma\beta & \mathrm{I} + \lambda\beta\beta^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & u^T \\ v & \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -v^{\mathrm{T}} \\ -v & \mathrm{I} + \frac{v v^{\mathrm{T}}}{\alpha+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & u^T \\ v & \Delta \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} \alpha^2 - v^T v & \alpha u^T - v^T \Delta \\ -\alpha v + v + \frac{vv^T v}{\alpha+1} & -vu^T + \Delta + \frac{vv^T \Delta}{\alpha+1} \end{bmatrix}$$

Από την (1) προκύπτει ότι: $\alpha^2 - v^T v = 1$
Από την (2) προκύπτει ότι: $\alpha u^T - v^T \Delta = 0$
Επίσης ισχύει ότι:

$$-\alpha v + v + \frac{vv^T v}{\alpha + 1} = -\alpha v + v + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha + 1} v = (-\alpha + 1 + \alpha - 1)v = 0$$

Θέτουμε $R = -vu^T + \Delta + \frac{vv^T \Delta}{\alpha+1}$
Κάνοντας χρήση της (2) συμπεραίνουμε ότι:

$$R = -vu^T + \Delta + \frac{\alpha vu^T}{\alpha + 1} = \Delta - \frac{vu^T}{\alpha + 1}$$

Επομένως $R^T = \Delta^T - \frac{uv^T}{\alpha+1}$
Υπολογίζουμε το γινόμενο $R^T R$

$$R^T R = (\Delta^T - \frac{uv^T}{\alpha + 1})(\Delta - \frac{vu^T}{\alpha + 1}) = \Delta^{\mathrm{T}}\Delta - \frac{\Delta^T vu^T}{\alpha + 1} - \frac{uv^T \Delta}{\alpha + 1} + \frac{uv^T vu^T}{(\alpha + 1)^2}$$

Όμως
$(3) \Rightarrow \Delta\Delta^T = I + uu^T$
$(2) \Rightarrow \Delta^T v = \alpha u$
$(1) \Rightarrow v^T v = \alpha^2 - 1$
Βάσει των παραπάνω το γινόμενο $R^T R$ γίνεται:

$$R^T R = I + uu^T - \frac{\alpha uu^T}{\alpha + 1} - \frac{\alpha uu^T}{\alpha + 1} + \frac{(\alpha^2 - 1)uu^T}{(\alpha + 1)^2} = I$$

Επομένως ο R είναι 3x3 ορθογώνιος πίνακας.
Ισχυει ότι:

$$\tilde{R} = \Lambda(-\beta)L \Rightarrow \Lambda(\beta)\tilde{R} = \Lambda(\beta)\Lambda(-\beta)L \Rightarrow \Lambda(\beta)\tilde{R} = \mathrm{I}L \Rightarrow L = \Lambda(\beta)\tilde{R}$$

Απομένει να εξετάσουμε την περίπτωση κατά την οποία α<0.
Θεωρούμε τον πίνακα $L_1 = -L$. Εύκολα φαίνεται ότι και ο πίνακας L_1 ικανοποιεί την σχέση $L_1^T \eta L_1 = \eta$. Επειδή α<0 το 00 στοιχείο του L_1 θα είναι το –α>0. Κάνοντας χρήση όσων αποδείξαμε, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει Λ προώθηση Lorentz και ορθογώνιος πίνακας R_1 ώστε

$$L_1 = \Lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix} \Rightarrow L = \Lambda \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -R_1 \end{bmatrix}$$

Θέτουμε $R = -R_1$ και εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο R είναι ορθογώνιος πίνακας.

Σχόλια

Σ₁) Η επιλογή του κατάλληλου β από τα στοιχεία του L δεν είναι ούτε θέμα επινοητικότητας ούτε θέμα ενόρασης αλλά συστηματικής αναζήτησης. Αναζητούμε 3x1 πίνακα β τέτοιο ώστε $L = \Lambda(\beta)\tilde{R}$. Επομένως,
$\begin{bmatrix} \alpha & u^T \\ v & \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & ... \\ -\gamma\beta & ... \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ... \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & ... \\ -\gamma\beta & ... \end{bmatrix}$
Συνεπώς α=γ και $v = -\gamma\beta \Rightarrow \beta = -\frac{v}{\alpha}$.

Σ₂) Αποδείξαμε ότι ο τυχαίος πίνακας $L = \begin{bmatrix} \alpha & u^T \\ v & \Delta \end{bmatrix}$, που ικανοποιεί την σχέση $L^T\eta L = \eta$, είναι γινόμενο μιας προώθησης Lorentz και μιας χωρικής στροφής: $L = \Lambda(\beta_1)\tilde{R}_1$ όπου $\beta_1 = -\frac{v}{\alpha}$ και $R_1 = \Delta - \frac{vu^T}{\alpha+1}$.
Μπορούμε να αποδείξουμε ότι είναι το γινόμενο της ίδιας χωρικής στροφής και μιας διαφορετικής προώθησης Lorentz: $L = \tilde{R}_2\Lambda(\beta_2)$ με $R_2 = R_1$.
Πράγματι, αν πολλαπλασιάσουμε την σχέση $L^T\eta L = \eta$ από αριστερά με η προκύπτει ότι: $\eta L^T\eta L = \eta\eta \Rightarrow (\eta L^T\eta)L = \mathrm{I}$.
Επομένως οι πίνακες L και $\eta L^T\eta$ είναι ο ένας ο αντίστροφος του άλλου. Συνεπώς, και το αντίστροφο γινόμενο ισούται με I ($AB = I \Leftrightarrow BA = I$). Επομένως $L(\eta L^T\eta) = \mathrm{I} \Rightarrow L(\eta L^T\eta)\eta = \eta \Rightarrow L\eta L^T = \eta \Rightarrow (L^T)^T\eta L^T = \eta$.
Συνεπώς, ο $L^T = \begin{bmatrix} \alpha & v^T \\ u & \Delta^T \end{bmatrix}$ ικανοποιεί την ίδια σχέση με τον L.
Από το θεώρημα προκύπτει ότι ο πίνακας στήλη $\beta_2 = -\frac{u}{\alpha}$ και ο ορθογώνιος πίνακας $R = \Delta^T - \frac{uv^T}{\alpha+1}$ είναι τέτοιοι ώστε $L^T = \Lambda(\beta_2)\tilde{R} \Rightarrow L = \tilde{R}^T\Lambda(\beta_2)$.
Επειδή $R^T = \Delta - \frac{vu^T}{\alpha+1}$συμπεραίνουμε ότι $R_2 = R_1$.

Σ₃) Αξίζει να σημειώσουμε ότι το γινόμενο δύο προωθήσεων Lorentz δεν είναι προώθηση Lorentz αλλά ένας γενικός πίνακας Lorentz.

3.4 Ομάδα Lorentz

Όπως είδαμε παραπάνω ένας μετασχηματισμός Lorentz είναι ένα ζεύγος g=(L,b) όπου L 4x4 πίνακας με την ιδιότητα $L^T\eta L = \eta$ και b τυχαίος 4x1 πίνακας. Η «δράση» ενός μετασχηματισμού Lorentz στα στοιχεία του χωροχρόνου ορίζεται από την σχέση $X' = LX + b$.

Θεωρούμε δυο διαδοχικούς μετασχηματισμούς $X' = L_1X + b_1$ και $X'' = L_2X' + b_2$. Αντικαθιστώντας το X΄ στο X΄΄ προκύπτει ότι:

$$X'' = L_2L_1X + L_2b_1 + b_2$$

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο σύνθετος μετασχηματισμός είναι μετασχηματισμός Lorentz. Δηλαδή ισχύει η εξής πρόταση:

Θεώρημα 3.4.1 *Θεωρούμε το σύνολο $\mathfrak{L}$ των μετασχηματισμών Lorentz. Στο σύνολο αυτό ορίζουμε μια πράξη $*$ ως εξής: Αν $g_1 = (L_1, b_1) \in \mathfrak{L}$ και $g_2 = (L_2, b_2) \in \mathfrak{L}$ θέτουμε $g_2 * g_1 = (L_2L_1, L_2b_1 + b_2)$.*

Τότε το σύνολο $\mathfrak{L}$ με την παραπάνω ορισθείσα πράξη αποτελεί ομάδα.

<u>*Απόδειξη*</u>

- Κλειστότητα
  Έστω $g_1 = (L_1, b_1) \in \mathfrak{L}$ και $g_2 = (L_2, b_2) \in \mathfrak{L}$.
  Θα αποδείξουμε ότι $g = g_2 * g_1 \in \mathfrak{L}$.
  Θέτουμε $L = L_2L_1$ και $b = L_2b_1 + b_2$ Επειδή $g_1, g_2 \in \mathfrak{L}$ ισχύει ότι:
  $L_1^T \eta L_1 = \eta$ και $L_2^T \eta L_2 = \eta$. Επομένως
  $L^T \eta L = (L_2L_1)^T \eta (L_2L_1) = L_1^T (L_2^T \eta L_2) L_1 = L_1^T \eta L_1 = \eta$. Άρα $g \in \mathfrak{L}$

- Η απόδειξη της προσεταιριστικής ιδιότητας είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της πράξης.

- Ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου
  Θεωρούμε το στοιχείο $e = (I, 0)$ με I τον μοναδιαίο 4x4 πίνακα και 0 τον μηδενικό 4x1. Αν $g = (L, b) \in \mathfrak{L}$ τότε:
  $g * e = (L, b) * (I, 0) = (LI, L0 + b) = (L, b) = g$ και
  $e * g = (I, 0) * (L, b) = (IL, Ib + 0) = (L, b) = g$

- Ύπαρξη αντιστρόφου
  Έστω $g = (L, b) \in \mathfrak{L}$. Θέτουμε $L' = L^{-1}$ και $b' = -L^{-1}b$

  Ισχύει ότι:
  $L^T \eta L = \eta \Rightarrow \eta L^T \eta L = \eta\eta \Rightarrow \eta L^T \eta L = I \Rightarrow L \eta L^T \eta = I \Rightarrow$
  $L \eta L^T \eta\eta = \eta \Rightarrow L \eta L^T = \eta \Rightarrow (L\eta L^T)^{-1} = \eta^{-1} \Rightarrow$
  $(L^T)^{-1} \eta L^{-1} = \eta \Rightarrow (L^{-1})^T \eta L^{-1} = \eta \Rightarrow L'^T \eta L' = \eta$

  Σχόλιο
  Στην πορεία της απόδειξης βρήκαμε σαν ενδιάμεση σχέση ότι

$$\alpha^2 = 1 + u^T u \Rightarrow \alpha^2 \geq 1 \Rightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1 \Rightarrow \Lambda^0{}_0 \geq 1 \text{ ή } \Lambda^0{}_0 \leq -1$$

Επίσης εξισώνοντας τις ορίζουσες των δύο μελών της βασικής σχέσης προκύπτει ότι:

$$L^T \eta L = \eta \Rightarrow |L|^2 = 1 \Rightarrow |L| = \pm 1$$

Επομένως το σύνολο των μετασχηματισμών Lorentz χωρίζεται σε τέσσερα υποσύνολα :

$$\begin{array}{ll} \Lambda^0{}_0 \geq 1, |L| = 1 & \Lambda^0{}_0 \geq 1, |L| = -1 \\ \Lambda^0{}_0 \leq -1, |L| = 1 & \Lambda^0{}_0 \leq -1, |L| = -1 \end{array}$$

Από αυτά μόνο το πρώτο περιέχει τον μοναδιαίο πίνακα και ονομάζεται **ορθόχρονη κανονική ομάδα Lorentz (proper Lorentz group)**. Οι ιδιότητες της ορθόχρονης κανονικής ομάδας Lorentz συνοψίζονται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.4.2 *Θεωρούμε το υποσύνολο $\mathfrak{L}_N$ της ομάδας Lorentz που αποτελείται από στοιχεία $g = (L, b)$ με |L|=1 και $\Lambda^0{}_0 \geq 1$. Το σύνολο αυτό αποτελεί υποομάδα της ομάδας Lorentz*

Απόδειξη

- Κλειστότητα
  Έστω $g_1 = (L_1, b_1)$ και $g_2 = (L_2, b_2) \in \mathfrak{L}_N$.
  Θα αποδείξουμε ότι το $g = g_2 * g_1 = (L_2L_1, L_2b_1 + b_2) \in \mathfrak{L}_N$.
  Επειδή τα g_1 και g_2 είναι στοιχεία της ομάδας Lorentz θα έχουμε κατά τα γνωστά ότι
  $L_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & u_1^T \\ v_1 & \Delta_1 \end{bmatrix}$ και $L_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 & u_2^T \\ v_2 & \Delta_2 \end{bmatrix}$
  με $|\vec{u}_1|^2 = \alpha_1^2 - 1$, $|\vec{u}_2|^2 = \alpha_2^2 - 1$ $|\vec{v}_1|^2 = \alpha_1^2 - 1$, $|\vec{v}_2|^2 = \alpha_2^2 - 1$

  Επιπλέον επειδή $g_1, g_2 \in \mathfrak{L}_N$ θα είναι $\alpha_1 \geq 1$, $\alpha_2 \geq 1$, $|L_1| = 1$, $|L_2| = 1$.
  Για το γινόμενο $L = L_2L_1$ ισχύει ότι: $|L| = |L_2||L_1| = 1$ και
  $L = L_2L_1 = \begin{bmatrix} \alpha_2 & u_2^T \\ v_2 & \Delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & u_1^T \\ v_1 & \Delta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & ... \\ ... & ... \end{bmatrix}$
  με $\alpha = \alpha_2\alpha_1 + u_2^T v_1$
  Από την ανισότητα του Shwartz συμπεραίνουμε ότι:
  $|u_2^T v_1| = |\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1| = \sqrt{\alpha_2^2 - 1}\sqrt{\alpha_1^2 - 1} \leq |\alpha_2||\alpha_1| = \alpha_1\alpha_2 \Rightarrow |u_2^T v_1| \leq \alpha_1\alpha_2 \Rightarrow -\alpha_1\alpha_2 \leq u_2^T v_1 \leq \alpha_1\alpha_2 \Rightarrow u_2^T v_1 + \alpha_1\alpha_2 \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq 0$

- Ουδέτερο στοιχείο
  Επειδή $I^0{}_0 \geq 1$ και |I|=1 συμπεραίνουμε ότι $e \in \mathfrak{L}_N$

- Αντίστροφο στοιχείο
  Έστω $g = (L, b) \in \mathfrak{L}_N$
  Θα αποδείξουμε ότι το αντίστροφο στοιχείο $g' = (L^{-1}, -L^{-1}b) \in \mathfrak{L}_N$
  Κατά τα γνωστά $L = \begin{bmatrix} \alpha_1 & u_1^T \\ v_1 & \Delta_1 \end{bmatrix}$ και $L^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_2 & u_2^T \\ v_2 & \Delta_2 \end{bmatrix}$
  με $|\vec{u}_1|^2 = \alpha_1^2 - 1$ και $|\vec{v}_2|^2 = \alpha_2^2 - 1$.

  Επειδή $g \in \mathfrak{L}_N \Rightarrow \alpha_1 \geq 0$. Επειδή δε $g' \in \mathfrak{L}$ αρκεί να δείξουμε ότι $\alpha_2 \geq 0$.
  Επειδή οι L καιL^{-1} είναι αντίστροφοι πίνακες πρέπει:

  $LL^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 & u_1^T \\ v_1 & \Delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 & u_2^T \\ v_2 & \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1\alpha_2 + u_1^T v_2 = 1.$

  Από την ανισότητα του Shwartz προκύπτει ότι:

$|u_1^T v_2| = |\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1| = \sqrt{\alpha_2^2 - 1}\sqrt{\alpha_1^2 - 1} \leq |\alpha_2||\alpha_1| = \alpha_1|\alpha_2| \Rightarrow$
$|u_1^T v_2| \leq \alpha_1|\alpha_2| \Rightarrow -\alpha_1|\alpha_2| \leq u_1^T v_2 \leq \alpha_1|\alpha_2| \Rightarrow u_1^T v_2 + \alpha_1\alpha_2 \leq \alpha_1|\alpha_2| + \alpha_1\alpha_2 \Rightarrow 1 \leq \alpha_1(\alpha_2 + |\alpha_2|)$

Αν $\alpha_2 < 0$ τότε $|\alpha_2| = -\alpha_2$ και η τελευταία σχέση γίνεται $1 \leq 0$ που είναι άτοπο. Επομένως $\alpha_2 \geq 0$.

3.5 Σύνοψη και τυπολόγιο

⊙ Στον χωροχρόνο ορίζεται χωροχρονική απόσταση δύο χωροχρονικών σημείων μέσω της ποσότητας

$$\Delta S^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta \vec{x})^2$$

Η παράσταση αυτή μπορεί να γραφτεί συναρτήσει των συντεταγμένων των σημείων ως

$$\Delta S^2 = \eta_{\mu\nu}(\Delta x)^\mu(\Delta x)^\nu$$

και σε συμβολισμό πινάκων συντεταγμένων

$$\Delta S^2 = (\Delta X)^T \eta (\Delta X)$$

⊙ Ο συναλλοίωτος και ο ανταλλοίωτος μετρικός τανυστής είναι αντίστοιχα

$$[\eta_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

και

$$[\eta^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Οι δύο πίνακες είναι ο ένας αντίστροφος του άλλου και επομένως ικανοποιούν τη σχέση $\eta^{\mu\rho}\eta_{\varrho\nu} = \delta^\mu_\nu$.

⊙ Μετασχηματισμός Lorentz είναι κάθε γραμμικός μετασχηματισμός

$$X' = LX + b \Leftrightarrow x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu$$

που αφήνει την ποσότητα ΔS^2 αμετάβλητη. Η απαίτηση αυτή σε συμβολισμό πινάκων γράφεται ως

$$L^T \eta L = \eta \Leftrightarrow L \eta L^T = \eta$$

και σε συμβολισμό συντεταγμένων

$$L^\mu{}_\rho \eta_{\mu\nu} L^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \Leftrightarrow L^\mu{}_\rho \eta^{\rho\sigma} L^\nu{}_\sigma = \eta^{\mu\nu}$$

⊙ Ειδική περίπτωση μετασχηματισμού Lorentz αποτελούν οι προωθήσεις.
Ο αντίστοιχος πίνακας είναι :

$$\Lambda(\beta) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta^T \\ -\gamma\beta & I + \frac{\gamma-1}{|\vec{\beta}|^2}\beta\beta^T \end{bmatrix}$$

όπου $\gamma = \gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-|\vec{\beta}|^2}}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}\ , \quad |\vec{\beta}| < 1$
με στοιχεία

$$\begin{array}{ll} \Lambda^0{}_0 = \gamma & \Lambda^0{}_i = -\gamma\beta^i \\ \Lambda^i{}_0 = -\gamma\beta^i & \Lambda^i{}_j = \delta^i_j + \frac{\gamma-1}{|\vec{\beta}|^2}\beta^i\beta^j \end{array}$$

⊙ Αν θεωρήσουμε δύο διαδοχικές προωθήσεις με ταχύτητες v_1 και v_2 *κατά την ίδια διεύθυνση*, τότε η σύνθετη προώθηση αντιστοιχεί σε ταχύτητα

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

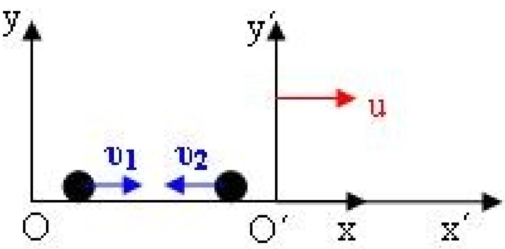
στην ίδια και πάλι διεύθυνση.

Κεφάλαιο 4

ΤΑ ΜΕΓΕΘΗ ΤΗΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

4.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε την μετωπική ελαστική κρούση δύο σφαιρών μαζών $m_1 = m$ και $m_2 = 3m$ που κινούνται αρχικά με ταχύτητες $v_{1A} = v_0 = 0.6c$ και $v_{2A} = -v_0$ αντιστοίχως ως προς ένα ΑΣΑ Ο. Μελετώντας το πρόβλημα με τις έννοιες και τις αρχές της κλασσικής μηχανικής (διατήρηση της ορμής και της ενέργειας) μπορούμε να υπολογίσουμε τις ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση: $v_{1T} = -2v_0$ και $v_{2T} = 0$.



Ας προσπαθήσουμε να επιβεβαιώσουμε την αρχή διατήρησης της ορμής σε ένα άλλο ΑΣΑ Ο΄, που κινείται κατά την διεύθυνση του άξονα x, με ταχύτητα $u = 0.6c$ ως προς το πρώτο, χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Lorentz.

Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα υ ενός σωματιδίου που κινείται κατά την διεύθυνση x στο Ο με την ταχύτητα του υ΄ στο Ο΄ συνδέονται με την σχέση:

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

Μπορούμε επομένως να υπολογίσουμε τις ορμές των σωματιδίων πριν και μετά την κρούση στο σύστημα Ο΄ και να εξετάσουμε αν είναι ίσες. Ισχύει λοιπόν ότι:

$p'_A = mv'_{1A} + 3mv'_{2A} = m\frac{v_{1A}-u}{1-\frac{v_{1A}u}{c^2}} + 3m\frac{v_{2A}-u}{1-\frac{v_{2A}u}{c^2}} = m\frac{v_0-u}{1-\frac{uv_0}{c^2}} + 3m\frac{-v_0-u}{1+\frac{uv_0}{c^2}} \simeq -2.6mc$

$p'_T = mv'_{1T} + 3mv'_{2T} = m\frac{v_{1T}-u}{1-\frac{v_{1T}u}{c^2}} + 3m\frac{v_{2T}-u}{1-\frac{v_{2T}u}{c^2}} = m\frac{-2v_0-u}{1+\frac{2uv_0}{c^2}} + 3m\frac{0-u}{1} \simeq -4.7mc$

Αναδεικνύεται λοιπόν το εξής πρόβλημα: Αν διατηρήσουμε τον κλασσικό ορισμό της ορμής και προσπαθήσουμε να τον συνδυάσουμε με τους μετασχηματισμούς Lorentz, τότε παραβιάζεται η αρχή διατήρησης της ορμής. Όμως η αρχή διατήρησης της ορμής είναι μια αρχή την οποία δεν αποχωρίζεται εύκολα ένας φυσικός. Η μόνη λογική λύση, στο πρόβλημα που εμφανίστηκε, είναι **η αλλαγή του ορισμού της έννοιας ορμή**.

Στο κεφάλαιο αυτό θα επαναορίσουμε τις γνωστές έννοιες (ορμή, ενέργεια, κλπ) έτσι ώστε και οι νόμοι διατήρησης να ισχύουν και οι ορισμοί αυτοί να είναι συμβατοί με τους μετασχηματισμούς Lorentz.

4.2 Χωροχρονική απόσταση και ιδιόχρονος

Θεωρούμε δύο χωροχρονικά σημεία P και Q . Έχουμε ορίσει την ποσότητα

$$\Delta S^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta\vec{x})^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta\vec{x})^2 = \eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu$$

Ας σημειώσουμε ότι η ποσότητα αυτή μπορεί να πάρει και θετικές και αρνητικές τιμές.
Για παράδειγμα αν το σημείο P είναι το $(0,0,0,0)$ και το σημείο Q είναι το $(\alpha,0,0,0)$ τότε εύκολα φαίνεται ότι $\Delta S^2 = -\alpha^2$. Αν το Q είναι το $(0,\alpha,0,0)$ τότε $\Delta S^2 = \alpha^2$ και αν το Q είναι το $(\alpha,\alpha,0,0)$ τότε $\Delta S^2 = 0$.

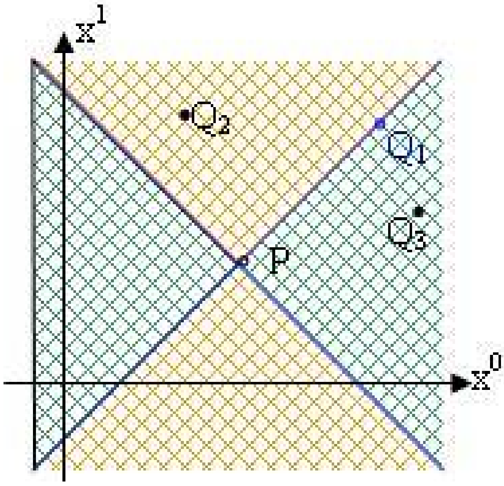
Χαρακτηρίζουμε το διάνυσμα της χωροχρονικής μετατόπισης PQ αναλόγως του προσήμου της παράστασης ΔS^2 για τα σημεία αυτά ως:

Χωροειδές	$\Delta S^2 > 0$
Χρονοειδές	$\Delta S^2 < 0$
Φωτοειδές	$\Delta S^2 = 0$

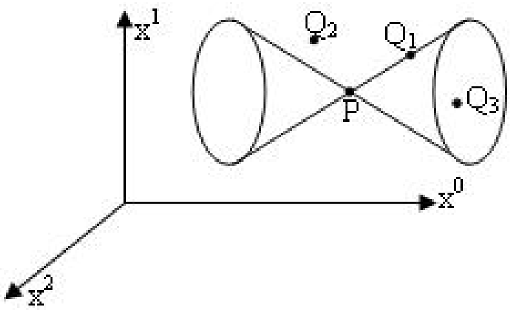
Σχόλια

1)Αν θεωρήσουμε δύο ΑΣΑ τότε όπως γνωρίζουμε ισχύει ότι $\Delta S^2 = \Delta S'^2$. Επομένως οι παραπάνω χαρακτηρισμοί είναι ανεξάρτητοι συστήματος συντεταγμένων.
2) Αν θεωρήσουμε την διάδοση ενός φωτεινού σήματος τότε ισχύει ότι:
$\left|\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}\right| = c \Rightarrow (\Delta\vec{x})^2 = c^2(\Delta t)^2 \Rightarrow \Delta S^2 = 0$.
3) Αν θεωρήσουμε την κίνηση ενός υλικού σημείου τότε ισχύει ότι:
$\left|\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}\right| < c \Rightarrow (\Delta\vec{x})^2 < c^2(\Delta t)^2 \Rightarrow \Delta S^2 < 0$.
4) Οι ορισμοί που δώσαμε δικαιολογούνται από το εξής: Αν θεωρήσουμε ένα χωροχρονικό διάνυσμα παράλληλο στον άξονα των χρόνων τότε εύκολα φαίνεται ότι $\Delta S^2 < 0$. Αντιθέτως αν θεωρήσουμε ένα χωροχρονικό διάνυσμα παράλληλο στον άξονα x τότε $\Delta S^2 > 0$.

5) Ας περιοριστούμε προς το παρόν σε δύο χωροχρονικές διαστάσεις (x^0, x). Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο P του χωροχρόνου. Χαράσσουμε τις ευθείες που διέρχονται από το P και είναι παράλληλες προς τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων. Αν θεωρήσουμε ένα σημείο Q_1 στις ευθείες αυτές τότε εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το PQ_1 είναι φωτοειδές. Αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε σημείο Q_2 στην περιοχή των δύο γωνιών που περιέχουν την παράλληλη στον άξονα των θέσεων τότε το PQ_2 είναι χωροειδές και για ένα σημείο Q_3 στην περιοχή των δύο γωνιών που περιέχουν την παράλληλη στον άξονα των χρόνων το PQ_3 είναι χρονοειδές.



6) Αν επεκτείνουμε τα παραπάνω σε χωροχρόνο με δύο χωρικές διαστάσεις, τότε οι φωτοειδείς ευθείες αντιστοιχούν σε κωνική επιφάνεια (κώνος φωτός) με κορυφή το P, το σύνολο των σημείων Q_3 για τα οποία το PQ_3 είναι χρονοειδές είναι το εσωτερικό του κώνου και το σύνολο των σημείων Q_2 για τα οποία το PQ_2 είναι χωροειδές είναι το εξωτερικό του κώνου.



Δεν είναι δυνατόν να σχεδιάσουμε διαγράμματα που να απεικονίζουν και τις 4 συντεταγμένες.

Ας θεωρήσουμε τώρα την κίνηση ενός σωματιδίου. Το σημείο αυτό διαγράφει μια γραμμή στον χωροχρόνο. Για δύο γειτονικά σημεία στην γραμμή αυτή ισχύει ότι $dS^2 < 0$ και επομένως το εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη που διαγράφει είναι χρονοειδές, αφού το σωματίδιο κινείται με $v < c$.

Η ποσότητα

$$d\tau = \frac{\sqrt{-dS^2}}{c}$$

είναι καλώς ορισμένη, έχει μονάδες χρόνου, είναι ανεξάρτητη από ΑΣΑ και ονομάζεται (απειροστός) **ιδιόχρονος** του σωματιδίου.

Ο παραπάνω ορισμός δικαιολογείται από τα εξής :
Αν υποθέσουμε ότι το σωματίδιο είναι ακίνητο ($d\vec{x} = 0$) τότε
$dS^2 = -(dx^0)^2 = -c^2dt^2 \Rightarrow d\tau = dt.$
Αν δε το σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, τότε στο σύστημα ηρεμίας του είναι $d\tau = dt$. Επομένως ο ιδιόχρονος ισούται με την χρονική διάρκεια σε ένα ΑΣΑ ως προς το οποίο το σωματίδιο ηρεμεί.

Σε κάθε περίπτωση κίνησης, ομαλής ή όχι, η ποσότητα τ είναι μια καλώς ορισμένη μαθηματική ποσότητα και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επαναπαραμετροποίηση της καμπύλης που διαγράφει το σωματίδιο στον χωροχρόνο.

Παράδειγμα

Θεωρούμε ένα σωματίδιο που κινείται με σταθερή επιτάχυνση κατά την διεύθυνση του άξονα x με εξίσωση κίνησης $x = t^2$. Η καμπύλη που διαγράφει στο επίπεδο (t, x) είναι η καμπύλη με εξίσωση $x = t^2$. Θεωρούμε σαν παράμετρο λ τον χρόνο και έχουμε την καμπύλη σε παραμετρική μορφή $(t = \lambda, x = \lambda^2)$. Υπολογίζουμε το διαφορικό του ιδιόχρονου
$d\tau = \frac{\sqrt{-dS^2}}{c} = \frac{\sqrt{c^2dt^2-dx^2}}{c} = \frac{\sqrt{c^2-4\lambda^2}}{c}d\lambda$
Ολοκληρώνοντας μπορούμε να εκφράσουμε το λ συναρτήσει του τ και επομένως το t και το x συναρτήσει του τ.

Ας θεωρήσουμε δύο χωροχρονικά σημεία Α και Β. Τίθεται το εξής ερώτημα: Υπάρχει μετασχηματισμός συντεταγμένων τέτοιος ώστε στο νέο σύστημα αναφοράς τα γεγονότα να είναι ταυτόχρονα ή ταυτόχωρα (να συμβαίνουν στην ίδια θέση;)

Γνωρίζουμε ότι κάτω από ένα μετασχηματισμό Lorentz η ποσότητα $\Delta S^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta\vec{x}^2$ παραμένει αμετάβλητη.
Ας υποθέσουμε ότι το διάνυσμα της χωροχρονικής μετατόπισης ΑΒ είναι χρονοειδές. Αυτό σημαίνει ότι $\Delta S^2 < 0$. Επομένως δεν είναι δυνατόν να ισχύει ότι $\Delta t = 0$.
Αν το ΑΒ είναι χωροειδές τότε $\Delta S^2 > 0$. Αυτό σημαίνει ότι δεν είναι δυνατόν να μηδενιστεί το χωρικό μέρος $\Delta\vec{x}$.
Διαπιστώσαμε ότι σε ένα χρονοειδές διάνυσμα ΑΒ δεν είναι δυνατόν να μηδενίσουμε το χρονικό του μέρος και σε ένα χωροειδές δεν είναι δυνατόν να μηδενίσουμε το χωρικό. Είναι όμως δυνατόν σε ένα χρονοειδές να μηδενίσουμε το χωρικό και σε ένα χωροειδές να μηδενίσουμε το χρονικό; Όπως φαίνεται από τα επόμενα θεωρήματα η απάντηση είναι καταφατική και για τα δύο.

Θεώρημα 4.2.1 *Έστω ΑΒ ένα χρονοειδές διάνυσμα χωροχρονικής μετατόπισης. Υπάρχει προώθηση Lorentz στην οποία τα γεγονότα συμβαίνουν στην ίδια θέση. Η* *ταχύτητα του μετασχηματισμού δίνεται από την σχέση:*

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{x}_{AB}}{\Delta t_{AB}}$$

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε κατ' αρχάς την περίπτωση που και τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στον άξονα x. Επομένως $\Delta y_{AB} = \Delta z_{AB} = 0$.

Επειδή το AB είναι χρονοειδές ισχύει ότι:

$$\Delta S^2_{AB} < 0 \Rightarrow -c^2\Delta t^2_{AB} + \Delta x^2_{AB} < 0 \Rightarrow |\Delta x_{AB}| < c|\Delta t_{AB}|$$

Θεωρούμε έναν μετασχηματισμό Lorentz στην διεύθυνση του άξονα x. Ισχύει ότι $\Delta x'_{AB} = \gamma(\Delta x_{AB} - v\Delta t_{AB})$.
Επιλέγοντας $v = \frac{\Delta x_{AB}}{\Delta t_{AB}} < c$ επιτυγχάνουμε τα A, B να συμβαίνουν στην ίδια θέση.

Στην γενική περίπτωση, αρκεί να θεωρήσουμε ως άξονα x το χωρικό μέρος του AB και να θεωρήσουμε ταχύτητα στην διεύθυνση του $\Delta\vec{x}_{AB}$.
Επειδή το AB είναι χρονοειδές ισχύει ότι:

$$\Delta S^2_{AB} < 0 \Rightarrow -c^2\Delta t^2_{AB} + \Delta\vec{x}^2_{AB} < 0 \Rightarrow |\Delta\vec{x}_{AB}| < c|\Delta t_{AB}|$$

Θεωρούμε έναν μετασχηματισμό Lorentz στην διεύθυνση του $\Delta\vec{x}_{AB}$ με ταχύτητα $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{x}_{AB}}{\Delta t_{AB}} \Rightarrow |\vec{v}| < c$. Ισχύει ότι $\Delta\vec{x}\,'_{AB} = \gamma(\Delta\vec{x}_{AB} - \vec{v}\Delta t_{AB}) = 0$.

Θεώρημα 4.2.2 *Έστω AB ένα χωροειδές διάνυσμα χωροχρονικής μετατόπισης. Υπάρχει προώθηση Lorentz στην οποία τα γεγονότα συμβαίνουν την ίδια χρονική στιγμή (είναι ταυτόχρονα).Η ταχύτητα του μετασχηματισμού δίνεται από την σχέση :*

$$\vec{v} = c^2\frac{\Delta t_{AB}}{|\Delta\vec{x}_{AB}|^2}\Delta\vec{x}_{AB}$$

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε κατ' αρχάς την περίπτωση που και τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στον άξονα x. Επειδή το AB είναι χωροειδές ισχύει ότι:

$$\Delta S^2_{AB} > 0 \Rightarrow -c^2\Delta t^2_{AB} + \Delta x^2_{AB} > 0 \Rightarrow c|\Delta t_{AB}| < |\Delta x_{AB}|$$

Θεωρούμε έναν μετασχηματισμό Lorentz στην διεύθυνση του άξονα x.
Ισχύει ότι $\Delta t'_{AB} = \gamma(\Delta t_{AB} - \frac{v}{c^2}\Delta x_{AB})$.
Επιλέγοντας $v = c^2\frac{\Delta t_{AB}}{\Delta x_{AB}} < c$ επιτυγχάνουμε τα A, B να συμβαίνουν την ίδια στιγμή.

Στην γενική περίπτωση, αρκεί να θεωρήσουμε ως άξονα x το χωρικό μέρος του AB, και να θεωρήσουμε ταχύτητα στην διεύθυνση του $\Delta\vec{x}_{AB}$.
Επειδή το AB είναι χρονοειδές ισχύει ότι:

$$\Delta S^2_{AB} > 0 \Rightarrow c|\Delta t_{AB}| < |\Delta\vec{x}_{AB}|$$

Προφανώς **δεν** μπορούμε να γράψουμε ότι $\vec{v} = c^2\frac{\Delta t_{AB}}{\Delta\vec{x}_{AB}}$.

Έστω $\hat{n} = \frac{\Delta\vec{x}_{AB}}{|\Delta\vec{x}_{AB}|}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\Delta\vec{x}_{AB}$. Θέλουμε η ταχύτητα να έχει την κατεύθυνση του $\hat{n}$ και μέτρο $|\vec{v}| = c^2\frac{\Delta t_{AB}}{|\Delta\vec{x}_{AB}|}$
Επομένως υπάρχει λ>0 τέτοιος ώστε

$$\vec{v} = \lambda\hat{n} \Rightarrow \lambda = |\vec{v}| = c^2\frac{\Delta t_{AB}}{|\Delta\vec{x}_{AB}|}$$

Άρα

$$\vec{v} = \lambda\hat{n} = c^2\frac{\Delta t_{AB}}{|\Delta\vec{x}_{AB}|}\frac{\Delta\vec{x}_{AB}}{|\Delta\vec{x}_{AB}|} \Rightarrow \vec{v} = c^2\frac{\Delta t_{AB}}{|\Delta\vec{x}_{AB}|^2}\Delta\vec{x}_{AB}$$

Ισχύει ότι $\Delta t'_{AB} = \gamma(\Delta t_{AB} - \frac{\vec{v}\cdot\Delta\vec{x}_{AB}}{c^2}) = 0$.

4.3 Τετραταχύτητα

Θεωρούμε ένα σωματίδιο, το οποίο διαγράφει στον χωροχρόνο μια γραμμή με παραμετρική μορφή $x^\mu = x^\mu(\tau)$. Ονομάζουμε τετραταχύτητα του σωματιδίου ως προς ένα ΑΣΑ την παράγωγο της χωροχρονικής θέσης ως προς τον ιδιόχρονο τ. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}\ ,\ \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{4.3.1}$$

Συμβολίζουμε με U την τετραταχύτητα (πίνακας στήλη) και με u^μ τις συνιστώσες της ($U = [u^\mu]$).

Οι ιδιότητες της τετραταχύτητας συνοψίζονται στην επόμενη προταση:

Θεώρημα 4.3.1 *Η τετραταχύτητα έχει τις εξής ιδιότητες:*

1. *Ισχύει ότι :*

$$u^\mu u_\mu = -c^2 \tag{4.3.2}$$

2. *Σχέση ταχύτητας και τετραταχύτητας:*
Θεωρούμε ένα υλικό σημείο, το οποίο, (ως προς κάποιο ΑΣΑ) την χρονική στιγμή t βρίσκεται στην θέση $\vec{x}$ έχοντας ταχύτητα (συνήθη χωρική ταχύτητα) $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$. Ισχύει ότι:

$$U = [u^\mu] = \gamma\begin{bmatrix} c \\ \vec{v} \end{bmatrix} \tag{4.3.3}$$

με $\gamma = \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

3. *Αν $\vec{u}$ είναι το χωρικό μέρος του διανύσματος της τετραταχύτητας τότε*

$$\frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{u}}{u^0} \tag{4.3.4}$$

4. *Το συναλλοίωτο τετράνυσμα της τετραταχύτητας είναι*

$$U_{\sigma\upsilon\nu} = [u_\mu] = \gamma(v) \begin{bmatrix} -c \\ \vec{v} \end{bmatrix} \tag{4.3.5}$$

5. *Νόμος μετασχηματισμού της τετραταχύτητας.*
Θεωρούμε ένα μετασχηματισμό Lorentz $x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu$.
Για τις τετραταχύτητες u και u΄ ισχύει ότι:

$$U' = LU \Leftrightarrow u'^\mu = L^\mu{}_\nu u^\nu \tag{4.3.6}$$

6. *Νόμος μετασχηματισμού του συναλλοίωτου διανύσματος της τετραταχύτητας.*
Για τα συναλλοίωτα διανύσματα u_μ και u'_μ ισχύει ότι:

$$u'_\mu = L_\mu{}^\nu u_\nu \tag{4.3.7}$$

όπου

$$L_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\rho} L^\rho{}_\sigma \eta^{\sigma\nu} \tag{4.3.8}$$

7. *Μετασχηματισμός τετρανύσματος και μετασχηματισμός συντεταγμένων.*
Ισχύουν οι σχέσεις:

(Î±Í΄)

$$u'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} u^\nu \tag{4.3.9}$$

(Î²Í΄)

$$u'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} u_\nu \tag{4.3.10}$$

<u>*Απόδειξη*</u>

1. $u^\mu u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{dS^2}{d\tau^2} = -c^2$

2. $dS^2 = -(dx^0)^2 + (d\vec{x})^2 = -c^2 dt^2 + (d\vec{x})^2 = -dt^2 \left[c^2 - \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2 \right] \Rightarrow$
$-c^2 d\tau^2 = -dt^2(c^2 - v^2) \Rightarrow d\tau^2 = \frac{dt^2}{\gamma^2} \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \gamma \Rightarrow \frac{dx^0}{d\tau} = \gamma c \Rightarrow u^0 = \gamma c$
Επίσης $u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma v^i$

3. Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι $\frac{\vec{u}}{u^0} = \frac{\gamma \vec{v}}{\gamma c} = \frac{\vec{v}}{c}$

4. Το αντίστοιχο συναλλοίωτο τετράνυσμα είναι $u_\mu = \eta_{\mu\nu}u^\nu$. Επομένως σαν πίνακας στήλη είναι το γινόμενο του η με το ανταλλοίωτο διάνυσμα της τετραταχύτητας.
$U_{\sigma\upsilon\nu} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \eta U = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} =$
$\gamma \begin{bmatrix} -c \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} -c \\ \vec{v} \end{bmatrix}$

5. Θεωρούμε ένα μετασχηματισμό Lorentz :
$x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu \Rightarrow dx'^\mu = L^\mu{}_\nu dx^\nu \Rightarrow \frac{dx'^\mu}{d\tau} = L^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} \Rightarrow u'^\mu = L^\mu{}_\nu u^\nu$

6. Ισχύει ότι:
$u'_\mu = \eta_{\mu\nu}u'^\nu = \eta_{\mu\nu}L^\nu{}_\sigma u^\sigma = \eta_{\mu\nu}L^\nu{}_\sigma \eta^{\sigma\kappa}u_\kappa$
Θέτουμε $L_\mu{}^\kappa = \eta_{\mu\nu}L^\nu{}_\sigma \eta^{\sigma\kappa}$.
Η παραπάνω σχεση μετατρέπεται στην: $u'_\mu = L_\mu{}^\kappa u_\kappa$

   Παρατηρούμε ότι το ανταταλλοίωτο και το συναλλοίωτο διάνυσμα της τετραταχύτητας δεν έχουν μόνο διαφορετικές τιμές, αλλά και διαφορετικό νόμο μετασχηματισμού.

7.(Î±Í´) Πρέπει να παραγωγίσουμε τα x´ συναρτήσει των x .
Υπενθυμίζουμε ότι $\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = \delta^\nu_\rho$.
Ισχύει ότι:

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} = \frac{\partial(L^\mu{}_\nu x^\nu)}{\partial x^\rho} = L^\mu{}_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = L^\mu{}_\nu \delta^\nu_\rho = L^\mu{}_\rho \Rightarrow$$
$$\boxed{\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} = L^\mu{}_\rho}$$

Αντικαθιστώντας στον νόμο μετασχηματισμού του ανταλλοίωτου διανύσματος της ταχύτητας προκύπτει ότι
$u'^\mu = L^\mu{}_\nu u^\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}u^\nu$

(Î²Í´) Για να αποδείξουμε την δεύτερη σχέση θα πρέπει πρώτα να αντιστρέψουμε τον μετασχηματισμό (να εκφράσουμε τα x συναρτήσει των x´).
Ο μετασχηματισμός συντεταγμένων είναι: $x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu$
«Πολλαπλασιάζοντας» και τα δύο μέλη με $\eta_{\mu\kappa}L^\kappa{}_\rho$ προκύπτει ότι
$\eta_{\mu\kappa}L^\kappa{}_\rho x'^\mu = \eta_{\mu\kappa}L^\kappa{}_\rho L^\mu{}_\nu x^\nu + \eta_{\mu\kappa}L^\kappa{}_\rho b^\mu$ (1)
Όμως από την βασική ιδιότητα του L γνωρίζουμε ότι :

$\eta_{\mu\kappa}L^{\kappa}{}_{\rho}L^{\mu}{}_{\nu} = \eta_{\nu\rho}$

Επομένως η (1) γίνεται: $\eta_{\mu\kappa}L^{\kappa}{}_{\rho}x'^{\mu} = \eta_{\nu\rho}x^{\nu} + \eta_{\mu\kappa}L^{\kappa}{}_{\rho}b^{\mu}$ (2)

«Πολλαπλασιάζουμε» και τα δύο μέλη της (2) με $\eta^{\rho\sigma}$:

$\eta^{\rho\sigma}\eta_{\mu\kappa}L^{\kappa}{}_{\rho}x'^{\mu} = \eta^{\rho\sigma}\eta_{\nu\rho}x^{\nu} + \eta^{\rho\sigma}\eta_{\mu\kappa}L^{\kappa}{}_{\rho}b^{\mu} \Rightarrow$

$L_{\mu}{}^{\sigma}x'^{\mu} = \delta^{\sigma}_{\nu}x^{\nu} + L_{\mu}{}^{\sigma}b^{\mu} \Rightarrow L_{\mu}{}^{\sigma}x'^{\mu} = x^{\sigma} + L_{\mu}{}^{\sigma}b^{\mu} \Rightarrow$

$x^{\sigma} = L_{\mu}{}^{\sigma}x'^{\mu} - L_{\mu}{}^{\sigma}b^{\mu}$

Παραγωγίζοντας τα x ως προς τα x΄ συμπεραίνουμε ότι:

$$\boxed{\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} = L_{\mu}{}^{\sigma}}$$

Αντικαθιστώντας στο νόμο μετασχηματισμού για το συναλλοίωτο διάνυσμα της τετραταχύτητας προκύπτει ότι:

$u'_{\mu} = L_{\mu}{}^{\kappa}u_{\kappa} \Rightarrow u'_{\mu} = \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}}u_{\kappa}$

Όπως φαίνεται από το παρακάτω θεώρημα, με την βοήθεια της τετραταχύτητας μπορούμε να βρούμε σχετικά εύκολα το νόμο μετασχηματισμού της ταχύτητας.

Θεώρημα 4.3.2 *Νόμος μετασχηματισμού της ταχύτητας.*

Θεωρούμε δύο ΑΣΑ Ο και Ο΄. Έστω ότι το Ο΄ κινείται με ταχύτητα $\vec{\mathrm{v}}$ ως προς το Ο. Έστω δε ένα σωματίδιο, το οποίο έχει ταχύτητα $\vec{v}$ ως προς το Ο και ταχύτητα $\vec{v}\,'$ ως προς το Ο΄. Οι ταχύτητες $\vec{v}$ και $\vec{v}\,'$ συνδέονται με την σχέση:

$$\vec{v}\,' = \frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)}\left[\vec{v} - \gamma\vec{\mathrm{v}} + \frac{(\gamma-1)(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{v})}{\vec{\mathrm{v}}^{\,2}}\vec{\mathrm{v}}\right] \tag{4.3.11}$$

<u>*Απόδειξη*</u>

Η τετραταχύτητα του σωματιδίου στα Ο και Ο΄ είναι

$U = \begin{bmatrix} u^0 \\ \vec{u} \end{bmatrix}$ και $U' = \begin{bmatrix} u'^0 \\ \vec{u}\,' \end{bmatrix}$.

Ο μετασχηματισμός Lorentz που συνδέει το Ο με το Ο΄ είναι ο

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta^T \\ -\gamma\beta & I + \lambda\beta\beta^T \end{bmatrix} \text{ με } \vec{\beta} = \frac{\vec{\mathrm{v}}}{c}, \lambda = \frac{\gamma-1}{\beta^2} \text{ και } \gamma = \gamma(\vec{\beta})$$

Ο νόμος μετασχηματισμού της τετραταχύτητας είναι :

$$U' = \Lambda U \Rightarrow \begin{bmatrix} u'^0 \\ \vec{u}\,' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta^T \\ -\gamma\beta & I + \lambda\beta\beta^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u^0 \\ \vec{u} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} u'^0 \\ \vec{u}\,' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma u^0 - \gamma\beta^T\vec{u} \\ -\gamma\beta u^0 + \vec{u} + \lambda\beta\beta^T\vec{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma u^0 - \gamma(\vec{\beta}\cdot\vec{u}) \\ -\gamma\vec{\beta}u^0 + \vec{u} + \lambda\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{u}) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$u'^0 = \gamma u^0 - \gamma(\vec{\beta}\cdot\vec{u}) \quad (1)$$
$$\vec{u}' = -\gamma\vec{\beta}u^0 + \vec{u} + \lambda\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{u}) \quad (2)$$

Γνωρίζουμε την σχέση ταχύτητας και τετραταχύτητας:

$$\vec{v} = c\frac{\vec{u}}{u^0} \Rightarrow \vec{u} = c^{-1}u^0\vec{v} \text{ και } \vec{v}' = c\frac{\vec{u}'}{u'^0}$$

Αντικαθιστώντας τις συνιστώσες της u' από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\vec{v}' = c\frac{-\gamma\vec{\beta}u^0 + c^{-1}u^0\vec{v} + \lambda\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{v})c^{-1}u^0}{\gamma u^0 - \gamma(\vec{\beta}\cdot\vec{v})c^{-1}u^0} = \frac{-\gamma\vec{\mathrm{v}} + \vec{v} + \lambda\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{v})}{\gamma - \gamma(\vec{\beta}\cdot\vec{v})c^{-1}} \Rightarrow$$
$$\vec{v}' = \frac{-\gamma\vec{\mathrm{v}} + \vec{v} + \lambda\vec{\mathrm{v}}(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{v})c^{-2}}{\gamma - \gamma(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{v})c^{-2}} = \frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{\mathrm{v}}}{c^2}\right)}\left[\vec{v} - \gamma\vec{\mathrm{v}} + \frac{(\gamma-1)(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{v})}{\vec{\mathrm{v}}^2}\vec{\mathrm{v}}\right]$$

<u>Σχόλιο</u>

Ας συμβολίσουμε με $\vec{v}_{A(O)} = \vec{v}$ την ταχύτητα ενός σωματιδίου ως προς Ο. Επομένως $\vec{v}_{A(O')} = \vec{v}'$ είναι η ταχύτητα του σωματιδίου ως προς Ο΄ και $\vec{v}_{O'(O)} = \vec{\mathrm{v}}$ είναι η ταχύτητα του Ο΄ ως προς το Ο.

Με τον παραπάνω συμβολισμό η σχέση (4.3.11) γίνεται:

$$\boxed{\vec{v}_{A(O')} = \frac{\vec{v}_{A(O)} + \gamma\vec{v}_{O(O')} + \frac{(\gamma-1)(\vec{v}_{A(O)}\cdot\vec{v}_{O(O')})}{\vec{v}^{\,2}_{O(O')}}\vec{v}_{O(O')}}{\gamma\left(1 + \frac{\vec{v}_{A(O)}\cdot\vec{v}_{O(O')}}{c^2}\right)}} \quad (4.3.12)$$

με $\gamma = \gamma(\vec{v}_{O(O')})$

<u>Ειδικές περιπτώσεις</u>

1. Αν η κίνηση του Ο΄ γίνεται μόνο κατά τον x άξονα τότε $\vec{v}_{A(O)}\cdot\vec{v}_{O(O')} = v^1_{A(O)}v_{O(O')}$ και οι συνιστώσες της ταχύτητας εύκολα φαίνεται ότι είναι:

$$v^1_{A(O')} = \frac{v^1_{A(O)} + \gamma v_{O(O')} + \frac{(\gamma-1)(v^1_{A(O)} v_{O(O')})}{v^2_{O(O')}} v_{O(O')}}{\gamma\left(1 + \frac{v^1_{A(O)} v_{O(O')}}{c^2}\right)} \Rightarrow$$

$$v^1_{A(O')} = \frac{v^1_{A(O)} + \gamma v_{O(O')} + \frac{(\gamma-1)(v^1_{A(O)} v_{O(O')})}{v_{O(O')}}}{\gamma\left(1 + \frac{v^1_{A(O)} v_{O(O')}}{c^2}\right)} \Rightarrow$$

$$\frac{v^1_{A(O)} + \gamma v_{O(O')} + (\gamma-1) v^1_{A(O)}}{\gamma\left(1 + \frac{v^1_{A(O)} v_{O(O')}}{c^2}\right)} = \frac{v_{O(O')} + v^1_{A(O)}}{1 + \frac{v^1_{A(O)} v_{O(O')}}{c^2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{v^1_{A(O')} = \frac{v_{O(O')} + v^1_{A(O)}}{1 + \frac{v^1_{A(O)} v_{O(O')}}{c^2}}}$$

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι:

$$\boxed{v^2_{A(O')} = \frac{v^2_{A(O)}}{1 + \frac{v^1_{A(O)} v_{O(O')}}{c^2}}} \quad \boxed{v^3_{A(O')} = \frac{v^3_{A(O)}}{1 + \frac{v^1_{A(O)} v_{O(O')}}{c^2}}}$$

2. Αν η διεύθυνση κίνησης του Ο΄ ως προς Ο συμπίπτει με την διεύθυνση κίνησης του Α ως προς Ο τότε $\vec{v}_{A(O)} = v_{A(O)}\vec{e}$ και $\vec{v}_{O(O')} = v_{O(O')}\vec{e}$ ($\vec{e}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κοινή διεύθυνση κίνησης). Όπως φαίνεται από την (4.3.12) ισχύει ότι $\vec{v}_{A(O')} = v_{A(O')}\vec{e}$ και ο νόμος μετασχηματισμού της ταχύτητας γίνεται:

$$v_{A(O')} = \frac{v_{A(O)} + \gamma v_{O(O')} + \frac{(\gamma-1)v_{A(O)} v_{O(O')}}{v^2_{O(O')}} v_{O(O')}}{\gamma\left(1 + \frac{v_{A(O)} v_{O(O')}}{c^2}\right)} \Rightarrow$$

$$v_{A(O')} = \frac{v_{A(O)} + \gamma v_{O(O')} + (\gamma-1) v_{A(O)}}{\gamma\left(1 + \frac{v_{A(O)} v_{O(O')}}{c^2}\right)} \Rightarrow$$

$$\boxed{v_{A(O')} = \frac{v_{O(O')} + v_{A(O)}}{\left(1 + \frac{v_{A(O)} v_{O(O')}}{c^2}\right)}}$$

Παρατήρηση

Επειδή ο νόμος μετασχηματισμού της ταχύτητας είναι δύσκολος στην απομνημόνευση, είναι προτιμότερο αντί να τον απομνημονεύσουμε να μάθουμε την διαδικασία εξαγωγής του:

Έστω ότι ξέρουμε την ταχύτητα $\vec{v}_{\Sigma(O)}$ ενός υλικού σημείου Σ ως προς Ο, την ταχύτητα $\vec{v}_{O'(O)}$ του Ο΄ ως προς Ο και ζητάμε την ταχύτητα $\vec{v}_{\Sigma(O')}$ του Σ ως προς Ο΄.

- Υπολογίζουμε την τετραταχύτητα $\boxed{u_{\Sigma(O)} = \gamma(v_{\Sigma(O)}) \begin{bmatrix} c \\ \vec{v}_{\Sigma(O)} \end{bmatrix}}$ του Σ ως προς Ο
- Από τον νόμο μετασχηματισμού της τετραταχύτητας μπορούμε να βρούμε την τετραταχύτητα $u_{\Sigma(O')}$ του Σ ως προς Ο΄. $\boxed{u_{\Sigma(O')} = \Lambda\left(\vec{v}_{O'(O)}\right) u_{\Sigma(O')}}$
- Η ταχύτητα του Σ ως προς Ο΄ είναι : $\boxed{\vec{v}_{\Sigma(O')} = \frac{\vec{u}_{\Sigma(O')}}{u^0_{\Sigma(O')}}}$

Παράδειγμα

Θεωρούμε ένα υλικό σημείο Σ που κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ στο επίπεδο yz ενός ΑΣΑ Ο. Ένα δεύτερο ΑΣΑ Ο΄ κινείται με ταχύτητα w ως προς το πρώτο κατά την διεύθυνση του άξονα y. Να βρεθεί η ταχύτητα του Σ ως προς Ο΄

Λύση

Η τετραταχύτητα του Σ ως προς Ο είναι

$$u = \gamma_v \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας μετασχηματισμού από το Ο στο Ο΄ είναι:

$$\Lambda(w) = \begin{bmatrix} \gamma_w & 0 & -\beta\gamma_w & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma_w & 0 & \gamma_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως η τετραταχύτητα του Σ ως προς Ο΄ είναι:

$$u' = \Lambda(w)u = \gamma_v \begin{bmatrix} \gamma_w & 0 & -\beta\gamma_w & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma_w & 0 & \gamma_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \gamma_v \begin{bmatrix} \gamma_w(c - \beta v_y) \\ 0 \\ \gamma_w(v_y - c\beta) \\ v_z \end{bmatrix}$$

Η ταχύτητα του Σ ως προς Ο΄ είναι:

$$\vec{v}' = \frac{\vec{u}'}{u'^0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_y - c\beta}{c - \beta v_y} \\ \frac{v_z}{\gamma_w(c - \beta v_y)} \end{bmatrix}$$

4.4 Τετραεπιτάχυνση

Ως τετραεπιτάχυνση ορίζουμε την παράγωγο της τετραταχύτητας ως προς τον ιδιόχρονο

$$\alpha^{\mu} = \frac{du^{\mu}}{d\tau} = \frac{d^{2}x^{\mu}}{d\tau^{2}} \tag{4.4.1}$$

Ιδιότητες

1. Η τετραταχύτητα είναι κάθετη στην τετραεπιτάχυνση

$$\alpha \cdot u = 0 \tag{4.4.2}$$

2. Σχέση τετραεπιτάχυνσης και επιτάχυνσης

$$A = [a^{\mu}] = \begin{bmatrix} \frac{\gamma^4}{c}\vec{v}\cdot\vec{\mathrm{a}} \\ \gamma^2\vec{\mathrm{a}} + \frac{\gamma^4}{c}(\vec{v}\cdot\vec{\mathrm{a}})\vec{v} \end{bmatrix} = \tag{4.4.3}$$

3. Ο νόμος μετασχηματισμού της τετραεπιτάχυνσης

(Î±Í´)

$$\alpha'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}\alpha^{\nu} \tag{4.4.4}$$

(Î²Í´)

$$\alpha'_{\mu} = L_{\mu}{}^{\nu}\alpha_{\nu} \tag{4.4.5}$$

Απόδειξη

1. Γνωρίζουμε από την σχέση (4.3.2) ότι: $u^{\mu}u_{\mu} = -c^2 \Rightarrow \eta_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} = -c^2$
   Παραγωγίζοντας ως προς τον ιδιόχρονο προκύπτει ότι:

$$\eta_{\mu\nu}\alpha^{\mu}u^{\nu} + \eta_{\mu\nu}u^{\mu}\alpha^{\nu} = 0 \Rightarrow 2\eta_{\mu\nu}\alpha^{\mu}u^{\nu} = 0 \Rightarrow \alpha^{\mu}u_{\mu} = 0$$

2. Η σχέση της τετραεπιτάχυνσης με την επιτάχυνση μπορεί να βρεθεί ως εξής: Θα χρειαστούμε κατ' αρχάς την παράγωγο του γ ως προς τον χρόνο.

$$\gamma = \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{-1/2} \Rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{-3/2}\frac{-2}{c^2}\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2}\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{a}}$$

   Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $u^0 = \gamma c$ και $\frac{dx^0}{d\tau} = u^0$ μπορούμε να υπολογίσουμε την μηδενική συνιστώσα της τετραεπιτάχυνσης :

$$\alpha^0 = \frac{du^0}{d\tau} = c\frac{d\gamma}{d\tau} = c\frac{d\gamma}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{d\gamma}{dt}u^0 = \gamma c\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^4}{c}\vec{v}\cdot\vec{\mathrm{a}}$$

Για το «χωρικό» μέρος της τετραεπιτάχυνσης ισχύει ότι:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{u}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d\vec{u}}{dt} = \gamma\frac{d(\gamma\vec{v})}{dt} = \gamma^2\frac{d\vec{v}}{dt} + \gamma\vec{v}\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^2\mathrm{a} + \frac{\gamma^4}{c^2}(\vec{v}\cdot\vec{\mathrm{a}})\vec{v}$$

Η παραπάνω σχέση σε γλώσσα συνιστωσών γράφεται ως

$$\alpha^i = \gamma^2\mathrm{a}^i + \frac{\gamma^4}{c^2}v^j\mathrm{a}_j v^i$$

και σε μορφή πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\gamma^4}{c}\vec{v}\cdot\vec{\mathrm{a}} \\ \gamma^2\vec{\mathrm{a}} + \frac{\gamma^4}{c^2}(\vec{v}\cdot\vec{\mathrm{a}})\vec{v} \end{bmatrix}$$

3. Επειδή τα στοιχεία του πίνακα L είναι σταθερές, ο νόμος μετασχηματισμού της τετραεπιτάχυνσης είναι ίδιος με τον νόμο μετασχηματισμού της τετραταχύτητας.

$$\alpha'_\mu = \eta_{\mu\nu}\alpha'^\nu = \eta_{\mu\nu}L^\nu{}_\kappa\alpha^\kappa = \eta_{\mu\nu}L^\nu{}_\kappa\eta^{\kappa\sigma}\alpha_\sigma = L_\mu{}^\sigma\alpha_\sigma$$

4.5 Τετραορμή

Η τετραορμή είναι εξ' ορισμού το γινόμενο της μάζας επί την τετραταχύτητα:

$$p^\mu = mu^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{4.5.1}$$

Σε μορφή πίνακα η τετραορμή γράφεται ως

$$P = [p^\mu] = \begin{bmatrix} m\gamma c \\ m\gamma\vec{v} \end{bmatrix} \tag{4.5.2}$$

και

$$P_{\sigma\upsilon\nu} = [p_\mu] = \begin{bmatrix} -m\gamma c \\ m\gamma\vec{v} \end{bmatrix} \tag{4.5.3}$$

Το χωρικό μέρος της τετραορμής είναι η σχετικιστική ορμή του σωματιδίου και το χρονικό της μέρος είναι η ενέργεια του.

Οι σχετικιστικοί ορισμοί της ορμής και της ενέργειας είναι οι εξής:

Η **σχετικιστική ορμή** είναι εξ ορισμού

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v} \tag{4.5.4}$$

Η **σχετικιστική ενέργεια** του σωματιδίου ορίζεται να είναι

$$E = p^0 c = m\gamma c^2 \tag{4.5.5}$$

<u>*Ιδιότητες*</u>

1. Αν θεωρήσουμε το σωματίδιο ακίνητο τότε η ορμή του είναι μηδέν και η ενέργειά του είναι $E = mc^2$. Ονομάζουμε την ποσότητα $E = mc^2$ **ενέργεια ηρεμίας** του σωματιδίου.

2. Οι παραπάνω ορισμοί στο όριο των μικρών ταχυτήτων συμφωνούν με τις έννοιες της κλασσικής μηχανικής. Πράγματι ας θεωρήσουμε τη περίπτωση όπου $v << c$. Αναπτύσσοντας κατά Taylor το γ και κρατώντας όρους μέχρι δευτέρας τάξης ως προς β=υ/c προκύπτει ότι: $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} \cong 1 + \frac{\beta^2}{2} = 1 + \frac{v^2}{2c^2}$
   Αντικαθιστώντας στον ορισμό της ορμής και ενέργειας και κρατώντας όρους το πολύ δευτέρας τάξης οι σχέσεις (4.5.4) και (4.5.5) γίνονται:
   $\vec{p} \cong m\vec{v}$ και $E \cong mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$
   Στην παραπάνω σχέση αναγνωρίζουμε στον όρο mc^2 την ενέργεια ηρεμίας του σωματιδίου και στον δεύτερο την κλασσική κινητική του ενέργεια. Δηλαδή η συνολική ενέργεια που έχει ένα σωματίδιο κινούμενο με ταχύτητα υ είναι το άθροισμα της ενέργειας ηρεμίας και της κινητικής του ενέργειας.

3. Ο σχετικιστικός ορισμός της κινητικής ενέργειας ενός σωματιδίου είναι αποτέλεσμα αυτής της λογικής. Ορίζουμε ως **σχετικιστική κινητική ενέργεια** ενός σωματιδίου μάζας m κινούμενου με ταχύτητα υ την ποσότητα
   $T = m\gamma c^2 - mc^2$

4. Γνωρίζουμε ότι το τετράγωνο της τετραταχύτητας ισούται με $-c^2$. Επομένως για το τετράγωνο της τετραορμής ισχύει ότι :

$$p^\mu p_\mu = m^2 u^\mu u_\mu = -m^2c^2 \Rightarrow \eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = -m^2c^2 \Rightarrow$$

$$\eta_{00}p^0p^0 + \eta_{ij}p^ip^j = -m^2c^2 \Rightarrow -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 = m^2c^2 \Rightarrow$$

$$E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4 \tag{4.5.6}$$

5. Αν θεωρήσουμε ένα φωτόνιο (m=0, E=hf) τότε η παραπάνω σχέση ενέργειας ορμής γίνεται $E = pc \Rightarrow p = \frac{E}{c}$ Επομένως η τετραορμή του φωτονίου είναι:

$$P = \begin{bmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{bmatrix} \tag{4.5.7}$$

   με $|\vec{p}| = E/c$

6. Το τετράγωνο της τετραορμής ενός φωτονίου είναι μηδέν
   Πράγματι ισχύει ότι: $p^\mu p_\mu = -(p^0)^2 + |\vec{p}|^2 = -\frac{E^2}{c^2} + \frac{E^2}{c^2} = 0$

7. Είναι προφανές από τον ορισμό της ότι η τετραορμή μετασχηματίζεται όπως η τετραταχύτητα : $p'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} p^{\nu}$ και $p'_{\mu} = L_{\mu}{}^{\nu} p_{\nu}$

8. Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο από N σωματίδια . Υποθέτουμε ότι η ενέργεια και η ορμή του συστήματος είναι σταθερή σε ένα ΑΣΑ . Θα δείξουμε ότι η ενέργεια και η ορμή είναι σταθερές σε κάθε άλλο ΑΣΑ.

   Απόδειξη

   Αφού διατηρείται η ενέργεια και η ορμή του συστήματος, η τετραορμή του παραμένει σταθερή. Επομένως για το σύστημα ισχύει ότι :

$$p^{\mu} = \text{σταθερή} \Rightarrow \Delta p^{\mu} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \Delta p^{\nu}_{(i)} = 0$$

   (ο δείκτης i απαριθμεί σωματίδια και όχι συντεταγμένες)

   Σε ένα άλλο ΑΣΑ ισχύει ότι:

$$p'^{\mu}_{(i)} = L^{\mu}{}_{\nu} p^{\nu}_{(i)} \Rightarrow \Delta p'^{\mu}_{(i)} = L^{\mu}{}_{\nu} \Delta p^{\nu}_{(i)} \Rightarrow$$
$$\sum_{i=1}^{N} \Delta p'^{\mu}_{(i)} = \sum_{i=1}^{N} L^{\mu}{}_{\nu} \Delta p^{\nu}_{(i)} \Rightarrow \Delta p'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} \sum_{i=1}^{N} \Delta p^{\nu}_{(i)} = 0$$

   Επομένως η μεταβολή της τετραορμής του συστήματος και στο άλλο ΑΣΑ θα είναι μηδέν και συνεπώς η τετραορμή παραμένει σταθερή. Άρα τόσο η ενέργεια όσο και η ορμή διατηρούνται.

9. **Σύστημα Κέντρου ορμής.**

   Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σύνολο από σωματίδια συνολικής ενέργειας E και συνολικής ορμής $\vec{p}$ ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς . Υπάρχει πάντα αδρανειακό σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο η χωρική ορμή του συστήματος να είναι μηδεν.

   Απόδειξη

   Η τετραορμή του συστήματος είναι: $P = \begin{bmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{bmatrix}$

   Αναζητούμε προώθηση Lorentz $\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta^T \\ -\gamma\beta & I + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta\beta^T \end{bmatrix}$ ώστε η τετραορμή του συστήματος να γίνει $P' = \begin{bmatrix} E'/c \\ 0 \end{bmatrix}$

Α Τρόπος

$$
\begin{gathered}
P' = \Lambda P \Rightarrow \begin{bmatrix} E'/c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta^T \\ -\gamma\beta & I + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta\beta^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{bmatrix} \Rightarrow \\
\begin{bmatrix} E'/c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma E - \gamma c \vec{\beta}\cdot\vec{p}}{c} \\ -\frac{\gamma E\vec{\beta}}{c} + \vec{p} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}(\vec{\beta}\cdot\vec{p})\vec{\beta} \end{bmatrix} \Rightarrow \\
-\frac{\gamma E\vec{\beta}}{c} + \vec{p} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}(\vec{\beta}\cdot\vec{p})\vec{\beta} = \vec{0} \qquad (1)
\end{gathered}
$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1) με $\vec{\beta}$ προκύπτει ότι :

$$
\begin{gathered}
-\frac{\gamma E\beta^2}{c} + \vec{p}\cdot\vec{\beta} + (\gamma-1)(\vec{\beta}\cdot\vec{p}) = 0 \Rightarrow \\
-\frac{\gamma E\beta^2}{c} + \gamma(\vec{\beta}\cdot\vec{p}) = 0 \Rightarrow \vec{\beta}\cdot\vec{p} = \frac{E\beta^2}{c}
\end{gathered}
$$

Αντικαθιστώντας το γινόμενο $\vec{\beta}\cdot\vec{p}$ στην (1) προκύπτει ότι:

$$
-\frac{\gamma E\vec{\beta}}{c} + \vec{p} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\frac{E\beta^2}{c}\vec{\beta} \Rightarrow \boxed{\vec{\beta} = \frac{c}{E}\vec{p}}
$$

Β Τρόπος

Από τον νόμο μετασχηματισμού της τετραορμής προκύπτει ότι:

$$
\begin{gathered}
P = \Lambda^{-1}P' \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta^{\mathrm{T}} \\ \gamma\beta & \mathrm{I} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta\beta^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E'}{c} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \\
\begin{bmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma \mathrm{E}'}{c} \\ \frac{\gamma \mathrm{E}'}{c}\vec{\beta} \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{p} = \frac{E}{c}\vec{\beta} \Rightarrow \vec{\beta} = \frac{c\vec{p}}{E}
\end{gathered}
$$

4.6 Σύνοψη και Τυπολόγιο

- Σε αντιστοιχία με την κλασσική μηχανική, στην σχετικότητα ορίζονται οι έννοιες τετραταχύτητα, τετραεπιτάχυνση, τετραορμή.
  Η ουσιαστική διαφορά με τους αντίστοιχους ορισμούς της κλασσικής μηχανικής είναι ότι οι παραγωγίσεις δεν είναι ως προς τον χρόνο (ο οποίος εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς), αλλά ως προς τον ιδιόχρονο του σωματιδίου ο οποίος είναι ανεξάρτητος του συστήματος αναφοράς.

- Ο ιδιόχρονος ορίζεται μέσω της σχέσης :

$$d\tau = \sqrt{-dS^2} = \sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$$

- Η τετραταχύτητα είναι η πρώτη παράγωγος της (χωροχρονικής) θέσης ως προς τον ιδιόχρονο:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

- Η τετραεπιτάχυνση είναι η πρώτη παράγωγος της τετραταχύτητας ως προς τον ιδιόχρονο:

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$$

- Η τετραορμή είναι το γινόμενο της μάζας ηρεμίας επί την τετραταχύτητα

$$p^\mu = mu^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau}$$

- Ο νόμος μετασχηματισμού (αλλαγή συστήματος συντεταγμένων) των παραπάνω μεγεθών είναι κοινός (νόμος μετασχηματισμού ανταλλοίωτου διανύσματος):
  Αν $x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu$ τότε

$$\begin{aligned} u'^\mu &= L^\mu{}_\nu u^\nu \\ a'^\mu &= L^\mu{}_\nu a^\nu \\ p'^\mu &= L^\mu{}_\nu p^\nu \end{aligned}$$

- Η σχέση ταχύτητας και τετραταχύτητας ενός υλικού σημείου είναι:

$$u = \begin{bmatrix} \gamma c \\ \gamma\vec{v} \end{bmatrix}$$

⊙ Η σχέση τετραορμής και ταχύτητας είναι:

$$p = \begin{bmatrix} \gamma m c \\ \gamma m \vec{v} \end{bmatrix}$$

⊙ Η «χρονική» συνιστώσα της τετραορμής αποτελεί την σχετικιστική ενέργεια Ε του σωματιδίου

$$E = c\, p^0 = m\gamma c^2$$

⊙ Η «χωρική» συνιστώσα της τετραορμής αποτελεί την σχετικιστική ορμή του σωματιδίου.

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v}$$

⊙ Η σχέση ενέργειας ορμής είναι

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

⊙ Ειδικά για το φωτόνιο, για το οποίο m=0, η σχέση ενέργειας ορμής γράφεται:

$$E = |\vec{p}|\, c$$

⊙ Για ένα σύστημα σωματιδίων συνολικής ενέργειας Ε και συνολικής ορμής $\vec{p}$ υπάρχει ΑΣΑ ως προς το οποίο η χωρική συνιστώσα της ορμής είναι μηδέν (σύστημα κέντρου ορμής). Η ταχύτητα του συστήματος αυτού ως προς το δοθέν υπολογίζεται από την σχέση:

$$\vec{v}_{cp} = \frac{c^2\vec{p}}{E}$$

Κεφάλαιο 5

ΤΑΝΥΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

5.1 Εισαγωγή

Ο συναλλοίωτος μετρικός τανυστής είναι ο πίνακας

$$[\eta_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.1.1}$$

Ο ανταλλοίωτος μετρικός τανυστής είναι ο πίνακας

$$[\eta^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.1.2}$$

Οι δύο παραπάνω πίνακες είναι ο ένας αντίστροφος του άλλου. Επομένως ισχύει ότι:

$$\eta^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{5.1.3}$$

Θεωρούμε ένα μετασχηματισμό Lorentz $x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$

Ο πίνακας L ικανοποιεί τις σχέσεις

$$L^{\alpha}{}_{\mu}L^{\beta}{}_{\nu}\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \text{ και } L^{\alpha}{}_{\mu}L^{\beta}{}_{\nu}\eta^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta} \tag{5.1.4}$$

Ορίζουμε τον πίνακα $L_{\alpha}{}^{\beta}$ μέσω της εξίσωσης

$$L_{\alpha}{}^{\beta} = \eta_{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}L^{\mu}{}_{\nu} \tag{5.1.5}$$

Οι ιδιότητες του πίνακα $L_{\alpha}{}^{\beta}$ συνοψίζονται στην επόμενη πρόταση.

Θεώρημα 5.1.1 *α) Ο $L_\alpha{}^\beta$ είναι (κατά κάποιο τρόπο) ο αντίστροφος του $L^\alpha{}_\beta$. Δηλαδή ισχύει ότι:*

$$L^\alpha{}_\mu L_\alpha{}^\nu = \delta^\nu_\mu \text{ και } L^\mu{}_\alpha L_\nu{}^\alpha = \delta^\mu_\nu \tag{5.1.6}$$

β) Ο πίνακας $L_\alpha{}^\beta$ είναι επίσης πίνακας Lorentz δηλαδή ικανοποιεί τις ίδιες σχέσεις με τον $L^\alpha{}_\beta$.

$$L_\mu{}^\alpha L_\nu{}^\beta \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \text{ και } L_\mu{}^\alpha L_\nu{}^\beta \eta^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta} \tag{5.1.7}$$

γ) Ο αντίστροφος του μετασχηματισμού $x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu$ είναι ο $x^\mu = L_\nu{}^\mu x'^\nu$

Απόδειξη
α)

$$L^\alpha{}_\mu L_\alpha{}^\nu = L^\alpha{}_\mu \eta_{\alpha\rho}\eta^{\nu\sigma}L^\rho{}_\sigma = L^\alpha{}_\mu L^\rho{}_\sigma \eta_{\alpha\rho}\eta^{\nu\sigma} = \eta_{\mu\sigma}\eta^{\nu\sigma} = \delta^\nu_\mu$$

β)

$$L_\mu{}^\alpha L_\nu{}^\beta \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\rho}\eta^{\alpha\sigma}L^\rho{}_\sigma \eta_{\nu\pi}\eta^{\beta\xi}L^\pi{}_\xi \eta_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\sigma}\eta_{\alpha\beta}L^\rho{}_\sigma L^\pi{}_\xi \eta^{\beta\xi}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\pi} =$$
$$\delta^\sigma_\beta L^\rho{}_\sigma L^\pi{}_\xi \eta^{\beta\xi}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\pi} = L^\rho{}_\beta L^\pi{}_\xi \eta^{\beta\xi}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\pi} = \eta^{\rho\pi}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\pi} = \delta^\pi_\mu \eta_{\nu\pi} = \eta_{\mu\nu}$$

γ)

$$x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu \Rightarrow L_\mu{}^\alpha x'^\mu = L_\mu{}^\alpha L^\mu{}_\nu x^\nu \Rightarrow L_\mu{}^\alpha x'^\mu = \delta^\alpha_\nu x^\nu \Rightarrow L_\mu{}^\alpha x'^\mu = x^\alpha$$

5.2 Τανυστές - Τανυστικά Πεδία

Τα διάφορα φυσικά μεγέθη – πεδία τα κατατάσσουμε στις εξής κατηγορίες:

5.2.1 Αναλλοίωτα (βαθμωτά) μεγέθη (scalars) - Αναλλοίωτα (βαθμωτά) πεδία

Ένα αριθμητικό μέγεθος Ψ λέμε ότι είναι **αναλλοίωτο** ως προς τους μετασχηματισμούς Lorentz αν παραμένει αμετάβλητο κάτω από οποιοδήποτε μετασχηματισμό Lorentz. Δηλαδή αν Ψ και Ψ΄ οι τιμές του μεγέθους σε δύο ΑΣΑ Ο και Ο΄ τότε

$$\Psi' = \Psi \tag{5.2.1.1}$$

Παραδείγματα αναλλοίωτων μεγεθών είναι η μάζα, το φορτίο κ.α
Σχόλιο:

Τα αναλλοίωτα μεγέθη δεν είναι κατ' ανάγκη σταθερά. Απλώς η τιμή τους σε όλα τα αδρανειακά συστήματα συντεταγμένων, η οποία μπορεί να μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο, είναι η ίδια.
Ένα παράδειγμα αναλλοίωτου μεγέθους, που δεν είναι κατ ανάγκη σταθερό, είναι το εσωτερικό γινόμενο των τετραταχυτήτων δύο σωματιδίων.
Θεωρούμε δύο σωματίδια με τετραταχύτητες u^μ και v^μ.
Ορίζουμε το εσωτερικό τους γινόμενο μέσω της σχέσης: $u \cdot \mathrm{v} = \eta_{\alpha\beta} u^\alpha \mathrm{v}^\beta$
Έστω ο μετασχηματισμός Lorentz $x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu$.
Στο νέο σύστημα συντεταγμένων ισχύει ότι:

$$u'.\mathrm{v}' = \eta_{\alpha\beta} u'^\alpha \mathrm{v}'^\beta = \eta_{\alpha\beta} L^\alpha{}_\mu u^\mu L^\beta{}_\nu \mathrm{v}^\nu = L^\alpha{}_\mu L^\beta{}_\nu \eta_{\alpha\beta} u^\mu \mathrm{v}^\nu = \eta_{\mu\nu} u^\mu \mathrm{v}^\nu = u.\mathrm{v}$$

Μια συνάρτηση $\Psi(x) = \Psi(ct, \vec{x})$ είναι ένα **αναλλοίωτο πεδίο** αν σε κάθε χωροχρονικό σημείο αποτελεί αναλλοίωτο μέγεθος. Δηλαδή

$$\Psi'(x') = \Psi(x) \Leftrightarrow \Psi'(ct', \vec{x}\,') = \Psi(ct, \vec{x}) \tag{5.2.1.2}$$

Παράδειγμα 1
Θεωρούμε την συνάρτηση

$$\Psi(x) = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

Έστω ο μετασχηματισμός Lorentz $x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu$
Ισχύει ότι:

$$\Psi'(x') = \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = \eta_{\mu\nu} L^\mu{}_\alpha x^\alpha L^\nu{}_\beta x^\beta = L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu} x^\alpha x^\beta = \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = \Psi(\mathrm{x})$$

5.2.2 Ανταλλοίωτα διανύσματα – ανταλλοίωτα διανυσματικά πεδία

Μια τετράδα αριθμών Ψ^μ αποτελεί ένα **ανταλλοίωτο διάνυσμα** αν κάτω από μετασχηματισμό Lorentz μετασχηματίζεται όπως η τετραταχύτητα:

$$\Psi'^\mu = L^\mu{}_\alpha \Psi^\alpha \tag{5.2.2.1}$$

Παραδείγματα ανταλλοίωτων μεγεθών είναι η τετραταχύτητα, η τετραεπιτάχυνση, η τετραορμή κ.α

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η σχέση (4.3.9) που ισχύει για την τετραταχύτητα ισχύει για κάθε ανταλοίωτο διάνυσμα. Πράγματι θεωρούμε ένα μετασχηματισμό Lorentz $x'^\mu = L^\mu{}_\alpha x^\alpha + b^\mu$. Ισχύει ότι $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} = L^\mu{}_\alpha x^\alpha$.
Η σχέση (5.2.2.1) γίνεται:

$$\Psi'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \Psi^\alpha \tag{5.2.2.2}$$

Μια τετράδα συναρτήσεων $\Psi^{\mu}(x)$ αποτελεί ένα **ανταλλοίωτο διανυσματικό πεδίο** αν ορίζει ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα. σε κάθε σημείο του χωροχρόνου. Επομένως, κάτω από μετασχηματισμό Lorentz, σε κάθε σημείο του χωροχρόνου ισχύει ότι:

$$\Psi'^{\mu}(\mathrm{x}') = L^{\mu}{}_{\alpha}\Psi^{\alpha}(\mathrm{x}) \tag{5.2.2.3}$$

η κάνοντας χρήση του Ιακωβιανού πίνακα

$$\Psi'^{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\Psi^{\alpha}(\mathrm{x}) \tag{5.2.2.4}$$

5.2.3 Συναλλοίωτα διανύσματα – Συναλλοίωτα διανυσματικά πεδία

Μια τετράδα αριθμών Ψ_{μ} αποτελεί ένα **συναλλοίωτο διάνυσμα** αν κάτω από μετασχηματισμό Lorentz μετασχηματίζεται σύμφωνα με την σχέση

$$\Psi'_{\mu} = L_{\mu}{}^{\alpha}\Psi_{\alpha} \tag{5.2.3.1}$$

Και πάλι η σχέση (4.3.10) που ισχύει για την τετραταχύτητα ισχύει για κάθε συναλλοίωτο διάνυσμα. Εύκολα αποδεικνύουμε ότι η (5.2.3.1) είναι ισοδύναμη με την

$$\Psi'_{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\Psi_{\alpha} \tag{5.2.3.2}$$

Παράδειγμα 2

Έστω Ψ^{μ} ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα. Ορίζουμε τις ποσότητες Ψ_{μ} μέσω της σχέσης

$$\Psi_{\mu} = \eta_{\mu\nu}\Psi^{\nu}$$

Οι τέσσερις ποσότητες Ψ_{μ} αποτελούν τις συνιστώσες ενός συναλλοίωτου διανύσματος. Πράγματι, ισχύει ότι:

$$\Psi'_{\mu} = \eta_{\mu\nu}\Psi'^{\nu} = \eta_{\mu\nu}L^{\nu}{}_{\alpha}\Psi^{\alpha} = \eta_{\mu\nu}L^{\nu}{}_{\alpha}\eta^{\alpha\beta}\Psi_{\beta} = L_{\mu}{}^{\beta}\Psi_{\beta}$$

Μια τετράδα συναρτήσεων $\Psi_{\mu}(x)$ αποτελεί ένα **συναλλοίωτο διάνυσματικό πεδίο** αν ορίζει ένα συναλλοίωτο διάνυσμα σε κάθε σημείο του χωροχρόνου.

Επομένως, κάτω από μετασχηματισμό Lorentz, σε κάθε σημείο του χωροχρόνου ισχύει ότι:

$$\Psi'_{\mu}(\mathrm{x}') = L_{\mu}{}^{\alpha}\Psi_{\alpha}(\mathrm{x}) \tag{5.2.3.3}$$

η κάνοντας χρήση του Ιακωβιανού πίνακα

$$\Psi'_{\mu}(x') = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\Psi_{\alpha}(x) \tag{5.2.3.4}$$

Παράδειγμα 3
Θεωρούμε τις συναρτήσεις $\Psi_\mu(\mathrm{x}) = \eta_{\mu\nu}x^\nu$. Ισχύει ότι:
$\Psi'_\mu(x') = \eta_{\mu\nu}x'^\nu = \eta_{\mu\nu}L^\nu{}_\alpha x^\alpha = \eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho}\eta_{\alpha\sigma}L_\rho{}^\sigma x^\alpha = \delta^\rho_\mu L_\rho{}^\sigma\eta_{\alpha\sigma}x^\alpha = L_\mu{}^\sigma\eta_{\alpha\sigma}x^\alpha = L_\mu{}^\sigma\Psi_\sigma(x)$

Παράδειγμα 4
Έστω ένα βαθμωτό πεδίο Ψ(x). Ορίζουμε την **βαθμίδα (gradient)** του πεδίου μέσω των παραγώγων του βαθμωτού πεδίου ως προς τις συντεταγμένες δηλ $\frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu}$. Τότε οι συναρτήσεις $V_\mu(\mathrm{x}) = \frac{\partial\Psi(\mathrm{x})}{\partial x^\mu}$ αποτελούν τις συνιστώσες ενός συναλλοίωτου διανυσματικού πεδίου.

Απόδειξη

$$V'_\mu(\mathrm{x}') = \frac{\partial\Psi'(\mathrm{x}')}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial\Psi(\mathrm{x})}{\partial x'^\mu}$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας για την παράγωγο σύνθετης συνάρτησης, προκύπτει ότι:

$$V'_\mu(\mathrm{x}') = \frac{\partial\Psi(\mathrm{x})}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial\Psi(\mathrm{x})}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = V_\nu(\mathrm{x})\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$x^\nu = L_\alpha{}^\nu x'^\alpha \Rightarrow \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = L_\alpha{}^\nu\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x'^\mu} = L_\alpha{}^\nu\delta^\alpha_\mu = L_\mu{}^\nu$$

Επομένως:

$$V'_\mu(\mathrm{x}') = L_\mu{}^\nu V_\nu(\mathrm{x})$$

Σχόλιο:

Χρησιμοποιώντας τις πρώτες παραγώγους ενός βαθμωτού πεδίου κατασκευάσαμε ένα συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο. Ανυψώνοντας τον δείκτη μπορούμε να ορίσουμε και ένα ανταλλοίωτο διανυσματικό πεδίο ως εξής:

$$V^\mu(\mathrm{x}) = \eta^{\mu\nu}V_\nu(\mathrm{x}) = \eta^{\mu\nu}\frac{\partial\Psi(\mathrm{x})}{\partial x^\nu}$$

Παράδειγμα 5
Θεωρούμε τον διαφορικό τελεστή

$$\square = \eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} \Rightarrow \square = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial \vec{x}^2}$$

Ο τελεστής αυτός είναι βαθμωτός τελεστής:

Απόδειξη

Εφαρμόζοντας τον κανόνα για την παράγωγο σύνθετης συνάρτησης προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = L_{\mu}{}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$$

Για τον τελεστή στο νέο σύστημα συντεταγμένων ισχύει ότι:

$$\Box' = \eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} = \eta^{\mu\nu}L_{\mu}{}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}L_{\nu}{}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} =$$
$$\eta^{\mu\nu}L_{\mu}{}^{\alpha}L_{\nu}{}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} = \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} = \Box$$

5.2.4 Ανταλλοίωτοι τανυστές – ανταλλοίωτα τανυστικά πεδία

Θεωρούμε ένα πίνακα (16 αριθμούς) $\Psi^{\mu\nu}$. Τα στοιχεία του πίνακα αποτελούν τις συνιστώσες ενός **ανταλλοίωτου τανυστή δευτέρας τάξης** (οι δείκτες είναι δύο) αν κάτω από μετασχηματισμό Lorentz μετασχηματίζονται σύμφωνα με την σχέση

$$\Psi'^{\mu\nu} = L^{\mu}{}_{\alpha}L^{\nu}{}_{\beta}\Psi^{\alpha\beta} \tag{5.2.4.1}$$

Κατ' αντιστοιχία με τη σχέση (5.2.2.1) η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\Psi'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\Psi^{\alpha\beta} \tag{5.2.4.2}$$

Παράδειγμα 6

Θεωρούμε δύο σωματίδια με τετραταχύτητες u^{μ} και v^{μ}. Ορίζουμε τον πίνακα Ψ μέσω της σχέσης: $\Psi^{\mu\nu} = u^{\mu}\mathrm{v}^{\nu}$. Τα στοιχεία του πίνακα αποτελούν συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου τανυστή δευτέρας τάξης.

Απόδειξη

$\Psi'^{\mu\nu} = u'^{\mu}\mathrm{v}'^{\nu} = L^{\mu}{}_{\alpha}u^{\alpha}L^{\nu}{}_{\beta}\mathrm{v}^{\beta} = L^{\mu}{}_{\alpha}L^{\nu}{}_{\beta}\Psi^{\alpha\beta}$

Ένας πίνακας με στοιχεία τις συναρτήσεις $\Psi^{\mu\nu}(x)$, αποτελεί ένα **ανταλλοίωτο τανυστικό πεδίο δευτέρας τάξης**, αν ορίζει ένα ανταλλοίωτο τανυστή δευτέρας τάξης σε κάθε σημείο του χωροχρόνου. Επομένως, κάτω από μετασχηματισμό Lorentz, σε κάθε σημείο του χωροχρόνου ισχύει ότι:

$$\Psi'^{\mu\nu}(\mathrm{x}') = L^{\mu}{}_{\alpha}L^{\nu}{}_{\beta}\Psi^{\alpha\beta}(\mathrm{x}) \tag{5.2.4.3}$$

ή κάνοντας χρήση του Ιακωβιανού πίνακα

$$\Psi'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\Psi^{\alpha\beta}(x) \tag{5.2.4.4}$$

Παράδειγμα 7

Έστω $A^{\mu}(x)$ και $B^{\mu}(x)$ δύο ανταλοίωτα διανυσματικά πεδία. Μπορούμε να ορίσουμε ένα ανταλλοίωτο τανυστικό πεδίο δευτέρας τάξης T μέσω της σχέσης:

$T^{\mu\nu}(x) = A^{\mu}(x)B^{\nu}(x)$

<u>*Σχόλια*</u>

1. Κατ' αναλογία μπορούμε να ορίσουμε **ανταλλοίωτους τανυστές τρίτης τάξεως**: Ένα σύνολο από 4x4x4=64 ποσότητες $\Psi^{\alpha\beta\gamma}$ αποτελεί τις συνιστώσες ενός τανυστή τρίτης τάξης αν μετασχηματίζεται σύμφωνα με την σχέση

$$\Psi'^{\alpha\beta\gamma} = L^{\alpha}{}_{\mu}L^{\beta}{}_{\nu}L^{\gamma}{}_{\rho}\Psi^{\mu\nu\rho} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\rho}}\Psi^{\mu\nu\rho}$$

2. Μπορούμε επίσης να ορίσουμε μικτούς τανυστές οποιασδήποτε τάξης. Ενδεικτικά αναφέρουμε τους μικτούς τανυστές δευτέρας τάξης.

   Οι 16 ποσότητες $\Psi^{\alpha}{}_{\beta}$ αποτελούν τις συνιστώσες ενός μικτού τανυστή δευτέρας τάξης αν μετασχηματίζονται σύμφωνα με την σχέση:

$$\Psi'{}^{\alpha}{}_{\beta} = L^{\alpha}{}_{\mu}L_{\beta}{}^{\nu}\,\Psi^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}\Psi^{\mu}{}_{\nu}$$

3. Ένα βαθμωτό είναι ένας τανυστής μηδενικής τάξης και ένα διάνυσμα είναι ένας τανυστής πρώτης τάξης.

5.3 Σταθεροί τανυστές

Θεώρημα 5.3.1 *Ο μετρικός τανυστής είναι ένας συναλλοίωτος τανυστής δευτέρας τάξεως που έχει την ίδια τιμή σε όλα τα αδρανειακά συστήματα συντεταγμένων.*

<u>Απόδειξη</u>

Ο συναλλοίωτος μετρικός τανυστής ορίζεται από την σχέση: $[\eta_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Σε κάθε άλλο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων ορίζουμε $\eta'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

Όμως από την βασική ιδιότητα του η προκύπτει ότι: $L_{\mu}{}^{\alpha}L_{\nu}{}^{\beta}\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \Rightarrow$

$$\eta'_{\mu\nu} = L_{\mu}{}^{\alpha}L_{\nu}{}^{\beta}\eta_{\alpha\beta} \tag{5.3.1}$$

Επομένως ο συναλλοίωτος μετρικός τανυστής είναι ένας συναλλοίωτος τανυστής δευτέρας τάξης.

Παρόμοια απόδειξη μπορούμε να κάνουμε και για τον ανταλλοίωτο μετρικό τανυστή.

$$\eta'^{\mu\nu} = L^{\mu}{}_{\alpha}L^{\nu}{}_{\beta}\eta^{\alpha\beta} \tag{5.3.2}$$

Θεώρημα 5.3.2 *Θεωρούμε τους 4^4 αριθμούς $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$, οι οποίοι ορίζονται με τις εξής συμβάσεις:*
Σ1) Αν δύο δείκτες είναι ίσοι τότε $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ (πχ $\varepsilon^{0102} = \varepsilon^{1123} = \varepsilon^{1122} = 0$)
Σ2) $\varepsilon^{0123} = 1$
Σ3) Σε οποιαδήποτε αντιμετάθεση δεικτών το σύμβολο ε αλλάζει πρόσημο:
$\varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ (πχ $\varepsilon^{3201} = -\varepsilon^{0231} = \varepsilon^{0132} = -\varepsilon^{0123} = -1$).
Το σύμβολο ε έχει την εξής ιδιότητα:
Έστω T τυχαίος πίνακας και |T| η ορίζουσά του. Ισχύει η σχέση:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{T}^{\mu}{}_{\alpha}\mathrm{T}^{\nu}{}_{\beta}\mathrm{T}^{\rho}{}_{\gamma}\mathrm{T}^{\sigma}{}_{\delta} = |\mathrm{T}|\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{5.3.3}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε την παράσταση $\sigma^{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{T}^{\mu}{}_{\alpha}\mathrm{T}^{\nu}{}_{\beta}\mathrm{T}^{\rho}{}_{\gamma}\mathrm{T}^{\sigma}{}_{\delta}$. Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι η παράσταση αυτή αλλάζει πρόσημο όταν δύο δείκτες αντιμετατεθούν:

$$\sigma^{\lambda\kappa\chi\psi} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{T}^{\lambda}{}_{\alpha}\mathrm{T}^{\kappa}{}_{\beta}\mathrm{T}^{\chi}{}_{\gamma}\mathrm{T}^{\psi}{}_{\delta} = -\varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta}\mathrm{T}^{\kappa}{}_{\beta}\mathrm{T}^{\lambda}{}_{\alpha}\mathrm{T}^{\chi}{}_{\gamma}\mathrm{T}^{\psi}{}_{\delta} = -\sigma^{\kappa\lambda\chi\psi}$$

Επομένως η ποσότητα $\sigma^{\alpha\beta\gamma\delta}$ είναι ανάλογη με το $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$.
Δηλαδή ισχύει ότι $\sigma^{\alpha\beta\gamma\delta} = q\,\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$.
Για να προσδιορίσουμε την τιμή του q θέτουμε στην παραπάνω σχέση μνρσ=0123.
Με την αντικατάσταση αυτή προκύπτει ότι:
$\sigma^{0123} = q\,\varepsilon^{0123} \Rightarrow \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{T}^{0}{}_{\alpha}\mathrm{T}^{1}{}_{\beta}\mathrm{T}^{2}{}_{\gamma}\mathrm{T}^{3}{}_{\delta} = q$

Με απευθείας υπολογισμό μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{T}^{0}{}_{\alpha}\mathrm{T}^{1}{}_{\beta}\mathrm{T}^{2}{}_{\gamma}\mathrm{T}^{3}{}_{\delta} = |T|$$

Επομένως q=|T|

Αν περιοριστούμε σε ορθόχρονους κανονικούς μετασχηματισμούς Lorentz (|L|=1) τότε η σχέση (5.3.3) γίνεται: $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}L^{\mu}{}_{\alpha}L^{\nu}{}_{\beta}L^{\rho}{}_{\gamma}L^{\sigma}{}_{\delta} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Rightarrow$

$$\varepsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}L^{\mu}{}_{\alpha}L^{\nu}{}_{\beta}L^{\rho}{}_{\gamma}L^{\sigma}{}_{\delta} \tag{5.3.4}$$

Σύμφωνα με την τελευταία σχέση **το σύμβολο ε είναι ένας ανταλλοίωτος τανυστής τετάρτης τάξης**

Ομοίως μπορούμε να ορίσουμε τον συναλλοίωτο πλήρως αντισυμμετρικό τανυστή μέσω της σχέσης:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}\eta_{\gamma\rho}\eta_{\delta\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{5.3.5}$$

Είναι προφανές ότι η (5.3.5) ορίζει έναν συναλλοίωτο τανυστή τετάρτης τάξης.

Σχόλιο

Επειδή ο $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ είναι πλήρως αντισυμμετρικός, αρκεί να γνωρίζουμε την 0123 συνιστώσα του:

$$\varepsilon_{0123} = \eta_{0\mu}\eta_{1\nu}\eta_{2\rho}\eta_{3\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \eta_{00}\eta_{11}\eta_{22}\eta_{33}\varepsilon^{0123} = -1 \Rightarrow \varepsilon_{0123} = -1$$

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε ότι:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{5.3.6}$$

5.4 Πράξεις μεταξύ τανυστών.

Πρόσθεση τανυστών

Έστω $T = [T^{\alpha\beta}]$ και $S = [S^{\alpha\beta}]$ δύο ομοειδείς τανυστές. Ορίζουμε το άθροισμα τους Ψ=T+S μέσω της σχέσης:

$$\Psi^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta}$$

Είναι προφανές ότι το άθροισμα δύο ομοειδών τανυστών είναι τανυστής ομοειδής με τους τανυστές από τους οποίους συντίθεται.

Πολλαπλασιασμός βαθμωτού με τανυστή

Έστω λ βαθμωτό και $T = [T^{\alpha\beta}]$ τανυστής. Ορίζουμε το γινόμενο S=λT του βαθμωτού με τον τανυστή μέσω της σχέσης:

$$S^{\alpha\beta} = \lambda T^{\alpha\beta}$$

Ευθύ γινόμενο τανυστών

Έστω $T = [T^{\alpha\beta}]$ και $S = [S^{\alpha}{}_{\beta}]$ δύο τανυστές δευτέρας τάξης.

Μπορούμε να ορίσουμε το ευθύ γινόμενο $\Psi = T \otimes S$ των δύο τανυστών μέσω της σχέσης: $\Psi^{\alpha\beta\gamma}{}_{\delta} = \mathrm{T}^{\alpha\beta} S^{\gamma}{}_{\delta}$

Το ευθύ γινόμενο των δύο τανυστών είναι τανυστής με τάξη ίση με το άθροισμα των τάξεων των δύο τανυστών και τανυστικό χαρακτήρα αυτόν που δηλώνει η θέση των δεικτών.
Πράγματι, ισχύει ότι:
$\mathrm{T}'^{\alpha\beta} = L^{\alpha}{}_{\mu} L^{\beta}{}_{\nu} \mathrm{T}^{\mu\nu}$ και $S'^{\gamma}{}_{\delta} = L^{\gamma}{}_{\rho} L_{\delta}{}^{\sigma} S^{\rho}{}_{\sigma}$.
Επομένως

$$\Psi'^{\,\alpha\beta\gamma}{}_{\delta} = \mathrm{T}'^{\alpha\beta} S'^{\gamma}{}_{\delta} = L^{\alpha}{}_{\mu} L^{\beta}{}_{\nu} L^{\gamma}{}_{\rho} L_{\delta}{}^{\sigma} \mathrm{T}^{\mu\nu} S^{\rho}{}_{\sigma} = L^{\alpha}{}_{\mu} L^{\beta}{}_{\nu} L^{\gamma}{}_{\rho} L_{\delta}{}^{\sigma} \Psi^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma}$$

Συναίρεση τανυστή

Έστω ένας μικτός τανυστής. Ονομάζουμε συναίρεση του τανυστή έναν νέο τανυστή που προκύπτει αθροίζοντας έναν συναλλοίωτο και έναν ανταλλοίωτο δείκτη.
Για παράδειγμα θεωρούμε τον μικτό τανυστή 5ης τάξης $T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta\varepsilon}$.
Το αποτέλεσμα της συναίρεσης των δεικτών α και ε είναι ο τανυστής S με
$S^{\beta}{}_{\gamma\delta} = \mathrm{T}^{\rho\beta}{}_{\gamma\delta\rho}$

Το αποτέλεσμα της συναίρεσης, είναι τανυστής με τάξη κατά 2 μικρότερη από την τάξη του αρχικού τανυστή και τανυστικό χαρακτήρα αυτόν που δηλώνει η θέση των δεικτών.
Πράγματι, ισχύει ότι:
$S'^{\,\beta\gamma}{}_{\delta} = \mathrm{T}'^{\,\rho\beta\gamma}{}_{\delta\rho} = L^{\rho}{}_{\kappa}L^{\beta}{}_{\lambda}L^{\gamma}{}_{\mu}L_{\delta}{}^{\sigma}L_{\rho}{}^{\tau}\mathrm{T}^{\kappa\lambda\mu}{}_{\sigma\tau}$
Όμως $L^{\rho}{}_{\kappa}L_{\rho}{}^{\tau} = \delta^{\tau}_{\kappa}$.
Επομένως

$$S'^{\,\beta\gamma}{}_{\delta} = \delta^{\tau}_{\kappa}L^{\beta}{}_{\lambda}L^{\gamma}{}_{\mu}L_{\delta}{}^{\sigma}\mathrm{T}^{\kappa\lambda\mu}{}_{\sigma\tau} = L^{\beta}{}_{\lambda}L^{\gamma}{}_{\mu}L_{\delta}{}^{\sigma}\mathrm{T}^{\kappa\lambda\mu}{}_{\sigma\kappa} \Rightarrow S'^{\,\beta\gamma}{}_{\delta} = L^{\beta}{}_{\lambda}L^{\gamma}{}_{\mu}L_{\delta}{}^{\sigma}S^{\lambda\mu}{}_{\sigma}$$

Εσωτερικό γινόμενο τανυστών

Το εσωτερικό γινόμενο δύο τανυστών προκύπτει από τους δύο αρχικούς τανυστές ως εξής: Κατασκευάζουμε το ευθύ γινόμενο των δύο τανυστών, υποβιβάζουμε η ανυψώνουμε (αν χρειάζεται) τον δείκτη που θέλουμε και εκτελούμε συναίρεση στον τανυστή που έχει προκύψει.

Παραδείγματα

1. Έστω $T^{\alpha\beta}$ και $S_{\alpha\beta}$ δύο τανυστές δευτέρας τάξης. Ορίζουμε το εσωτερικό τους γινόμενο Ψ=TS μέσω της σχέσης: $\Psi^{\alpha}{}_{\beta} = \mathrm{T}^{\alpha\mu}S_{\mu\beta}$

2. Έστω $T^{\alpha\beta}$ και $S^{\alpha\beta}$ δύο τανυστές δευτέρας τάξης. Μπορούμε να ορίσουμε το εσωτερικό τους γινόμενο Ψ ως εξής:
   $\Psi^{\alpha\beta} = \mathrm{T}^{\alpha\mu}S_{\mu}{}^{\beta} = \eta_{\mu\nu}\mathrm{T}^{\alpha\mu}S^{\nu\beta}$

Σχόλια

1. Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ένα αναλλοίωτο

   Έστω $\mathrm{a} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}^0 \\ \vec{\mathrm{a}} \end{bmatrix}$ και $\mathrm{b} = \begin{bmatrix} \mathrm{b}^0 \\ \vec{\mathrm{b}} \end{bmatrix}$ δύο ανταλλοίωτα διανύσματα.
   Το εσωτερικό τους γινόμενο $a \cdot b$ είναι το αναλλοίωτο
   $\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = \mathrm{a}^{\mu}\mathrm{b}_{\mu} = \mathrm{a}_{\mu}\mathrm{b}^{\mu} = \eta_{\mu\nu}\mathrm{a}^{\mu}\mathrm{b}^{\nu} = -a^0b^0 + \vec{\mathrm{a}} \cdot \vec{b}$

2. Έστω a ένα διάνυσμα. Το τετράγωνο του διανύσματος είναι το εσωτερικό γινόμενο με τον εαυτό του:
   $\mathrm{a}^2 = \mathrm{a} \cdot \mathrm{a} = \mathrm{a}^\mu \mathrm{a}_\mu$
   Αν a, b δύο διανύσματα τότε
   $(\mathrm{a} + \mathrm{b})^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 + 2\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}$

3. Οι χαρακτηρισμοί της παραγράφου 4.2 γενικεύονται για οποιοδήποτε διάνυσμα a

Χωροειδές	$\mathrm{a}^2 > 0$
Χρονοειδές	$\mathrm{a}^2 < 0$
Φωτοειδές	$\mathrm{a}^2 = 0$

4. Το εσωτερικό γινόμενο δύο τανυστών δεν είναι εν γένει μοναδικό αλλά εξαρτάται από τους δείκτες στους οποίους κάνουμε συναίρεση: Ενδεικτικά αναφέρουμε τους τανυστές του παραδείγματος 1 για τους οποίους μπορούμε να ορίσουμε τα εξής 4 εσωτερικά γινόμενα: $T^{\rho\beta} S_{\rho\delta}, T^{\alpha\rho} S_{\gamma\rho}, T^{\rho\beta} S_{\gamma\rho}, T^{\alpha\rho} S_{\rho\delta}$

Παράγωγος τανυστικού πεδίου

Αποδείξαμε σε προηγούμενο παράδειγμα ότι η παράγωγος ενός βαθμωτού πεδίου είναι συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι η παράγωγος ενός τανυστικού πεδίου οποιασδήποτε τάξης είναι τανυστικό πεδίο μιας συναλλοίωτης τάξης επιπλέον.

Ας θεωρήσουμε ως παράδειγμα ένα ανταλλοίωτο διανυσματικό πεδίο $A^\mu(x)$. Θέτουμε $T^\mu{}_\nu(x) = \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^\nu}$. Συνεπώς $T'^\mu{}_\nu(x) = \frac{\partial A'^\mu(x)}{\partial x'^\nu}$
Ισχύει ότι

$$\mathrm{A}'^\mu(x') = L^\mu{}_\beta A^\beta(x) \Rightarrow \frac{\partial \mathrm{A}'^\mu(x')}{\partial x'^\nu} = L^\mu{}_\beta \frac{\partial A^\beta(x)}{\partial x'^\nu} \Rightarrow$$
$$T'^\mu{}_\nu(x') = L^\mu{}_\beta \frac{\partial A^\beta(x)}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}$$

Γνωρίζουμε ότι $x^\gamma = L_\nu{}^\gamma x'^\nu \Rightarrow \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} = L_\nu{}^\gamma$
Επομένως,

$$T'^\mu{}_\nu(x') = L^\mu{}_\beta L_\nu{}^\gamma T^\beta{}_\gamma(x)$$

Άρα ο T είναι τανυστής 2ης τάξης.

Για τους τανυστές οποιασδήποτε τάξης μπορούμε να αποδείξουμε το εξής

Θεώρημα 5.1 *Αν μία εξίσωση τανυστών είναι αληθής σε ένα αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων είναι αληθής και σε κάθε άλλο.*

Απόδειξη

Έστω ως παράδειγμα η εξίσωση $F^{\alpha\beta}S_\beta = \mathrm{T}^\alpha$ στην οποία τα F, S, T είναι τανυστές με χαρακτήρα αυτόν που δηλώνουν οι δείκτες τους. Θεωρούμε ένα μετασχηματισμό Lorentz. Θα αποδείξουμε ότι η ίδια εξίσωση ισχύει και στο νέο σύστημα συντεταγμένων.
Πράγματι, διαδοχικά ισχύει ότι:

$$F'^{\alpha\beta}S'_\beta - \mathrm{T}'^\alpha = L^\alpha{}_\mu L^\beta{}_\nu L_\beta{}^\rho F^{\mu\nu}S_\rho - L^\alpha{}_\mu \mathrm{T}^\mu = L^\alpha{}_\mu \delta^\rho_\nu F^{\mu\nu}S_\rho - L^\alpha{}_\mu \mathrm{T}^\mu =$$
$$L^\alpha{}_\mu F^{\mu\nu}S_\nu - L^\alpha{}_\mu \mathrm{T}^\mu = L^\alpha{}_\mu (F^{\mu\nu}S_\nu - \mathrm{T}^\mu)$$

Όμως, από την ισχύ της εξίσωσης στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων, η παράσταση μέσα στην παρένθεση είναι μηδέν. Επομένως

$$F'^{\alpha\beta}S'_\beta - \mathrm{T}'^\alpha = 0 \Rightarrow F'^{\alpha\beta}S'_\beta = \mathrm{T}'^\alpha$$

Σχόλιο

Είναι λογικό να αναρωτηθεί κανείς για την χρησιμότητα του παραπάνω φορμαλισμού. Η απάντηση βρίσκεται στην απαίτηση οι νόμοι της Φυσικής να είναι ίδιοι σε όλα τα ΑΣΑ. Η παραπάνω απαίτηση σε συνδυασμό με το Θεώρημα (5.1) σημαίνει ότι **οι νόμοι της φυσικής θα πρέπει να είναι τανυστικές εξισώσεις**.

Παρόμοια ήταν και η κατάσταση στην κλασσική μηχανική. Τα διάφορα μεγέθη της είναι τανυστές ως προς μετασχηματισμούς Γαλιλαίου και επομένως οι νόμοι της κλασσικής μηχανικής είναι εξισώσεις τανυστών. Για παράδειγμα αναφέρουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα Στην εξίσωση αυτή η ορμή και η δύναμη είναι διανύσματα (ως προς μετασχηματισμούς Γαλιλαίου), και ο χρόνος αναλλοίωτο μέγεθος. Επομένως η ισχύς του νόμου σε ένα ΑΣΑ συνεπάγεται αυτόματα την ισχύ του σε οποιοδήποτε άλλο που συνδέεται με αυτό με Γαλιλαϊκό μετασχηματισμό.

5.5 Γενικεύοντας την έννοια τανυστής

Η μέχρι τώρα μελέτη των τανυστών αφορούσε τον νόμο μετασχηματισμού φυσικών μεγεθών ως προς μετασχηματισμούς Lorentz. Επομένως αφορούσε μετασχηματισμούς που συσχετίζουν αδρανειακά συστήματα συντεταγμένων. Συχνά κατά την μελέτη μας κάνουμε χρήση καμπυλόγραμμων συντεταγμένων. Επομένως, τίθεται το ερώτημα για τον τρόπο με τον οποίο μετασχηματίζεται κάποιο φυσικό μέγεθος ως προς έναν μετασχηματισμό που δεν είναι Lorentz. Πριν προχωρήσουμε σε μια συστηματική γενίκευση της έννοιας «τανυστής» ας δούμε ένα παράδειγμα που αφορά στην ανάγκη γενίκευσης.

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε δύο σημεία στο επίπεδο «απειροστά κοντά» και την απειροστή τους απόσταση $ds^2 = dx^2 + dy^2$.
Θωρούμε μια αλλαγή συντεταγμένων

$$(x, y) \to (u, v) : x = f(u, v) \quad \text{και} \quad y = h(u, v)$$

Ισχύει ότι

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv \text{ και } dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv = \frac{\partial h}{\partial u}du + \frac{\partial h}{\partial v}dv$$

Αντικαθιστώντας στην απειροστή απόσταση προκύπτει ότι:

$$ds^2 = \left[(\frac{\partial f}{\partial u})^2 + (\frac{\partial h}{\partial u})^2 \right] du^2 + \left[(\frac{\partial f}{\partial v})^2 + (\frac{\partial h}{\partial v})^2 \right] dv^2 + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial v} \right) dudv$$

Θέτοντας $u = x^1, v = x^2$,

$$g_{11} = (\frac{\partial f}{\partial u})^2 + (\frac{\partial h}{\partial u})^2, \;\; g_{22} = (\frac{\partial f}{\partial v})^2 + (\frac{\partial h}{\partial v})^2, \;\; g_{12} = g_{21} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial v}$$

η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \text{ (εννοείται η σύμβαση άθροισης του Einstein)}$$

Οι 3 συναρτήσεις $g_{ij}(x)$ i,j=1,2 αποτελούν τις συνιστώσες του **συναλλοίωτου μετρικού τανυστή**. Προφανώς στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο οι συναρτήσεις αυτές είναι 6 και στον χωροχρόνο είναι 10.

Ας υποθέσουμε ότι αλλάζουμε συντεταγμένες και από τις συντεταγμένες (x^1, x^2) μεταβαίνουμε στις (x'^1, x'^2). Τότε

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} dx'^m \quad \text{και} \quad dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^n} dx'^n$$

Αντικαθιστώντας στο ds^2 προκύπτει ότι:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^j}{\partial x'^n} dx'^m dx'^n = g'_{mn} dx'^m dx'^n$$

με

$$g'_{mn} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^j}{\partial x'^n} g_{ij}$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί τον νόμο μετασχηματισμού ενός συναλλοίωτου τανυστή 2ης τάξης.

Στο σημείο αυτό είμαστε έτοιμοι να δώσουμε τους κατάλληλους ορισμούς που γενικεύουν τα αναφερθέντα στις προηγούμενες παραγράφους.

Ορισμός

- Μια συνάρτηση Ψ(x) αποτελεί ένα **αναλλοίωτο (βαθμωτό) πεδίο** αν κάτω από τον γενικό μετασχηματισμό χωροχρονικών συντεταγμένων $x^\alpha \to x'^\alpha$ μετασχηματίζεται σύμφωνα με την σχέση

$$\Psi'(x') = \Psi(x)$$

- Ένα σύνολο τεσσάρων συναρτήσεων $\Psi^\mu(x)$ αποτελεί τις συνιστώσες ενός **ανταλλοίωτου διανυσματικού πεδίου** αν κάτω από τον γενικό μετασχηματισμό χωροχρονικών συντεταγμένων $x^\alpha \to x'^\alpha$ μετασχηματίζεται σύμφωνα με την σχέση

$$\Psi'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \Psi^\alpha(x)$$

- Ένα σύνολο τεσσάρων συναρτήσεων $\Psi_\mu(x)$ αποτελεί τις συνιστώσες ενός **συναλλοίωτου διανυσματικού πεδίου** αν κάτω από τον γενικό μετασχηματισμό χωροχρονικών συντεταγμένων $x^\alpha \to x'^\alpha$ μετασχηματίζεται σύμφωνα με την σχέση

$$\Psi'_\mu(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \Psi_\alpha(x)$$

- Ένα σύνολο 16 συναρτήσεων $\Psi^{\mu\nu}(x)$ αποτελεί τις συνιστώσες ενός **ανταλλοίωτου τανυστικού πεδίου 2ης τάξης** αν κάτω από τον γενικό μετασχηματισμό χωροχρονικών συντεταγμένων $x^\alpha \to x'^\alpha$ μετασχηματίζεται σύμφωνα με την σχέση

$$\Psi'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \Psi^{\alpha\beta}(x)$$

- Ένα σύνολο 16 συναρτήσεων $\Psi_{\mu\nu}(x)$ αποτελεί τις συνιστώσες ενός **συναλλοίωτου τανυστικού πεδίου 2ης τάξης** αν κάτω από τον γενικό μετασχηματισμό χωροχρονικών συντεταγμένων $x^\alpha \to x'^\alpha$ μετασχηματίζεται σύμφωνα με την σχέση

$$\Psi'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \Psi_{\alpha\beta}(x)$$

- Ένα σύνολο 16 συναρτήσεων $\Psi^\mu{}_\nu(x)$ αποτελεί τις συνιστώσες ενός **μικτού τανυστικού πεδίου 2ης τάξης** αν κάτω από τον γενικό μετασχηματισμό χωροχρονικών συντεταγμένων $x^\alpha \to x'^\alpha$ μετασχηματίζεται σύμφωνα με την σχέση

$$\Psi'^\mu{}_\nu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \Psi^\alpha{}_\beta$$

Με τον ίδιο τρόπο ορίζονται τανυστές ανώτερης τάξης.

Ας εξετάσουμε τον τανυστικό χαρακτήρα της παραγώγου ενός συναλλοίωτου διανυσματικού πεδίου $A_\mu(x)$. Θέτουμε

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu} \Rightarrow T'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial A'{}_\mu(x)}{\partial x'^\nu}$$

Επειδή το A είναι συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο ισχύει ότι:

$$\mathrm{A}'_\mu = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} A_\beta \Rightarrow \frac{\partial \mathrm{A}'{}_\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial}{\partial x'^\nu}\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} A_\beta\right) = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial A_\beta}{\partial x'^\nu} + \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} A_\beta \Rightarrow$$
$$\frac{\partial \mathrm{A}'{}_\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} A_\beta \Rightarrow$$
$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} T_{\beta\gamma} + \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} A_\beta$$

Διαπιστώνουμε ότι στον κανόνα μετασχηματισμού της παραγώγου εμφανίζεται ένας επιπλέον όρος που περιέχει την δεύτερη παράγωγο του μετασχηματισμού. Ο επιπλέον όρος «καταστρέφει» τον τανυστικό χαρακτήρα της παραγώγου. Αξίζει να σημειώσουμε ότι όλες οι πράξεις μεταξύ τανυστών (πρόσθεση, ευθύ γινόμενο, εσωτερικό γινόμενο, συναίρεση), που αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα, οδηγούν και στην γενική περίπτωση σε τανυστή. Από τον κανόνα αυτό εξαιρείται η παράγωγος. **Η παράγωγος ενός τανυστή εν γένει δεν είναι τανυστής**. Στην ομάδα Lorentz, όμως, ο πίνακας του μετασχηματισμού είναι σταθερός και επομένως η παράγωγός του είναι μηδέν, γεγονός που εξηγεί τον τανυστικό χαρακτήρα της παραγώγου στην ειδική περίπτωση των γραμμικών μετασχηματισμών.

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε έναν συναλλοίωτο τανυστή δεύτερης τάξης T και ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα V. Θα αποδείξουμε ότι η συναίρεσή τους είναι συναλλοίωτο διάνυσμα. Θέτουμε $B_\mu = T_{\mu\nu}V^\nu$. Ισχύει ότι $B'_\mu = T'_{\mu\nu}V'^\nu$

Επειδή ο T είναι συναλλοίωτος τανυστής 2ης τάξης ισχύει ότι

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} T_{\alpha\beta} \quad \text{και} \quad V'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} V^\gamma$$

Επομένως

$$\mathrm{B}'_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} T_{\alpha\beta} V^\gamma$$

Όμως

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\gamma} = \delta^\beta_\gamma$$

Άρα
$$\mathrm{B}'_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\delta^\beta_\gamma T_{\alpha\beta}V^\gamma = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}T_{\alpha\gamma}V^\gamma = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}B_\alpha$$
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το B_μ είναι συναλλοίωτο τετράνυσμα.

Παράδειγμα 3

Γνωρίζουμε ότι η χωροχρονική απόσταση δύο «κοντινών γεγονότων», των οποίων οι συντεταγμένες ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι q^μ και $q^\mu + dq^\mu$, δίνεται από την σχέση $ds^2 = \eta_{\mu\nu}dq^\mu dq^\nu$.

Θεωρούμε μια γενική αλλαγή συντεταγμένων $q^\mu \to x^\mu = f^\mu(q)$.
Η απειροστή χωροχρονική απόσταση γίνεται:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dq^\mu dq^\nu = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial q^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial q^\nu}{\partial x^\beta}dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

με
$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial q^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial q^\nu}{\partial x^\beta}\eta_{\mu\nu}$$

Τα στοιχεία του πίνακα $[g_{\alpha\beta}]$ αποτελούν τις συνιστώσες ενός συναλλοίωτου τανυστή 2ης τάξης.
Πράγματι αν θεωρήσουμε μια αλλαγή $x^\mu \to x'^\mu$ τότε

$$dx^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\gamma}dx'^\gamma \quad \text{και} \quad dx^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\delta}dx'^\delta$$

Επομένως,
$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\gamma}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\delta}dx'^\gamma dx'^\delta$$

Άρα
$$g'_{\gamma\delta} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\gamma}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\delta}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι για την ορίζουσα του $[g_{\alpha\beta}]$ ισχύει ότι

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial q^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial q^\nu}{\partial x^\beta}\eta_{\mu\nu} \Rightarrow |g| = |J|^2|\eta| = -|J|^2 < 0$$

όπου J ο Ιακωβιανός πίνακας $J^\mu{}_\alpha = \frac{\partial q^\mu}{\partial x^\alpha}$. Επειδή ο J είναι αντιστρέψιμος, η ορίζουσά του είναι μη μηδενική. Συνεπώς και ο πίνακας $[g_{\alpha\beta}]$ είναι αντιστρέψιμος. Θα αποδείξουμε ότι ο αντίστροφος του $[g_{\alpha\beta}]$ είναι ανταλλοίωτος τανυστής 2ης τάξης. Θέτουμε $[g^{\alpha\beta}]$ τον αντίστροφο του $[g_{\alpha\beta}]$. Επομένως $g^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\beta$

Θεωρούμε τον πίνακα

$$g'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\kappa}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\lambda}g^{\kappa\lambda}$$

Υπολογίζουμε το γινόμενο $g'^{\alpha\gamma} g'_{\gamma\beta}$. Ισχύει ότι

$$g'^{\alpha\gamma} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\lambda}} g^{\kappa\lambda} \quad \text{και} \quad g'_{\gamma\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}$$

Επομένως,

$$g'^{\alpha\gamma} g'_{\gamma\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\lambda}} g^{\kappa\lambda} g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} \delta^{\mu}_{\lambda} g^{\kappa\lambda} g_{\mu\nu} \Rightarrow$$
$$g'^{\alpha\gamma} g'_{\gamma\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} g^{\kappa\mu} g_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} \delta^{\kappa}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\beta}} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\beta}$$

Επομένως ο πίνακας $[g'^{\alpha\beta}]$ είναι πράγματι ο αντίστροφος του $[g'_{\alpha\beta}]$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο αντίστροφος του $[g_{\alpha\beta}]$ είναι ανταλλοίωτος τανυστής 2ης τάξης.

Στο σημείο αυτό έχουμε την δυνατότητα να αποδείξουμε την γραμμικότητα του μετασχηματισμού Lorentz απαιτώντας την αναλλοιώτητα του (απειροστού) στοιχείου μήκους στον χώρο Minkowski.

Θεώρημα 5.2 *Θεωρούμε ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων $x \rightarrow x'$ για τον οποίο ισχύει ότι*

$$ds^2 = ds'^2 \Leftrightarrow \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu}$$

Τότε ο μετασχηματισμός είναι γραμμικός.

Απόδειξη

Θεωρούμε ότι τα x είναι συναρτήσεις των x′. Επομένως

$$dx^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} dx'^{\mu} \quad \text{και} \quad dx^{\beta} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} dx'^{\nu}$$

Η υπόθεση γίνεται:

$$\eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} \Leftrightarrow \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} \Leftrightarrow$$

$$\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} = \eta_{\mu\nu} \qquad (1)$$

Παραγωγίζοντας την (1) ως προς x'^{κ} προκύπτει ότι:

$$\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\kappa}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\kappa}} = 0$$

Θεωρούμε την ποσότητα $T_{\mu\nu\kappa} := \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\kappa}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} + \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\nu \partial x'^\kappa}$.
Ως αποτέλεσμα της αναλλοιώτητας του στοιχείου μήκους, ισχύει ότι $T_{\mu\nu\kappa} = 0$.
Θεωρώντας κυκλική αλλαγή στους δείκτες μ, ν , κ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
&T_{\mu\nu\kappa} + T_{\kappa\nu\mu} - T_{\mu\kappa\nu} = 0 \Rightarrow \\
&\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\kappa}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} + \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\nu \partial x'^\kappa} + \\
&+\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\kappa}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} + \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} \\
&-\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\kappa} - \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\nu \partial x'^\kappa} = 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$2\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\kappa}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} + \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} - \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\kappa} = 0 \qquad (2)$$

Επειδή ο η είναι συμμετρικός στους δείκτες α, β ισχύει ότι:
$\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\kappa}$
Η σχέση (2) γίνεται: $2\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\kappa}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} = 0$ (3)
Επειδή ο Ιακωβιανός πίνακας $\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}$ είναι αντιστρέψιμος, από την (3) προκύπτει ότι:
$\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\kappa} = 0$ (4)
Επειδή ο η είναι αντιστρέψιμος, από την (4) συμπεραίνουμε ότι $\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\kappa} = 0$
Επομένως τα x είναι πολυώνυμα πρώτου βαθμού στα x΄.
Δηλαδή ισχύει η γραμμική σχέση $x^\alpha = S^\alpha{}_\mu x'^\mu + b^\mu$ με S, b σταθερό πίνακα και τετράδα αντιστοίχως.

Η υπόθεση της αναλλοιώτητας του στοιχείου μήκους (σχέση 1) γίνεται:
$\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} = \eta_{\mu\nu} \Leftrightarrow \eta_{\alpha\beta}S^\alpha{}_\mu S^\beta{}_\nu = \eta_{\mu\nu} \Leftrightarrow S^T \eta S = \eta$
Επομένως ο S είναι πίνακας Lorentz.

5.6 Σύνοψη και τυπολόγιο

⊙ Οι τανυστές ως προς μια ομάδα μετασχηματισμών είναι μαθηματικά αντικείμενα τα οποία έχουν προκαθορισμένο νόμο μετασχηματισμού.
Αν θεωρήσουμε έναν μετασχηματισμό Lorentz τότε

$$x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \Leftrightarrow x^{\mu} = L_{\alpha}{}^{\mu} x'^{\alpha}$$

⊙ Ο νόμος μετασχηματισμού των τανυστών διαφόρων τάξεων είναι:

- Τανυστές μηδενικής τάξης (αναλλοίωτα) :

$$\Psi' = \Psi$$

- Ανταλλοίωτοι τανυστές πρώτης τάξης (ανταλλοίωτα διανύσματα)

$$\Psi'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\alpha} \Psi^{\alpha} \Leftrightarrow \Psi'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \Psi^{\alpha}$$

- Συναλλοίωτοι τανυστές πρώτης τάξης (συναλλοίωτα διανύσματα)

$$\Psi'_{\mu} = L_{\mu}{}^{\alpha} \Psi_{\alpha} \Leftrightarrow \Psi'_{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \Psi_{\alpha}$$

- Οι ανταλλοίωτοι τανυστές δευτέρας τάξης

$$\Psi'^{\mu\nu} = L^{\mu}{}_{\alpha} L^{\nu}{}_{\beta} \Psi^{\alpha\beta} \Leftrightarrow \Psi'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \Psi^{\alpha\beta}$$

⊙ Υπάρχουν τανυστές που έχουν την ίδια τιμή σε όλα τα αδρανειακά συστήματα συντεταγμένων (σταθεροί τανυστές). Παραδείγματα τέτοιων τανυστών είναι:

- Ο ανταλλοίωτος μετρικός τανυστής
$\eta'^{\mu\nu} = L^{\mu}{}_{\alpha} L^{\nu}{}_{\beta} \eta^{\alpha\beta} = \eta^{\mu\nu}$
- Ο συναλλοίωτος μετρικός τανυστής
$\eta'_{\mu\nu} = L_{\mu}{}^{\alpha} L_{\nu}{}^{\beta} \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}$
- Ο πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής
$\varepsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} L^{\mu}{}_{\alpha} L^{\nu}{}_{\beta} L^{\rho}{}_{\gamma} L^{\sigma}{}_{\delta} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$

⊙ Μεταξύ τανυστών ορίζονται διάφορες πράξεις όπως πρόσθεση, πολλαπλασιασμός τανυστή με αναλλοίωτο, ευθύ γινόμενο, συναίρεση. Σε κάθε μια από τις παραπάνω πράξεις το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι τανυστής τέτοιας τάξης και χαρακτήρα που δηλώνεται από το πλήθος και τη θέση των ελεύθερων δεικτών του.

⊙ Η παράγωγος ενός τανυστή είναι τανυστής μόνο στην περίπτωση που η ομάδα μετασχηματισμων είναι η γενική γραμμική ομάδα. Στην περίπτωση αυτή, ο δείκτης που αντιστοιχεί στην παράγωγο είναι συναλλοίωτος.

Κεφάλαιο 6

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

6.1 Εισαγωγή

Όπως γνωρίζουμε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο περιγράφεται από τις 4 εξισώσεις του Maxwell. Με τις εξισώσεις αυτές συσχετίζονται η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και η ένταση του μαγνητικού πεδίου (αποτέλεσμα) με την πυκνότητα φορτίου και ρεύματος (αίτιο).

Τα ερωτήματα που συνδέονται με την σχετικιστική μελέτη του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι:

Ερ 1. Οι εξισώσεις του Maxwell είναι ίδιες σε όλα τα ΑΣΑ;

Ερ 2. Αν ναι ποιες εξισώσεις τανυστών είναι ισοδύναμες με αυτές;

Ερ 3. Αν θεωρήσουμε ένα μετασχηματισμό Lorentz, τότε πώς μετασχηματίζονται το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο;

Ερ 4. Υπάρχουν μεγέθη (συναρτήσεις των πεδίων), τα οποία είναι αναλλοίωτα κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz;

Ειδικά για το τρίτο ερώτημα μπορούμε να παρατηρήσουμε το εξής: Ας θεωρήσουμε ένα σημειακό ηλεκτρικό φορτίο που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς το σύστημα εργαστηρίου. Στο σύστημα εργαστηρίου το φορτίο αυτό είναι κινούμενο και επομένως δημιουργεί και ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο. Στο σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου όμως είναι ακίνητο και επομένως δημιουργεί μόνο ηλεκτρικό. Η παραπάνω παρατήρηση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου δεν μπορεί να είναι συνιστώσες δυο διαφορετικών τανυστών. Επειδή δε οι συνιστώσες είναι έξι, δεν μπορούν να είναι συνιστώσες ενός τετρανύσματος. Αναζητούμε λοιπόν έναν τανυστή δευτέρας τάξης (πίνακας 4x4) που να έχει σαν στοιχεία τις συνιστώσες της έντασης του

Ηλεκτρικού και του Μαγνητικού πεδίου. Όμως ένας 4x4 πίνακας έχει εν γένει 16 στοιχεία. Ένας καλός υποψήφιος 4x4 πίνακας που έχει μόνο 6 ανεξάρτητα μη μηδενικά στοιχεία είναι ένας αντισυμμετρικός πίνακας. Αναζητούμε λοιπόν έναν αντισυμμετρικό τανυστή δευτέρας τάξης που να έχει σαν στοιχεία τις έξι εντάσεις και το πρώτο μέλος των εξισώσεων Maxwell να είναι τανυστές που παράγονται από αυτόν. Με το δεύτερο μέλος των εξισώσεων (πυκνότητα ρεύματος και πυκνότητα φορτίου) τα πράγματα είναι πιο απλά. Οι τέσσερις αυτές ποσότητες μπορούν να αποτελέσουν τις συνιστώσες ενός τετρανύσματος

6.2 Οι πηγές

Θεωρούμε μια τυχαία κατανομή κινουμένων φορτίων. Σε ένα τυχαίο χωροχρονικό σημείο $x = \begin{bmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct \\ \vec{x} \end{bmatrix}$, η πυκνότητα φορτίου και ρεύματος αντίστοιχα είναι $\rho(x)$ και $\vec{J}(x)$.

Ονομάζουμε **τετραπυκνότητα** την τετράδα $J^\alpha(x) = \begin{bmatrix} c\,\rho(x) \\ \vec{J}(x) \end{bmatrix}$

Θα αποδείξουμε ότι **η τετραπυκνότητα είναι ανταλλοίωτο τετράνυσμα**.

Απόδειξη

Για λόγους απλότητας ας θεωρήσουμε κατ' αρχάς ένα υλικό σημείο φορτίου e, το οποίο κινείται στο χώρο διαγράφοντας μια κοσμική γραμμή στον χωρόχρονο.

Αν χρησιμοποιήσουμε σαν παράμετρο της κοσμικής γραμμής την χρονική συντεταγμένη ξ, τότε οι χωροχρονικές συντεταγμένες της θέσης του είναι:

$$\begin{bmatrix} \xi^0 \\ \vec{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \\ \vec{\xi}(\xi) \end{bmatrix} \text{ (την χρονική στιγμή } \frac{\xi}{c} \text{ βρίσκεται στην θέση } \vec{\xi}(\xi)$$

Την στιγμή $\frac{x^0}{c}$ το φορτίο βρίσκεται στη θέση $\vec{\xi}(x^0)$ και έχει ταχύτητα $\vec{v}(x^0)$. Επομένως, την χρονική στιγμή $\frac{x^0}{c}$ οι πυκνότητες φορτίου και ρεύματος στην θέση $\vec{x}$ είναι:

$$\rho(x) = e\,\delta^3\left(\vec{x} - \vec{\xi}(x^0)\right)$$
$$\vec{J}(x) = e\,\vec{v}(x^0)\,\delta^3\left(\vec{x} - \vec{\xi}(x^0)\right)$$

όπου $x = (x^0, \vec{x})$.

Επειδή $f(\alpha) = \int f(\beta)\delta(\alpha - \beta)d\beta$ και $\delta(\alpha - \beta) = \delta(\beta - \alpha)$ συμπεραίνουμε ότι:

$$\rho(x) = e\,\delta^3\left(\vec{x} - \vec{\xi}(x^0)\right) = e\int \delta^3\left(\vec{x} - \vec{\xi}(\xi)\right)\delta(\xi - x^0)d\xi$$
$$= e\int \delta^3\left(\vec{x} - \vec{\xi}(\xi)\right)\delta(x^0 - \xi)d\xi$$

Θεωρούμε μια επαναπαραμετροποίηση της κοσμικής γραμμής του σωματιδίου με νέα παράμετρο τον ιδιόχρονο τ του σωματιδίου. Έστω $\xi = \phi(\tau)$ η σχέση χρονικής συντεταγμένης και ιδιόχρονου. Επομένως το χωροχρονικό διάνυσμα θέσης του φορτισμένου υλικού σημείου γίνεται:

$$q(\tau) = \begin{bmatrix} \xi^0 \\ \vec{\xi}(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(\tau) \\ \vec{\xi}(\phi(\tau)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^0(\tau) \\ \vec{q}(\tau) \end{bmatrix}$$

(οι συναρτήσεις $q^\alpha(\tau)$ προκύπτουν από τις $\xi^\alpha(\xi)$ αντικαθιστώντας την μεταβλητή ξ από την σχέση $\xi = \phi(\tau)$).
Για το διαφορικό dξ ισχύει ότι:

$$\xi = \phi(\tau) \Rightarrow d\xi = \frac{d\phi}{d\tau}d\tau = \frac{d\xi^0}{d\tau}d\tau \Rightarrow d\xi = u^0(\tau)d\tau$$

όπου $u^0(\tau)$ η 0 συνιστώσα της τετραταχύτητας του υλικού σημείου.
Αντικαθιστούμε στην πυκνότητα φορτίου:

$$\rho(x) = e\int \delta^3\left(\vec{x} - \vec{q}(\tau)\right)\delta\left(x^0 - q^0(\tau)\right)u^0(\tau)d\tau$$

Όμως $\delta^3\left(\vec{x} - \vec{q}(\tau)\right)\delta\left(x^0 - q^0(\tau)\right) = \delta^4\left(x - q(\tau)\right)$
Βάσει των παραπάνω η πυκνότητα φορτίου δίνεται από την σχέση:

$$\rho(x) = e\int \delta^4\left(x - q(\tau)\right)u^0(\tau)d\tau \tag{6.2.1}$$

Ομοίως για την i συνιστώσα της πυκνότητας ρεύματος ισχύουν τα εξής:

$$J^i(x) = e\upsilon^i(x^0)\,\delta^3\left(\vec{x} - \vec{\xi}(x^0)\right) = e\int \upsilon^i(\xi)\delta^3\left(\vec{x} - \vec{\xi}(\xi)\right)\delta(\xi - x^0)d\xi =$$
$$e\int \upsilon^i(\xi)\,\delta^3\left(\vec{x} - \vec{\xi}(\xi)\right)\delta(x^0 - \xi)d\xi$$

Όμως

$$\upsilon^i(\xi) = c\frac{d\xi^i}{d\xi} = c\frac{d\xi^i}{d\tau}\frac{d\tau}{d\xi} = cu^i(\tau)\frac{d\tau}{d\xi} \quad \text{και} \quad d\xi = \frac{d\xi}{d\tau}d\tau$$

Αντικαθιστώντας στην πυκνότητα ρεύματος προκύπτει ότι:

$$J^i(x) = c\,e\int u^i(\tau)\,\delta^4\left(x - q(\tau)\right)d\tau \tag{6.2.2}$$

Χρησιμοποιώντας τις (6.2.1) και (6.2.2) και τον ορισμό της τετραπυκνότητας καταλήγουμε στην σχέση:

$$J^\alpha(x) = c\,e\int u^\alpha(\tau)\,\delta^4\left(x - q(\tau)\right)d\tau \tag{6.2.3}$$

Θεωρούμε τώρα ένα ορθόχρονο κανονικό μετασχηματισμό Lorentz $L^{\alpha}{}_{\beta}$.
Επειδή |L| =1 η συνάρτηση του Dirac είναι αναλλοίωτο. Η τετραταχύτητα u^{α} είναι τετράνυσμα και επομένως η τετραπυκνότητα είναι τετράνυσμα.

Τέλος θεωρούμε μια τυχαία κατανομή N φορτισμένων υλικών σημείων. Επειδή η πυκνότητα φορτίου και ρεύματος σε κάθε σημείο του χώρου είναι το άθροισμα των πυκνοτήτων που δημιουργεί κάθε φορτίο χωριστά, συμπεραίνουμε ότι:

$$J^{\alpha}(x) = \sum_{n=1}^{N} J^{\alpha}_{(n)}(x) \tag{6.2.4}$$

Επομένως η τετραπυκνότητα είναι τετράνυσμα (πιο σωστά ανταλλοίωτο διανυσματικό πεδίο) ως άθροισμα τετρανυσμάτων.

6.3 Οι εξισώσεις του Maxwell

Γνωρίζουμε ότι οι 4 εξισώσεις του Maxwell γράφονται σε διαφορική μορφή:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{6.3.1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{6.3.2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{6.3.3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathrm{E}}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J} \tag{6.3.4}$$

Μεταξύ των σταθερών ε_0 , μ_0 και c ισχύει η σχέση:

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \tag{6.3.5}$$

Θεωρούμε τον αντισυμμετρικό πίνακα

$$[F^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{E}_1 & \mathrm{E}_2 & \mathrm{E}_3 \\ -\mathrm{E}_1 & 0 & c\mathrm{B}_3 & -c\mathrm{B}_2 \\ -\mathrm{E}_2 & -c\mathrm{B}_3 & 0 & c\mathrm{B}_1 \\ -\mathrm{E}_3 & c\mathrm{B}_2 & -c\mathrm{B}_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.3.6}$$

Θα αποδείξουμε ότι οι 4 εξισώσεις του Maxwell μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των παραγώγων του $F^{\mu\nu}$. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε ότι:

Θεώρημα 6.3.1 *Α) οι μη ομογενείς εξισώσεις (6.3.1) και (6.3.4) μπορούν να γραφούν με την τανυστική μορφή:*

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\; J^{\mu} \tag{6.3.7}$$

Β) οι ομογενείς εξισώσεις (6.3.2) και (6.3.3) μπορούν να γραφούν με την μορφή:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} = 0 \tag{6.3.8}$$

Απόδειξη

Α) Θεωρούμε την μηδενική συνιστώσα του πρώτου μέλους της (6.3.7):

$$\frac{\partial F^{0\nu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial F^{01}}{\partial x^{1}} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^{3}} = \frac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial x^{1}} + \frac{\partial \mathrm{E}_2}{\partial x^{2}} + \frac{\partial \mathrm{E}_3}{\partial x^{3}} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\; J^{0}$$

Θεωρούμε την 1 συνιστώσα του πρώτου μέλους της (6.3.7):

$$\frac{\partial F^{1\nu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial F^{10}}{\partial x^{0}} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^{3}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t} + c\frac{\partial B_3}{\partial x^{2}} - c\frac{\partial B_2}{\partial x^{3}} = c\Big(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t} + \frac{\partial B_3}{\partial x^{2}} - \frac{\partial B_2}{\partial x^{3}}\Big)$$

όμως η 1 συνιστώσα της (6.3.4) είναι:

$$\frac{\partial B_3}{\partial x^{2}} - \frac{\partial B_2}{\partial x^{3}} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t} = \mu_0 J^1 \Rightarrow \frac{\partial B_3}{\partial x^{2}} - \frac{\partial B_2}{\partial x^{3}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t} = \mu_0 J^1$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω προκύπτει ότι $\frac{\partial F^{1\nu}}{\partial x^{\nu}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\; J^1$.
Ομοίως για τις 2 και 3 συνιστώσες της (6.3.7)
Β) Θα υπολογίσουμε κατ' αρχάς την συναλλοίωτη μορφή του $F^{\mu\nu}$.
Ας συμβολίσουμε την συναλλοίωτη μορφή του πίνακα με τον πίνακα $\tilde{F} = [F_{\mu\nu}]$.
Ισχύει ότι $F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}F^{\alpha\beta} \Rightarrow \tilde{F} = \eta F \eta$
Γράφουμε τον πίνακα F στην μορφή $F = \begin{bmatrix} 0 & E^T \\ -E & F_B \end{bmatrix}$ όπου Ε ο 3x1 πίνακας–στήλη με στοιχεία τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου και F_B το 3x3 μέρος του F που περιέχει τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου. Βάσει των παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

$$\tilde{F} = \eta F \eta = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & E^T \\ -E & F_B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 0 & -E^T \\ -E & F_B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -E^T \\ E & F_B \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[F_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{E}_1 & -\mathrm{E}_2 & -\mathrm{E}_3 \\ \mathrm{E}_1 & 0 & c\mathrm{B}_3 & -c\mathrm{B}_2 \\ \mathrm{E}_2 & -c\mathrm{B}_3 & 0 & c\mathrm{B}_1 \\ \mathrm{E}_3 & c\mathrm{B}_2 & -c\mathrm{B}_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.3.9}$$

Υπολογίζουμε τώρα το πρώτο μέλος της 0 συνιστώσας της (6.3.8) : $\varepsilon^{0\beta\gamma\delta}\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta}$ Τυπικά η παράσταση αποτελείται από $4^3 = 64$ όρους. Όμως αν κάποιος από τους δείκτες β, γ, δ πάρει την τιμή 0 το αντίστοιχο $\varepsilon^{0\beta\gamma\delta}$ μηδενίζεται. Επίσης αν δύο τιμές των δεικτών είναι ίσες τότε πάλι το $\varepsilon^{0\beta\gamma\delta}$ μηδενίζεται. Επομένως οι μη μηδενικοί όροι είναι οι όροι εκείνοι στους οποίους οι δείκτες παίρνουν διαφορετικές μεταξύ τους τιμές και διάφορες από το 0 (π.χ βγδ=123 ή 132 ή 213 ή 231 ή 312 ή 321). Συνεπώς, οι μη μηδενικοί όροι είναι 3!=6. Τέλος επειδή και οι $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ και $F_{\alpha\beta}$ είναι αντισυμμετρικοί θα εμφανιστούν 3 ζεύγη ομοίων όρων (π.χ. $\varepsilon^{0123}\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} = \varepsilon^{0213}\frac{\partial F_{21}}{\partial x^3}$).
Συμπεραίνουμε επομένως ότι:

$$\varepsilon^{0\beta\gamma\delta}\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} = 2(\varepsilon^{0123}\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} + \varepsilon^{0231}\frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} + \varepsilon^{0132}\frac{\partial F_{13}}{\partial x^2}) =$$
$$2c(\frac{\partial B_3}{\partial x^3} + \frac{\partial B_1}{\partial x^1} + \frac{\partial B_2}{\partial x^2}) = 2c\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

Ομοίως για την 1 συνιστώσα της (6.3.8) ισχύει ότι:

$$\varepsilon^{1\beta\gamma\delta}\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} = 2(\varepsilon^{1023}\frac{\partial F_{02}}{\partial x^3} + \varepsilon^{1032}\frac{\partial F_{03}}{\partial x^2} + \varepsilon^{1320}\frac{\partial F_{32}}{\partial x^0}) = 2(\frac{\partial E_2}{\partial x^3} - \frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_1}{\partial t}) = 0$$

Η τελευταία ισότητα είναι η 1 συνιστώσα της (6.3.2)
Ομοίως αποδεικνύονται και οι 2 και 3 συνιστώσες της (6.3.8)

6.4 Ο νόμος μετασχηματισμού των πεδίων

Όπως είδαμε οι εξισώσεις του Maxwell μπορούν να πάρουν την μορφή

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, J^\mu \quad \text{και} \quad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} = 0$$

Γνωρίζουμε ότι ο $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ είναι τανυστής, η τετραπυκνότητα J^μ είναι ανταλλοίωτο διάνυσμα και ο διαφορικός τελεστής $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ είναι συναλλοίωτος διαφορικός τελεστής.

Επομένως, για να ικανοποιεί ο $F^{\mu\nu}$ τις εξισώσεις Maxwell θα πρέπει να είναι τανυστής δευτέρας τάξης. Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Τα στοιχεία του πίνακα $F^{\mu\nu}$ αποτελούν τις συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου τανυστή δευτέρας τάξης (Ηλεκτρομαγνητικός Τανυστής).

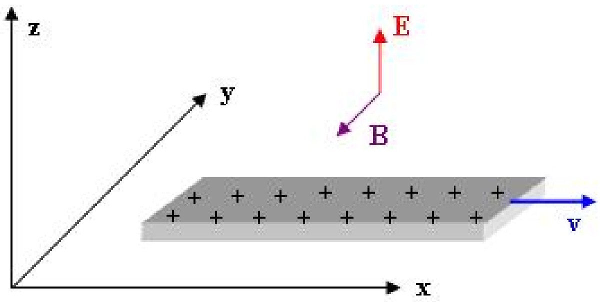
Ας θεωρήσουμε τώρα ένα μετασχηματισμό Lorentz. Ο νόμος μετασχηματισμού του $F^{\mu\nu}$ είναι:

$$F'^{\mu\nu} = L^{\mu}{}_{\alpha} L^{\nu}{}_{\beta} F^{\alpha\beta} \Leftrightarrow [F'^{\mu\nu}] = LFL^{T}$$

Από την εξάρτηση του F από τα E και B θα προκύψει ο νόμος μετασχηματισμού των E και B.

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε μια ακίνητη (στο σύστημα εργαστηρίου) άπειρη μονωτική πλάκα ομοιόμορφα θετικά φορτισμένη με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ_0, η οποία εκτείνεται στο επίπεδο xy. Υποθέτουμε ότι η πλάκα αρχίζει να κινείται με σταθερή ταχύτητα v. Ζητάμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο (στο σύστημα εργαστηρίου) που δημιουργεί η πλάκα αν η κίνησή της γίνεται



α) Κατά την διεύθυνση του άξονα x (παράλληλα στην πλάκα)
β) Κατά την διεύθυνση του άξονα z (κάθετα στην πλάκα)

Λύση

α) Στο σύστημα O΄, που η πλάκα ηρεμεί, η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι $\sigma' = \sigma_0$ και το πεδίο που δημιουργεί είναι μόνο ηλεκτρικό. Γνωρίζουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε ημίχωρο είναι ομογενές και το μέτρο της έντασης δίνεται από την σχέση $E' = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$.
Στο σύστημα ηρεμίας της πλάκας διάφορη του μηδενός είναι μόνο η z συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου. Επομένως ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής είναι:

$$F'^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathrm{E}' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{E}' & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας του μετασχηματισμού Lorentz που συνδέει τα δύο συστήματα συντεταγμένων είναι

$$\Lambda(-v) = [\Lambda^{\mu}{}_{\nu}] = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επειδή ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής είναι τανυστής τα στοιχεία του στο σύστημα εργαστηρίου θα δίνονται από την σχέση:
$F^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}F'^{\mu\nu} \Rightarrow F = \Lambda F' \Lambda^{T} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{E}_1 & \mathrm{E}_2 & \mathrm{E}_3 \\ -\mathrm{E}_1 & 0 & c\mathrm{B}_3 & -c\mathrm{B}_2 \\ -\mathrm{E}_2 & -c\mathrm{B}_3 & 0 & c\mathrm{B}_1 \\ -\mathrm{E}_3 & c\mathrm{B}_2 & -c\mathrm{B}_1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathrm{E}' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{E}' & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{E}_1 & \mathrm{E}_2 & \mathrm{E}_3 \\ -\mathrm{E}_1 & 0 & c\mathrm{B}_3 & -c\mathrm{B}_2 \\ -\mathrm{E}_2 & -c\mathrm{B}_3 & 0 & c\mathrm{B}_1 \\ -\mathrm{E}_3 & c\mathrm{B}_2 & -c\mathrm{B}_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \gamma\mathrm{E}' \\ 0 & 0 & 0 & \gamma\beta\mathrm{E}' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma\mathrm{E}' & -\gamma\beta\mathrm{E}' & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως $E_1 = E_2 = 0$ και $\mathrm{E}_3 = \gamma\mathrm{E}' \Rightarrow \mathrm{E}_3 = \gamma\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$.
$B_1 = B_3 = 0$ και $c\mathrm{B}_2 = -\gamma\beta\mathrm{E}' \Rightarrow \mathrm{B}_2 = -\frac{\gamma\beta\sigma_0}{2c\varepsilon_0} \Rightarrow \mathrm{B}_2 = -\mu_0\gamma\frac{\sigma_0 v}{2}$

Παρατήρηση:

Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι σ_0 στο σύστημα ηρεμίας της πλάκας, δηλαδή στο O΄. Για να υπολογίσουμε την επιφανειακή πυκνότητα στο σύστημα εργαστηρίου, θεωρούμε ένα μικρό ορθογώνιο της πλάκας με διαστάσεις Δx΄ και Δy΄ (στο σύστημα ηρεμίας της πλάκας), στο οποίο περιέχεται φορτίο Δq. Για να υπολογίσουμε τις διαστάσεις του ορθογωνίου στο σύστημα εργαστηρίου θα πρέπει να κάνουμε ταυτόχρονη μέτρηση των συντεταγμένων των κορυφών του (Δt=0). Από τον μετασχηματισμό Lorentz προκύπτει ότι:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \Rightarrow \Delta x' = \gamma\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}(\text{συστολή μήκους})$$

και $\Delta y' = \Delta y$

Επομένως η επιφανειακή πυκνότητα στο σύστημα εργαστηρίου είναι:

$$\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta x \Delta y} = \frac{\gamma\Delta q}{\Delta x' \Delta y'} \Rightarrow \sigma = \gamma\sigma' \Rightarrow \sigma = \gamma\sigma_0$$

Άρα Ε $= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

β) Στο σύστημα ηρεμίας της πλάκας το πεδίο είναι όπως και στο ερώτημα α. Ο πίνακας μετασχηματισμού είναι διαφορετικός:

$$\Lambda(-v) = (\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

$$F^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}F'^{\mu\nu} \Rightarrow F = \Lambda F' \Lambda^{T} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{E}_1 & \mathrm{E}_2 & \mathrm{E}_3 \\ -\mathrm{E}_1 & 0 & c\mathrm{B}_3 & -c\mathrm{B}_2 \\ -\mathrm{E}_2 & -c\mathrm{B}_3 & 0 & c\mathrm{B}_1 \\ -\mathrm{E}_3 & c\mathrm{B}_2 & -c\mathrm{B}_1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathrm{E}' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{E}' & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{E}_1 & \mathrm{E}_2 & \mathrm{E}_3 \\ -\mathrm{E}_1 & 0 & c\mathrm{B}_3 & -c\mathrm{B}_2 \\ -\mathrm{E}_2 & -c\mathrm{B}_3 & 0 & c\mathrm{B}_1 \\ -\mathrm{E}_3 & c\mathrm{B}_2 & -c\mathrm{B}_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathrm{E}' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{E}' & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως η πλάκα δεν δημιουργεί μαγνητικό πεδίο και το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίδιο με εκείνο του συστήματος ηρεμίας της πλάκας.

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε ένα υλικό σημείο φορτίου q που κινείται (στο σύστημα εργαστηρίου) με σταθερή ταχύτητα v. Ζητάμε την ένταση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί.

Λύση

Δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το φορτίο κινείται κατά την θετική κατεύθυνση του άξονα x. Στο σύστημα ηρεμίας του φορτίου O΄ υπάρχει μόνο ηλεκτρικό πεδίο (πεδίο Coulomb). Στο O΄ η ένταση του πεδίου δίνεται από την σχέση:

$$E' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'^2} \Rightarrow \vec{E}' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}'}{r'^3} \Rightarrow E' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Επομένως ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής στο O΄ είναι:

$$F'^{\mu\nu} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}\begin{bmatrix} 0 & x' & y' & z' \\ -x' & 0 & 0 & 0 \\ -y' & 0 & 0 & 0 \\ -z' & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ο πίνακας μετασχηματισμού είναι :

$$\Lambda(-v) = (\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Απο τον νόμο μετασχηματισμού του ηλεκτρομαγνητικού τανυστή προκύπτει ότι

$$F = \Lambda F' \Lambda^T \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{E}_1 & \mathrm{E}_2 & \mathrm{E}_3 \\ -\mathrm{E}_1 & 0 & c\mathrm{B}_3 & -c\mathrm{B}_2 \\ -\mathrm{E}_2 & -c\mathrm{B}_3 & 0 & c\mathrm{B}_1 \\ -\mathrm{E}_3 & c\mathrm{B}_2 & -c\mathrm{B}_1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}\begin{bmatrix} 0 & x' & \gamma y' & \gamma z' \\ -x' & 0 & \gamma\beta y' & \gamma\beta z' \\ -\gamma y' & -\gamma\beta y' & 0 & 0 \\ -\gamma z' & -\gamma\beta z' & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Για να βρούμε πλήρως τον ηλεκτρομαγνητικό τανυστή στο O θα πρέπει να αντικαταστήσουμε και τα x΄, y΄, z΄.

$x' = \gamma(x - vt)$

$y' = y$

$z' = z$

$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2$

Αντικαθιστώντας στον ηλεκτρομαγνητικό τανυστή προκύπτει ότι:

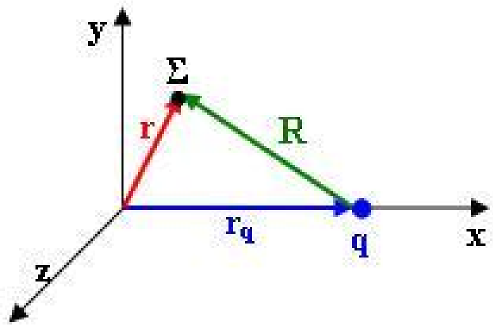
$$\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{E}_1 & \mathrm{E}_2 & \mathrm{E}_3 \\ -\mathrm{E}_1 & 0 & c\mathrm{B}_3 & -c\mathrm{B}_2 \\ -\mathrm{E}_2 & -c\mathrm{B}_3 & 0 & c\mathrm{B}_1 \\ -\mathrm{E}_3 & c\mathrm{B}_2 & -c\mathrm{B}_1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}\begin{bmatrix} 0 & \gamma(x-vt) & \gamma y & \gamma z \\ -\gamma(x-vt) & 0 & \gamma\beta y & \gamma\beta z \\ -\gamma y & -\gamma\beta y & 0 & 0 \\ -\gamma z & -\gamma\beta z & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Από την παραπάνω εξίσωση υπολογίζουμε τις συνιστώσες των πεδίων.

Παρατήρηση

Θέτουμε $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του σημείου Σ στο οποίο υπολογίζουμε τις εντάσεις των δύο πεδίων, $\vec{r}_q$ το διάνυσμα θέσης του φορτίου την χρονική στιγμή t και $\vec{R}$ το διάνυσμα με αρχή το σημείο που βρίσκεται το φορτίο την στιγμή t και πέρας το σημείο Σ.



Προφανώς είναι :

$$\vec{r} = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3, \quad \vec{r}_q = vt\hat{e}_1, \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_q = (x - vt)\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3$$

Θέτουμε

$$w = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

Το διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι:

$$\vec{E} = E_1\hat{e}_1 + E_2\hat{e}_2 + E_3\hat{e}_3 = w\gamma\left((x - vt)\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3\right) \Rightarrow \vec{E} = \gamma w\vec{R}$$

Για το μαγνητικό πεδίο ισχύει ότι

$$c\vec{B} = cB_1\hat{e}_1 + cB_2\hat{e}_2 + cB_3\hat{e}_3 = w\gamma\beta(-z\hat{e}_2 + y\hat{e}_3)$$

Υπολογίζουμε το εξωτερικό γινόμενο $\vec{\beta} \times \vec{R}$:

$$\vec{\beta} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \beta & 0 & 0 \\ x - vt & y & z \end{vmatrix} = \beta(-z\hat{e}_2 + y\hat{e}_3)$$

Επομένως: $c\vec{B} = \gamma w\vec{\beta} \times \vec{R}$
Για τον παρονομαστή του w ισχύει ότι:

$$\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2 = \gamma^2(x-vt)^2 - (x-vt)^2 + (x-vt)^2 + y^2 + z^2 =$$
$$(\gamma^2 - 1)(x-vt)^2 + R^2 \Rightarrow \gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2 = \frac{\gamma^2 v^2 (x-vt)^2}{c^2} + R^2 =$$
$$\frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{R}\cdot\vec{v})^2 + R^2$$

Επομένως

$$w = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{R}\cdot\vec{v})^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

Τελικά για τα πεδία ισχύει ότι:

$$\vec{E} = \frac{\gamma q \vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{R}.\vec{v})^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \frac{\gamma}{c^2} w \vec{v} \times \vec{R} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\gamma q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 \left(\frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{R}\cdot\vec{v})^2 + R^2\right)^{3/2}} \vec{v} \times \vec{R} \Rightarrow$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\gamma q \, \vec{v} \times \vec{R}}{\left(\frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{R}\cdot\vec{v})^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

Στο όριο των μικρών ταχυτήτων ($\frac{v}{c} \ll 1$) ισχύει ότι:
$\gamma \simeq 1$ και $\frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{R}\cdot\vec{v})^2 + R^2 \simeq R^2$
Επομένως $\vec{E} \simeq \frac{q\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ και $\vec{B} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\,\vec{v}x\vec{R}}{R^3}$

Ο γενικός νόμος μετασχηματισμού των πεδίων είναι το αντικείμενο της επόμενης πρότασης:

Θεώρημα 6.4.1 *Θεωρούμε ένα χωροχρονικό σημείο ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Θεωρούμε επίσης ένα τυχαίο ΑΣΑ Ο. Έστω ότι την στιγμή x^0 στην θέση $\vec{x}$ οι εντάσεις του Ηλεκτρικού και του Μαγνητικού πεδίου είναι $\vec{E}$, $\vec{B}$.*

Θεωρούμε έναν παρατηρητή Ο΄ που κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ ως προς τον Ο. Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο που μετρά ο Ο΄ δίνονται από τις σχέσεις

$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}$	$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}$
$\vec{\mathrm{E}}'_{\perp} = \gamma(\vec{\mathrm{E}}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}_{\perp})$	$\vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E}_{\perp})$

όπου $\vec{E}_{\parallel}$, $\vec{B}_{\parallel}$ είναι οι συνιστώσες των δύο πεδίων που είναι παράλληλες στην ταχύτητα του μετασχηματισμού και $\vec{E}_{\perp}$, $\vec{B}_{\perp}$ είναι οι συνιστώσες των δύο πεδίων που είναι κάθετες στην ταχύτητα του μετασχηματισμού.

Απόδειξη

Δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κίνηση του παρατηρητή γίνεται κατά τον άξονα x. Έτσι η αντίστοιχη προώθηση Lorentz είναι

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επειδή ο $F^{\mu\nu}$ είναι τανυστής ισχύει ότι:
$F'^{\mu\nu} = L^{\mu}{}_{\alpha} L^{\nu}{}_{\beta} F^{\alpha\beta} \Rightarrow F' = \Lambda F \Lambda^{\mathrm{T}} \Rightarrow$

$$F' = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{E}_1 & \gamma(\mathrm{E}_2 - \beta c\mathrm{B}_3) & \gamma(\mathrm{E}_3 + \beta c\mathrm{B}_2) \\ -\mathrm{E}_1 & 0 & -\gamma(\beta\mathrm{E}_2 - c\mathrm{B}_3) & -\gamma(\beta\mathrm{E}_3 + c\mathrm{B}_2) \\ -\gamma(\mathrm{E}_2 - \beta c\mathrm{B}_3) & \gamma(\beta\mathrm{E}_2 - c\mathrm{B}_3) & 0 & cB_1 \\ -\gamma(\mathrm{E}_3 + \beta c\mathrm{B}_2) & \gamma(\beta\mathrm{E}_3 + c\mathrm{B}_2) & -cB_1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$E'_1 = E_1$ (ΜΠ 1)
$E'_2 = \gamma(\mathrm{E}_2 - \beta c\mathrm{B}_3)$ (ΜΠ 2)
$E'_3 = \gamma(\mathrm{E}_3 + \beta c\mathrm{B}_2)$ (ΜΠ 3)
$cB'_1 = cB_1$ (ΜΠ 4)
$cB'_2 = \gamma(c\mathrm{B}_2 + \beta\mathrm{E}_3)$ (ΜΠ 5)
$cB'_3 = \gamma(c\mathrm{B}_3 - \beta\mathrm{E}_2)$ (ΜΠ 6)
Οι παραπάνω νόμοι μετασχηματισμού των πεδίων μπορούν να πάρουν πιο γενική μορφή αν παρατηρήσουμε τα εξής :

A) Οι 1 συνιστώσες των πεδίων είναι οι συνιστώσες των πεδίων που είναι παράλληλες στην ταχύτητα του μετασχηματισμού.
Επομένως οι σχέσεις (ΜΠ 1) και (ΜΠ 4) μπορούν να γραφούν ως:
$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}$ και $\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}$

B) Αν $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα στους τρεις άξονες τότε:

$$\vec{\beta} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \beta & 0 & 0 \\ \mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2 & \mathrm{B}_3 \end{vmatrix} = -\beta\mathrm{B}_3\vec{e}_2 + \beta\mathrm{B}_2\vec{e}_3$$

και

$$\vec{\beta} \times \mathrm{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \beta & 0 & 0 \\ \mathrm{E}_1 & \mathrm{E}_2 & \mathrm{E}_3 \end{vmatrix} = -\beta\mathrm{E}_3\vec{e}_2 + \beta\mathrm{E}_2\vec{e}_3$$

Για τις κάθετες στην ταχύτητα του μετασχηματισμού συνιστώσες των δύο πεδίων ισχύει ότι:

$$\vec{\mathrm{E}}'_{\perp} = \mathrm{E}'_2\vec{e}_2 + \mathrm{E}'_3\vec{e}_3 = \gamma(\mathrm{E}_2\vec{e}_2 - \beta cB_3\vec{e}_2 + E_3\vec{e}_3 + \beta cB_2\vec{e}_3) =$$
$$\gamma(\vec{\mathrm{E}}_{\perp} + c\vec{\beta} \times \vec{B}) \Rightarrow \vec{\mathrm{E}}'_{\perp} = \gamma(\vec{\mathrm{E}}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Επειδή $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$ και $\vec{v} \times \vec{E}_{\parallel} = 0$ θα είναι $\vec{v} \times \vec{E} = \vec{v} \times \vec{E}_{\perp}$.

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε για τον νόμο μετασχηματισμού των πεδίων:
$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}$ $\quad \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}$
$\vec{\mathrm{E}}'_{\perp} = \gamma(\vec{\mathrm{E}}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}_{\perp})$ $\quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E}_{\perp})$

Εφαρμογή

Θεωρούμε ένα χωροχρονικό σημείο ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει πάντα μετασχηματισμός Lorentz έτσι ώστε (στο σύστημα συντεταγμένων που ορίζει) η ένταση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου στο σημείο αυτό να είναι παράλληλες..
Υποθέτουμε ότι δεν μελετάμε την περίπτωση που $E = 0$ (π.χ. μαγνητοστατική) ή $B = 0$ (π.χ. ηλεκτροστατική) ή $\vec{B} \perp \vec{E}$ και ταυτόχρονα $E = cB$ (π.χ. επίπεδα κύματα)

Απόδειξη

Έστω $\vec{v}$ η ταχύτητα του μετασχηματισμού. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει διάνυσμα $\vec{v}$ κάθετο και στην ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και στην ένταση του μαγνητικού πεδίου με την ιδιότητα που θέλουμε. Για να είναι η ταχύτητα κάθετη και στα δύο πεδία θα πρέπει να είναι ανάλογη με το εξωτερικό τους γινόμενο.
Αναζητούμε λοιπόν αριθμό λ έτσι ώστε $\vec{v} = \lambda \vec{\mathrm{E}} \times \vec{B}$
Επειδή $\vec{v} \perp \vec{E} \Rightarrow \vec{E}_{\parallel} = 0 \Rightarrow \vec{E}_{\perp} = \vec{E}$. Ομοίως $\vec{B}_{\parallel} = 0$ και $\vec{B}_{\perp} = \vec{B}$.
Για τις εντάσεις στο νέο σύστημα συντεταγμένων ισχύει ότι:
$\vec{E}' = \vec{\mathrm{E}}'_{\parallel} + \vec{\mathrm{E}}'_{\perp} = \vec{E}_{\parallel} + \gamma(\vec{\mathrm{E}}_{\perp} + \vec{v}\, x\, \vec{B}_{\perp}) \Rightarrow \vec{E}' = \gamma(\vec{\mathrm{E}} + \vec{v} \times \vec{B})$
Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $\vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E})$

Για να είναι τα πεδία στο νέο σύστημα συντεταγμένων παράλληλα μεταξύ τους θα πρέπει:
$\vec{E}' \times \vec{B}' = 0 \Rightarrow (\vec{\mathrm{E}} + \vec{v} \times \vec{B}) \times (c^2\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}) = 0$ (1)
Κάνοντας χρήση της ταυτότητας

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$$

μπορούμε να υπολογίσουμε τα γινόμενα $\vec{v} \times \vec{E}$ και $\vec{v} \times \vec{B}$.

$$\vec{v} \times \vec{E} = \lambda(\vec{E} \times \vec{B}) \times \vec{E} = \lambda \mathrm{E}^2\vec{\mathrm{B}} - \lambda(\vec{\mathrm{E}} \cdot \vec{\mathrm{B}})\vec{\mathrm{E}}$$

$$\vec{v} \times \vec{\mathrm{B}} = \lambda(\vec{E} \times \vec{B}) \times \vec{\mathrm{B}} = \lambda(\vec{\mathrm{E}} \cdot \vec{\mathrm{B}})\vec{\mathrm{B}} - \lambda \mathrm{B}^2\vec{\mathrm{E}}$$

Αντικαθιστούμε στην (1) :
$(\vec{\mathrm{E}} + \lambda(\vec{\mathrm{E}} \cdot \vec{\mathrm{B}})\vec{\mathrm{B}} - \lambda\mathrm{B}^2\vec{\mathrm{E}}) \times (c^2\vec{B} - \lambda\mathrm{E}^2\vec{\mathrm{B}} + \lambda(\vec{\mathrm{E}} \cdot \vec{\mathrm{B}})\vec{\mathrm{E}}) = 0 \Rightarrow$
$\left(c^2 - \lambda\mathrm{E}^2 - \lambda^2(\vec{\mathrm{E}} \cdot \vec{\mathrm{B}})^2 - \lambda c^2\mathrm{B}^2 + \lambda^2\mathrm{E}^2\mathrm{B}^2\right) \vec{\mathrm{E}} \times \vec{B} = 0 \Rightarrow$
$\left(\mathrm{E}^2\mathrm{B}^2 - (\vec{\mathrm{E}} \cdot \vec{\mathrm{B}})^2\right) \lambda^2 - (\mathrm{E}^2 + c^2\mathrm{B}^2)\lambda + c^2 = 0$ (2)
Έστω φ η γωνία των $\vec{E}$ και $\vec{B}$. Τότε

$$E^2B^2 - (\vec{E} \cdot \vec{B})^2 = E^2B^2 - E^2B^2\cos^2\phi = E^2B^2\sin^2\phi$$

Η (2) γίνεται:
$\mathrm{E}^2\mathrm{B}^2\sin^2\phi\,\lambda^2 - (\mathrm{E}^2 + c^2\mathrm{B}^2)\lambda + c^2 = 0$ (3)
Η διακρίνουσα της (3) είναι:

$$\Delta = (\mathrm{E}^2 + c^2\mathrm{B}^2)^2 - 4c^2\mathrm{E}^2\mathrm{B}^2\sin^2\phi \geq (\mathrm{E}^2 + c^2\mathrm{B}^2)^2 - 4c^2\mathrm{E}^2\mathrm{B}^2 = (\mathrm{E}^2 - c^2\mathrm{B}^2)^2 \Rightarrow$$
$$\Delta \geq 0$$

Το γινόμενο των ριζών της (3) είναι $P = \frac{c^2}{\mathrm{E}^2\mathrm{B}^2\sin^2\phi} > 0$
Και το άθροισμά τους $S = \frac{(\mathrm{E}^2+c^2\mathrm{B}^2)}{\mathrm{E}^2\mathrm{B}^2\sin^2\phi} > 0$

Επομένως, εκτός από την περίπτωση που $\vec{E}\perp\vec{B}$ $(\sin\phi = 1)$ και $E = cB$, η εξίσωση (3) έχει δύο ρίζες θετικές διάφορες μεταξύ τους.
Επειδή $\vec{v} = \lambda\,\vec{E} \times \vec{B} \Rightarrow |\vec{v}| = |\lambda|\,|\vec{E} \times \vec{B}| = \lambda\mathrm{EB}\sin\phi$.
Για να αποδείξουμε ότι $|\vec{v}| < c \Leftrightarrow \lambda < \frac{c}{\mathrm{EB}\sin\phi}$
θέτουμε $h(z) = \mathrm{E}^2\mathrm{B}^2\sin^2\phi\, z^2 - (\mathrm{E}^2 + c^2\mathrm{B}^2)z + c^2$ και προκύπτει ότι:

$$h\left(\frac{c}{\mathrm{EB}\sin\phi}\right) = 2c^2 - \frac{c(\mathrm{E}^2 + c^2\mathrm{B}^2)}{\mathrm{EB}\sin\phi} = \frac{c}{\mathrm{EB}\sin\phi}(2cBE\sin\phi - \mathrm{E}^2 - c^2B^2) < 0$$

Επομένως η ποσότητα $\frac{c}{\mathrm{EB}\sin\phi}$ είναι μεταξύ των ριζών.
Άρα μόνο για την μία ρίζα ισχύει: $\lambda < \frac{c}{\mathrm{EB}\sin\phi} \Rightarrow |\vec{v}| < c$

6.5 Τα αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

Για να είναι μια παράσταση αναλλοίωτο του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου θα πρέπει να είναι τανυστής μηδενικής τάξης. Επομένως θα πρέπει να είναι μια παράσταση του $F^{\mu\nu}$ και των σταθερών τανυστών $\eta^{\mu\nu}$ και $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ «χωρίς δείκτες».
Επομένως αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι οι ποσότητες $F^{\mu}_{\mu} = F^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu}$, $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}$, $F^{\alpha\beta}F_{\beta\gamma}F^{\gamma}{}_{\alpha}$, $F^{\alpha\beta}F_{\beta\gamma}F^{\gamma\delta}F_{\delta\alpha}$ κλπ.
Επειδή ο $F^{\mu\nu}$ είναι αντισυμμετρικός και ο $\eta_{\mu\nu}$ είναι συμμετρικός για το πρώτο ισχύει ότι $F^{\mu}_{\mu} = F^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = 0$.
Για το δεύτερο ισχύει ότι:

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = F^{0i}F_{0i} + F^{i0}F_{i0} + F^{ij}F_{ij} =$$
$$2(F^{01}F_{01} + F^{02}F_{02} + F^{03}F_{03} + F^{12}F_{12} + F^{13}F_{13} + F^{23}F_{23}) = 2(c^2B^2 - E^2)$$

Για τον υπολογισμό του τρίτου, παρατηρύμε το εξής: Αν κάποιος από τους δείκτες α, β, γ, δ πάρει την τιμή 0 τότε οι υπόλοιποι πρέπει να πάρουν τιμές διάφορες του μηδενός. Επομένως

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} = \varepsilon^{0ijk}F_{0i}F_{jk} + \varepsilon^{i0jk}F_{i0}F_{jk} + \varepsilon^{ij0k}F_{ij}F_{0k} + \varepsilon^{ijk0}F_{ij}F_{k0}$$

Χρησιμοποιώντας την αντισυμμετρική ιδιότητα των ε και F και αλλάζοντας τα ονόματα των δεικτών προκύπτει ότι:
$\varepsilon^{i0jk}F_{i0}F_{jk} = \varepsilon^{0ijk}F_{0i}F_{jk}$
$\varepsilon^{ij0k}F_{ij}F_{0k} = \varepsilon^{kj0i}F_{kj}F_{0i} = \varepsilon^{jk0i}F_{jk}F_{0i} = \varepsilon^{0ijk}F_{0i}F_{jk}$
$\varepsilon^{ijk0}F_{ij}F_{k0} = \varepsilon^{kji0}F_{kj}F_{i0} = \varepsilon^{jki0}F_{jk}F_{i0} = \varepsilon^{0ijk}F_{0i}F_{jk}$
Επομένως
$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} = 4\varepsilon^{0ijk}F_{0i}F_{jk} = 8(\varepsilon^{0123}F_{01}F_{23} + \varepsilon^{0213}F_{02}F_{13} + \varepsilon^{0312}F_{03}F_{12}) = 8c(E_1B_1 + E_2B_2 + E_3B_3) = 8c\vec{E}\cdot\vec{B}$

Προφανώς τα δύο παραπάνω αναλλοίωτα είναι (εν γένει) συναρτησιακώς ανεξάρτητα. Τίθεται όμως το εξής ερώτημα: Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος των (συναρτησιακώς) ανεξαρτήτων αναλλοιώτων; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι η επόμενη πρόταση.

Θεώρημα 6.5.1 *Τα συναρτησιακώς ανεξάρτητα αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι το πολύ δύο.*

Απόδειξη
Θεωρούμε τον μετασχηματισμό Lorentz της προηγούμενης εφαρμογής. Το σύστημα συντεταγμένων που ορίζει καθιστά τα Ε και Β παράλληλα. Με κατάλληλη στροφή του συστήματος συντεταγμένων το προσαρμόζουμε έτσι ώστε τα Ε και Β να έχουν την διεύθυνση του άξονα x. Στο νέο σύστημα συντεταγμένων είναι:

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{E} & 0 & 0 \\ -\mathrm{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c\mathrm{B} \\ 0 & 0 & -c\mathrm{B} & 0 \end{bmatrix}$$

Δύο αναλλοίωτα ας τα ονομάσουμε ξ και θ είναι :
$\xi = F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(c^2B^2 - E^2)$
$\theta = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} = 4cEB$
Λύνοντας το σύστημα των 2 παραπάνω εξισώσεων μπορούμε (στο σύστημα συντεταγμένων που εργαζόμαστε) να εκφράσουμε τα Ε και Β συναρτήσει των ξ και θ. Αν υπολογίσουμε οποιοδήποτε άλλο αναλλοίωτο θα είναι συνάρτηση των Ε και Β και επομένως και των ξ και θ.
Σαν παράδειγμα αναφέρουμε το αναλλοίωτο $\rho = F^{\alpha\beta}F_{\beta\gamma}F^{\gamma\delta}F_{\delta\alpha}$
Στο ειδικό σύστημα που εργαζόμαστε μπορεί εύκολα να υπολογιστεί:

$$\rho = 2(\mathrm{E}^4 + \mathrm{B}^4c^4) = 2\left((E^2 - c^2B^2)^2 + 2(cEB)^2\right) = \frac{8\xi^2 + \theta^2}{16}$$

Όμως τα αναλλοίωτα είναι αμετάβλητα κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Επομένως, εφ' όσον η σχέση $\rho = \frac{8\xi^2+\theta^2}{16}$ ισχύει σε ένα σύστημα συντεταγμένων, ισχύει σε όλα.

6.6 Σύνοψη και τυπολόγιο

⊙ Οι εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητισμού (εξισώσεις του Maxwell) είναι εξισώσεις τανυστών ως προς μετασχηματισμούς Lorentz. Οι εξισώσεις του Maxwell μπορούν να γραφούν στην ισοδύναμη μορφή

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\; J^{\mu}$$

και

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} = 0$$

⊙ Το πρώτο μέλος των εξισώσεων περιλαμβάνει τον ηλεκτρομαγνητικό τανυστή, ο οποίος είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής δευτέρας τάξης που κατασκευάζεται από τα πεδία (ηλεκτρικό και μαγνητικό):

$$[F^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{E}_1 & \mathrm{E}_2 & \mathrm{E}_3 \\ -\mathrm{E}_1 & 0 & c\mathrm{B}_3 & -c\mathrm{B}_2 \\ -\mathrm{E}_2 & -c\mathrm{B}_3 & 0 & c\mathrm{B}_1 \\ -\mathrm{E}_3 & c\mathrm{B}_2 & -c\mathrm{B}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

⊙ Το δεύτερο μέλος των εξισώσεων είναι ένα ανταλλοίωτο τετράνυσμα που κατασκευάζεται από την πυκνότητα φορτίου και ρεύματος:

$$[J^{\alpha}(x)] = \begin{bmatrix} c\,\rho(x) \\ \vec{J}(x) \end{bmatrix}$$

⊙ Χρησιμοποιώντας τον νόμο μετασχηματισμού του τανυστή F μπορούμε να βρούμε τον νόμο μετασχηματισμού των πεδίων κάτω από προώθηση Lorentz.

$$\begin{array}{ll} \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} & \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{\mathrm{E}}'_{\perp} = \gamma(\vec{\mathrm{E}}_{\perp} + \vec{v}\, \times\, \vec{B}_{\perp}) & \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\vec{v}\, \times\, \vec{E}_{\perp}) \end{array}$$

όπου $\vec{E}_{\parallel}$, $\vec{B}_{\parallel}$ οι συνιστώσες των δύο πεδίων που είναι παράλληλες στην ταχύτητα του μετασχηματισμού και $\vec{E}_{\perp}$, $\vec{B}_{\perp}$ οι συνιστώσες των δύο πεδίων που είναι κάθετες στην ταχύτητα του μετασχηματισμού.

⊙ Τα ανεξάρτητα αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι το πολύ 2. Σαν ανεξάρτητα αναλλοίωτα μπορούν να ληφθούν τα

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(c^2B^2 - E^2)$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} = 8c\vec{E}\cdot\vec{B}$$

Κεφάλαιο 7

ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

7.1 Γενικά

Μέχρι τώρα μελετήσαμε την κίνηση ενός υλικού σημείου μόνο «κινηματικά». Λείπει η εξίσωση που προσδιορίζει την κίνησή του αν είναι γνωστό το αίτιο που την προκάλεσε. Ποιά είναι η εξίσωση που θα αντικαταστήσει τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα;

Στην κλασσική μηχανική ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός υλικού σημείου και η ασκουμένη δύναμη συνδέονται με την σχέση $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow F^i = \frac{dp^i}{dt}$

Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας ορίζουμε την έννοια της **τετραδύναμης** f^μ μέσω της σχέσης

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} \tag{7.1.1}$$

Η σχέση (7.1.1) μπορεί να πάρει ισοδύναμη μορφή στην οποία να υπεισέρχονται χρονικές παραγωγίσεις ως εξής:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{dp^\mu}{dt} = \gamma\begin{bmatrix} \frac{dp^0}{dt} \\ \frac{d\vec{p}}{dt} \end{bmatrix} = \gamma\begin{bmatrix} mc\frac{d\gamma}{dt} \\ m\frac{d(\gamma\vec{v})}{dt} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = m\gamma\begin{bmatrix} c\frac{d\gamma}{dt} \\ \frac{d(\gamma\vec{v})}{dt} \end{bmatrix} = m\gamma\begin{bmatrix} c\frac{d\gamma}{dt} \\ \frac{d\gamma}{dt}\vec{v} + \gamma\frac{d\vec{v}}{dt} \end{bmatrix}$$

Η χρονική παράγωγος του γ έχει υπολογιστεί στην παράγραφο 4.4 που αφορούσε στην τετραεπιτάχυνση:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2}\vec{v}.\vec{\mathrm{a}}$$

Επομένως η σχετικιστική εξίσωση κίνησης γίνεται:

$$f^\mu = m\gamma\begin{bmatrix} \frac{\gamma^3}{c}(\vec{v}.\vec{\mathrm{a}}) \\ \frac{\gamma^3}{c^2}(\vec{v}.\vec{\mathrm{a}})\vec{v} + \gamma\vec{\mathrm{a}} \end{bmatrix} \tag{7.1.2}$$

Πώς όμως μπορούμε να υπολογίσουμε την τετραδύναμη που ασκείται σε ένα σωματίδιο;

Ας υποθέσουμε ότι σε ένα ΑΣΑ Ο, κάποια χρονική στιγμή t το σωματίδιο έχει ταχύτητα $\vec{v}$. Θεωρούμε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων Ο΄, το οποίο ορίζεται μέσω της σχέσης

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\vec{v})x^{\nu} \tag{7.1.3}$$

Στο σύστημα αυτό (στιγμιαίο σύστημα ηρεμίας) θεωρούμε την τετράδα

$$f'^{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{F} \end{bmatrix} \tag{7.1.4}$$

όπου $\vec{F}$ η μη σχετικιστική δύναμη που δέχεται το σωματίδιο. Ανακηρύσσουμε την τετράδα f'^{μ} σε τετράνυσμα με αποτέλεσμα η τετραδύναμη στο σύστημα Ο να δίνεται από την εξίσωση:

$$f^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(-\vec{v})f'^{\nu} \tag{7.1.5}$$

Μπορούμε να εκφράσουμε την τετραδύναμη f, στο τοπικό σύστημα ηρεμίας, συναρτήσει της δύναμης F που δέχεται και της στιγμιαίας ταχύτητας $\vec{v}$ ως εξής:
Είναι $\Lambda(-\vec{v}) = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta^{\mathrm{T}} \\ \gamma\beta & \mathrm{I} + \frac{\gamma-1}{|\vec{\beta}|^2}\beta\beta^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$
Επομένως:

$$f = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta^{\mathrm{T}} \\ \gamma\beta & \mathrm{I} + \frac{\gamma-1}{|\vec{\beta}|^2}\beta\beta^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\beta^{\mathrm{T}}F \\ F + \frac{\gamma-1}{|\vec{\beta}|^2}\beta\beta^{\mathrm{T}}F \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$f = \begin{bmatrix} \frac{\gamma(\vec{v}\cdot\vec{F})}{c} \\ \vec{F} + \frac{\gamma-1}{|\vec{v}|^2}(\vec{v}\cdot\vec{F})\vec{v} \end{bmatrix} \tag{7.1.6}$$

Ο συνδυασμός των (7.1.2) και (7.1.6) είναι η διαφορική εξίσωση που θα προσδιορίσει την κίνηση του σωματιδίου.

Παράδειγμα

Θεωρούμε ένα ομογενές πεδίο βαρύτητας έντασης g κατά την θετική κατεύθυνση του άξονα x . Ένα υλικό σημείο μάζας m αφήνεται την χρονική στιγμή t=0 να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα. Να βρείτε την ταχύτητά του συναρτήσει του χρόνου.

Λύση

Έστω τυχαία χρονική στιγμή στην οποία το σωματίδιο έχει ταχύτητα υ. Στο τοπικό σύστημα ηρεμίας Ο΄ του σωματιδίου η μη σχετικιστική δύναμη που δέχεται είναι F=mg.

Επομένως στο Ο΄ η τετραδύναμη που του ασκείται είναι: $f'^{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix}$
Στο σύστημα εργαστηρίου ισχύει ότι:

$$f^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(-\vec{v})f'^{\nu} \Rightarrow f = \Lambda(-v)f' \Rightarrow f = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix} = \gamma m \begin{bmatrix} \frac{v}{c}g \\ g \end{bmatrix}$$

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης γίνεται:

$$\gamma m \begin{bmatrix} \frac{v}{c}g \\ g \end{bmatrix} = m\gamma \begin{bmatrix} \frac{\gamma^3}{c}v\mathrm{a} \\ \frac{\gamma^3}{c^2}(v\mathrm{a})\mathrm{v} + \gamma\mathrm{a} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} g = \gamma^3\mathrm{a} \\ g = \frac{\gamma^3}{c^2}v^2\mathrm{a} + \gamma\mathrm{a} \end{bmatrix}$$

Εύκολα φαίνεται ότι η δεύτερη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την πρώτη και επομένως μοναδική εξίσωση κίνησης είναι η:

$$g = \gamma^3\mathrm{a} \Leftrightarrow \mathrm{g} = (1 - \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2})^{-3/2}\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} \Leftrightarrow (1 - \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2})^{-3/2}\mathrm{dv} = \mathrm{gdt} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^v (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-3/2} dv = \int_0^t gdt \Leftrightarrow (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} v = gt \Rightarrow v(t) = \frac{cgt}{\sqrt{c^2 + g^2t^2}}$$

Παρατήρηση
Παρατηρούμε ότι $\lim_{t\to\infty} v(t) = c$.
Επομένως η κίνηση είναι (όχι ομαλά) επιταχυνόμενη με οριακή τιμή την ταχύτητα του φωτός. Η αντίστοιχη κλασσική εξίσωση της ταχύτητας θα ήταν υ=gt με αποτέλεσμα σε πεπερασμένο χρόνο η ταχύτητα του σωματιδίου να υπερβαίνει την ταχύτητα του φωτός.

7.2 Τετραδύναμη Lorentz

Θεωρούμε ένα φορτισμένο σωματίδιο που κινείται (ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς Ο) σε κάποιο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Ζητάμε να υπολογίσουμε την τετραδύναμη Lorentz που δέχεται. Αν θυμηθούμε την κλασσική σχέση που δίνει την δύναμη Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, η τετραδύναμη θα πρέπει να είναι ανάλογη με τις εντάσεις των πεδίων και επομένως ανάλογη με τις συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού τανυστή. Επίσης θα πρέπει να είναι ανάλογη με την ταχύτητα του σωματιδίου. Τέλος θα πρέπει να είναι τετράνυσμα. Το μόνο τετράνυσμα που μπορούμε να γράψουμε με τις παραπάνω ιδιότητες είναι ο συνδυασμός $F^{\alpha\beta}u_{\beta}$. Θα αποδείξουμε το εξής

Θεώρημα 7.2.1 *Η τετραδύναμη Lorentz που ασκείται σε ένα φορτισμένο σωματίδιο δίνεται από την σχέση:*

$$f^\alpha = \frac{q}{c}F^{\alpha\beta}u_\beta \tag{7.2.1}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε το τοπικό σύστημα ηρεμίας Ο΄ του σωματιδίου. Στο σύστημα αυτό η μη σχετικιστική δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι η δύναμη του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{F} = \vec{E}q$. Επομένως η τετραδύναμη στο Ο΄ είναι:

$$f' = \begin{bmatrix} 0 \\ E'q \end{bmatrix}$$

Το ανταλλοίωτο τετράνυσμα της τετραταχύτητας είναι

$$[u'^\mu] = \begin{bmatrix} \gamma' c \\ \gamma' \vec{v}\,' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το αντίστοιχο συναλλοίωτο $[u'_\mu]$ δίνεται από την σχέση

$$u'_\mu = \eta_{\mu\nu}u'^\nu \Rightarrow [u'_\mu] = \eta[u'^\mu] \Rightarrow [u'_\mu] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως ο συνδυασμός $\frac{q}{c}F^{\alpha\beta}u_\beta$ είναι το (ανταλλοίωτο) τετράνυσμα:

$$\frac{q}{c}\begin{bmatrix} 0 & E'^T \\ -E' & F_B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ qE' \end{bmatrix} = f'$$

Συνεπώς, $f'^\mu = \frac{q}{c}F'^{\alpha\beta}u'_\beta$.

Επειδή η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση τανυστών, που ισχύει σε ένα σύστημα συντεταγμένων, ισχύει σε κάθε σύστημα συντεταγμένων.

Γνωρίζοντας την τετραδύναμη Lorentz που ασκείται στο σωματίδιο μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση κίνησής του:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu \Rightarrow \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_\nu \tag{7.2.2}$$

Η (7.2.2) μπορεί να πάρει μια πιο εύχρηστη μορφή στην οποία να υπεισέρχονται χρονικές παράγωγοι.
Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε το εξής

Θεώρημα 7.2.2 *Η εξίσωση κίνησης ενός φορτισμένου σωματιδίου σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι:*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \tag{7.2.3}$$

Απόδειξη
Ισχύει ότι

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma}\vec{f}$$

όπου γ=γ(v) και $\vec{f}$ η χωρική συνιστώσα της τετραδύναμης.
Υπολογίζουμε την τετραδύναμη f

$$f^\mu = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_\nu \Rightarrow \begin{bmatrix} f^0 \\ f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{bmatrix} = \frac{q}{c}\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{E}_1 & \mathrm{E}_2 & \mathrm{E}_3 \\ -\mathrm{E}_1 & 0 & c\mathrm{B}_3 & -c\mathrm{B}_2 \\ -\mathrm{E}_2 & -c\mathrm{B}_3 & 0 & c\mathrm{B}_1 \\ -\mathrm{E}_3 & c\mathrm{B}_2 & -c\mathrm{B}_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\gamma c \\ \gamma v_1 \\ \gamma v_2 \\ \gamma v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$f = \frac{\gamma q}{c}\begin{bmatrix} \mathrm{E}_1 v_1 + \mathrm{E}_2 v_2 + \mathrm{E}_3 v_3 \\ c(E_1 + B_3 v_2 - B_2 v_3) \\ c(E_2 + B_1 v_3 - B_3 v_1) \\ c(E_1 + B_2 v_1 - B_1 v_2) \end{bmatrix}$$

Επομένως η χωρική συνιστώσα της τετραδύναμης είναι $\vec{f} = \gamma q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση κίνησης $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{\gamma}\vec{f}$ προκύπτει ότι $\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Παράδειγμα: Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε ομογενές μαγνητικό πεδίο

Σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο στην κατεύθυνση του άξονα z. Ένα φορτισμένο σωματίδιο μάζας m και φορτίου q εισέρχεται με ταχύτητα v_0 κάθετη στις δυναμικές γραμμές. Να μελετηθεί η κίνησή του. Συγκρίνατε τα αποτελέσματα με τα αντίστοιχα μη σχετικιστικά.

Λύση

Σύμφωνα με τα δεδομένα ο τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι:

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η αρχική ταχύτητα του σωματιδίου έχει την κατεύθυνση του άξονα x και η αρχική θέση είναι (0,0,0). Έστω u^0, u^1, u^2, u^3 οι συνιστώσες της τετραταχύτητας. Θέτουμε $\gamma_0 = \gamma(v_0)$ και $\lambda = \frac{qB}{m}$.

Για τ=0 είναι $\begin{bmatrix} u^0 & u^1 & u^2 & u^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 c & \gamma_0 v_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Η ΔΕ της κίνησης του σωματιδίου είναι η :

$$f^{\mu} = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_{\nu} \Leftrightarrow m\frac{d}{d\tau}\begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix} = qB\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\frac{du^0}{d\tau} = 0$ (0)
$\frac{du^1}{d\tau} = \lambda u^2$ (1)
$\frac{du^2}{d\tau} = -\lambda u^1$ (2)
$\frac{du^3}{d\tau} = 0$ (3)

Από την (3) συμπεραίνουμε ότι $u^3 = 0 \Rightarrow v_z = 0$.
Από την (0) συμπεραίνουμε ότι $u^0 = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow \gamma = \gamma_0$
Λύνοντας την (2) ως προς u^1 και αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει η ΔΕ

$$\frac{d^2u^2}{d\tau^2} + \lambda^2 u^2 = 0$$

της οποίας η γενική λύση είναι $u^2(\tau) = c_1\sin(\lambda\tau) + c_2\cos(\lambda\tau)$.
Από την (2) προκύπτει ότι $u^1(\tau) = -c_1\cos(\lambda\tau) + c_2\sin(\lambda\tau)$.
Επειδή οι αρχικές συνθήκες είναι $u^1(0) = \gamma_0 v_0$ και $u^2(0) = 0$ καταλήγουμε τελικά στις

$$u^1(\tau) = \gamma_0 v_0\cos(\lambda\tau) \quad \text{και} \quad u^2(\tau) = -\gamma_0 v_0\sin(\lambda\tau)$$

Ολοκληρώνοντας τις συνιστώσες της τετραταχύτητας υπολογίζουμε τις χωροχρονικές συντεταγμένες συναρτήσει του ιδιόχρονου.

$$\frac{dx^0}{d\tau} = u^0 \Leftrightarrow \frac{dt}{d\tau} = \gamma_0 \Leftrightarrow t = \gamma_0\tau \Leftrightarrow \tau = \frac{t}{\gamma_0}$$

$$\frac{dx^1}{d\tau} = u^1 = \gamma_0 v_0\cos(\lambda\tau) \Rightarrow x^1(\tau) = \frac{\gamma_0 v_0}{\lambda}\sin(\lambda\tau) \Rightarrow$$
$$x^1(t) = \frac{m\gamma_0 v_0}{qB}\sin(\frac{qB}{m\gamma_0}t)$$

$$\frac{dx^2}{d\tau} = u^2 = -\gamma_0 v_0\sin(\lambda\tau) \Rightarrow x^2(\tau) = \frac{\gamma_0 v_0}{\lambda}\left[\cos(\lambda\tau) - 1\right] \Rightarrow$$
$$x^2(t) = \frac{m\gamma_0 v_0}{qB}\left[\cos(\frac{qB}{m\gamma_0}t) - 1\right]$$

Παρατηρούμε ότι και σχετικιστικά εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας $R = \frac{m\gamma_0 v_0}{qB}$ και περιόδου $\mathrm{T} = 2\pi\frac{m\gamma_0}{qB}$. Τα αντίστοιχα μη σχετικιστικά αποτελέσματα είναι ίδια δίχως τον παράγοντα γ_0.

7.3 Σύνοψη και τυπολόγιο

⊗ Η δυναμική εξίσωση που περιγράφει σχετικιστικά την κίνηση ενός υλικού σημείου είναι η σχέση

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = f^\mu$$

όπου $\mathrm{a}^\mu = \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}$ η τετραεπιτάχυνση του υλικού σημείου και f^μ η τετραδύναμη που του ασκείται.

⊗ Η τετραεπιτάχυνση συνδέεται με την επιτάχυνση και την ταχύτητα του υλικού σημείου μέσω της σχέσης

$$a^\mu = \begin{bmatrix} \frac{\gamma^4}{c}\vec{v}\cdot\vec{\mathrm{a}} \\ \gamma^2\vec{\mathrm{a}} + \frac{\gamma^4}{c^2}(\vec{v}\cdot\vec{\mathrm{a}})\vec{v} \end{bmatrix}$$

⊗ Η τετραδύναμη συμπίπτει με την μη σχετικιστική δύναμη, που ασκείται στο σωματίδιο στο τοπικό σύστημα ηρεμίας του. Κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού Lorentz που συνδέει το τοπικό σύστημα ηρεμίας με το δοθέν μπορούμε να υπολογίσουμε την τετραδύναμη f.

$$f = \begin{bmatrix} \frac{\gamma(\vec{v}\cdot\vec{F})}{c} \\ \vec{F} + \frac{\gamma-1}{|\vec{v}|^2}(\vec{v}\cdot\vec{F})\vec{v} \end{bmatrix}$$

⊗ Ειδικά για την ηλεκτρομαγνητική τετραδύναμη που ασκείταιι σε ένα φορτισμένο υλικό σημείο ισχύει η σχέση:

$$f^\mu = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_\nu$$

όπου F ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής και u η τετραταχύτητα του υλικού σημείου. Το χωρικό μέρος της τετραδύναμης Lorentz δίνεται από την σχέση:

$$\vec{f} = \gamma q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

Κεφάλαιο 8

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Εφαρμογή 8.1 ***Διαστολή του χρόνου***

Θεωρούμε δύο ΑΣΑ O και O΄, τα οποία κινούνται κατά τον τυποποιημένο τρόπο. Θεωρούμε δύο γεγονότα A και B τα οποία συμβαίνουν στην ίδια θέση του O΄ και διαφέρουν χρονικά κατά Δt΄ για τον O΄. Να βρεθεί η χρονική τους διαφορά όπως μετράται από τον O.

Λύση

Έστω ότι η ταχύτητα του O΄ ως προς O είναι υ.
Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό Lorentz ισχύει ότι
$t_A = \gamma(t'_A + \frac{\upsilon}{c^2}x'_A)$ και $t_B = \gamma(t'_B + \frac{\upsilon}{c^2}x'_B)$.
Αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει ότι: $\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x')$
Όμως Δx΄=0 . Επομένως Δt=γΔt΄

Εφαρμογή 8.2 ***Συστολή του μήκους***

Θεωρούμε δύο ΑΣΑ O και O΄, τα οποία κινούνται κατά τον τυποποιημένο τρόπο. Μια ράβδος έχει την διεύθυνση του άξονα x και ηρεμεί ως προς το O΄. Αν το μήκος της στο O΄ είναι L_0 (μήκος ηρεμίας), να βρεθεί το μήκος της στο O.

Λύση

Έστω ότι η ταχύτητα του O΄ ως προς O είναι υ. Για να μπορέσει ένας παρατηρητής στο O να μετρήσει το μήκος της ράβδου θα πρέπει να κάνει δυο ταυτόχρονες (στο σύστημά του) μετρήσεις των τετμημένων των άκρων της ράβδου. Το μήκος της ράβδου θα είναι προφανώς η διαφορά των δύο τετμημένων. Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό Lorentz ισχύει ότι (αφαιρώντας κατά μέλη) $\Delta x' = \gamma(\Delta x - \upsilon\Delta t)$
Όμως Δt=0. Επομένως $\Delta x' = \gamma\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} \Rightarrow \Delta x = \frac{L_0}{\gamma}$

Εφαρμογή 8.3 ***Φαινόμενο Doppler (ειδική περίπτωση)***

Θεωρούμε μια φωτεινή πηγή ακίνητη ως προς ένα ΑΣΑ O. Έστω ότι η συχνότητα του φωτός που εκπέμπει στο O είναι f. Θεωρούμε ένα δεύτερο σύστημα αναφοράς

Ο΄ που κινείται κατά τον άξονα των x του πρώτου με ταχύτητα υ ως προς αυτό. Να βρεθεί η συχνότητα του φωτός που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής που βρίσκεται στην αρχή Ο΄.

Λύση

Α Τρόπος:

Έστω Τ η περίοδος του φωτεινού σήματος κατά τον Ο και Τ΄ η περίοδος του κατά τον Ο΄. Για να βρούμε την περίοδο Τ΄ θα πρέπει να βρούμε την χρονική διαφορά με την οποία ο παρατηρητής Ο΄ λαμβάνει δύο διαδοχικά φωτόνια που εκπέμπει η πηγή.

Υποθέτουμε ότι την στιγμή t=0, που οι αρχές των δύο συστημάτων συμπίπτουν, η πηγή που βρίσκεται στο Ο εκπέμπει ένα φωτόνιο. Επειδή εκείνη την στιγμή το Ο συμπίπτει με το Ο΄, το φωτόνιο αυτό λαμβάνεται αμέσως από τον παρατηρητή που βρίσκεται στο Ο΄. Το δεύτερο φωτόνιο εκπέμπεται από την πηγή την στιγμή $t_2 = T$ στην θέση $x_2 = 0$. Επομένως η εξίσωση κίνησης του 2ου φωτονίου είναι $x_\phi = c(t - T)$. Η εξίσωση κίνησης του παρατηρητή είναι $x_\pi = vt$. Το φωτόνιο θα φτάσει στον παρατηρητή όταν $x_\phi = x_\pi$.

$$x_\phi = x_\pi \Rightarrow c(t - T) = vt \Rightarrow t = \frac{cT}{c - v}$$

Η θέση του παρατηρητή εκείνη την στιγμή (κατά τον Ο) είναι $x = vt \Rightarrow x = \frac{vcT}{c-v}$
Η χρονική στιγμή (ως προς Ο΄) κατά την οποία το δεύτερο φωτόνιο έφτασε στον παρατηρητή δίνεται από τον μετασχηματισμό Lorentz. $t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$
Αντικαθιστώντας τα x και t καταλήγουμε στην σχέση

$$t' = \frac{\gamma cT}{c - v}(1 - \frac{v^2}{c^2}) = \frac{\gamma cT}{c - v}\frac{1}{\gamma^2} = \frac{cT}{\gamma(c - v)} = \mathrm{T}\sqrt{\frac{c + v}{c - v}}$$

Όμως η χρονική στιγμή t΄ είναι η περίοδος του φωτεινού σήματος κατά τον Ο΄. Επομένως

$$\mathrm{T}' = \mathrm{T}\sqrt{\frac{c + v}{c - v}} \Rightarrow f' = f\sqrt{\frac{c - v}{c + v}}$$

με υ την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του παρατηρητή ως προς την πηγή.

Β Τρόπος:

Το ανταλλοίωτο διάνυσμα της τετραορμής του φωτονίου στα Ο και Ο΄ είναι:

$$P = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} E \\ E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} h\,f \\ h\,f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P' = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} E' \\ E' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} h\,f' \\ h\,f' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας του μετασχηματισμού Lorentz ως γνωστόν είναι ο

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Από τον νόμο μετασχηματισμού της τετραορμής προκύπει ότι:

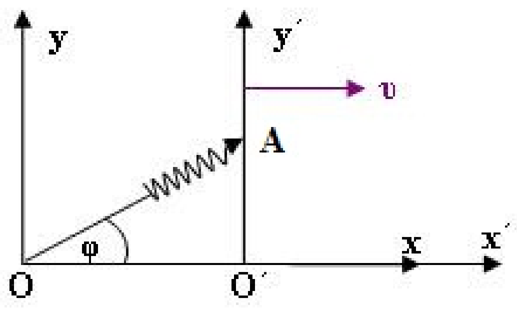
$$P' = \Lambda P \Rightarrow \begin{bmatrix} h\,f' \\ h\,f' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h\,f \\ h\,f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$f' = \gamma(1-\beta)f \Rightarrow f' = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} f \Rightarrow f' = f\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι η παραπάνω σχέση ισχύει με την προϋπόθεση ότι η διεύθυνση παρατηρητής- πηγή συμπίπτει με την διεύθυνση της σχετικής ταχύτητας του παρατηρητή ως προς την πηγή.

Εφαρμογή 8.4 ***Φαινόμενο Doppler (γενική περίπτωση)***

Θεωρούμε μια φωτεινή πηγή ακίνητη ως προς ένα ΑΣΑ Ο. Έστω ότι η συχνότητα του φωτός που εκπέμπει στο Ο είναι f. Θεωρούμε ένα δεύτερο σύστημα αναφοράς Ο΄ που κινείται κατά τον άξονα των x του πρώτου με ταχύτητα υ ως προς αυτό. Να βρεθεί η συχνότητα του φωτός που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής που βρίσκεται σε μια θέση Α έτσι ώστε η ΟΑ να σχηματίζει γωνία φ με την διεύθυνση της ταχύτητας υ.



Λύση

Στον παρατηρητή φτάνουν φωτόνια που εξέπεμψε η πηγή υπό γωνία φ. Έστω Ε η ενέργεια των φωτονίων και p η ορμή τους . Λόγω της σχέσης ενέργειας - ορμής ισχύει ότι $p = \frac{E}{c}$ Η τετραορμή των φωτονίων στα συστήματα Ο και Ο΄ είναι:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{E}{c} \\ p\cos\phi \\ p\sin\phi \end{bmatrix} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} E \\ E\cos\phi \\ E\sin\phi \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P' = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} E' \\ E'\cos\phi' \\ E'\sin\phi' \end{bmatrix}$$

Από τον νόμο μετασχηματισμού της τετραορμής προκύπτει ότι

$$P' = \Lambda P \Rightarrow \begin{bmatrix} E' \\ E'\cos\phi' \\ E'\sin\phi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ E\cos\phi \\ E\sin\phi \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathrm{E}' = \gamma \mathrm{E}(1-\beta\cos\phi) \Rightarrow f' = f\frac{1-\beta\cos\phi}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Εφαρμογή 8.5 ***Μη κεντρική ελαστική κρούση***

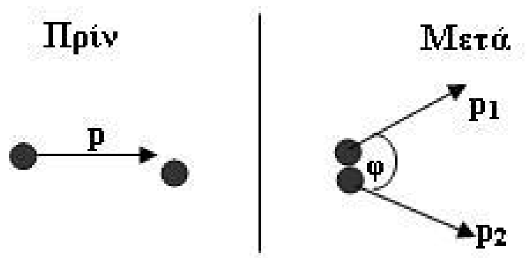
Ένα σωματίδιο με ενέργεια ηρεμίας E και κινητική ενέργεια K ως προς ένα ΑΣΑ συγκρούεται μη κεντρικά και ελαστικά με δεύτερο όμοιο σωματίδιο το οποίο είναι ακίνητο.

1. *Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν οι διευθύνσεις κίνησης των δύο σωματιδίων μετά την κρούση συναρτήσει των ενεργειών των δύο σωματιδίων μετά την κρούση και της ενέργειας ηρεμίας τους.*

2. *Να αποδείξετε ότι μετά την κρούση η γωνία που σχηματίζουν οι διευθύνσεις κίνησης των δύο σωματιδίων είναι οξεία*

3. *Στην ειδική περίπτωση που οι ορμές των δύο σωματιδίων μετά την κρούση έχουν το ίδιο μέτρο, να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν οι διευθύνσεις κίνησης των δύο σωματιδίων μετά την κρούση συναρτήσει των E και K.*

4. *Να συγκρίνετε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (2). με το αντίστοιχο της κλασσικής μηχανικής.*



Λύση

1) *Α Τρόπος (Χωρίς ανάλυση σε συνιστώσες)*

Πριν την κρούση

Η ενέργεια του κινούμενου σωματιδίου πριν την κρούση είναι το άθροισμα της ενέργειας ηρεμίας και της κινητικής του ενέργειας. Επομένως η αρχική ενέργεια του πρώτου σωματιδίου είναι E+K. Επειδή το δεύτερο σωματίδιο είναι ακίνητο η ενέργεια του είναι E. Επομένως η τετραορμή του συστήματος είναι:

$$p_{\pi\rho\iota\nu} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{K+E}}{c} \\ \vec{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E}{c} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{K+2E}}{c} \\ \vec{p} \end{bmatrix}$$

Μετά την κρούση

Οι ορμές των δύο σωματίων είναι $\vec{p_1}$ και $\vec{p_2}$ σχηματίζοντας γωνία φ μεταξύ τους. Αν οι ενέργειές τους είναι E_1 και E_2 τότε η τετραορμή του συστήματος μετά την κρούση είναι:

$$P_{\mu\varepsilon\tau\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E_1}}{c} \\ \vec{p_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E_2}}{c} \\ \vec{p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E_1}+E_2}{c} \\ \vec{p_1} + \vec{p_2} \end{bmatrix}$$

Από την αρχή διατήρησης της τετραορμής προκύπτει ότι:

$$K + 2E = E_1 + E_2 \tag{1}$$

$$\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2} \Rightarrow \vec{p}^{\,2} = \vec{p_1}^{\,2} + \vec{p_2}^{\,2} + 2\vec{p_1}\cdot\vec{p_2} \Rightarrow p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\phi \tag{2}$$

Από την σχέση ενέργειας ορμής έχουμε για το αρχικό σωματίδιο:

$$(\mathrm{K+E})^2 = p^2c^2 + E^2$$

Με χρήση της (1) η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$(E_1 + \mathrm{E_2} - E)^2 = p^2c^2 + E^2 \tag{3}$$

Ομοίως για τις ενέργειες και ορμές μετά την κρούση προκύπτει ότι:

$$E_1{}^2 = p_1^2c^2 + E^2 \tag{4}$$

$$E_2{}^2 = p_2^2c^2 + E^2 \tag{5}$$

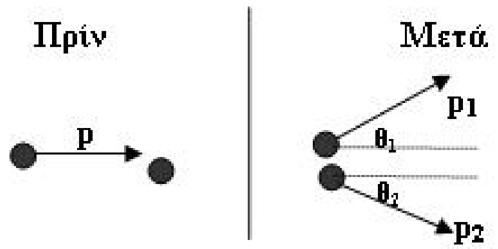
Λύνοντας τις (3) , (4) , (5) ως προς τις ορμές και αντικαθιστώντας στην (2) προκύπτει ότι:

$$E_1E_2 - E_1E - E_2E + E^2 = \sqrt{E_1^2 - E^2}\sqrt{E_2^2 - E^2}\cos\phi \Rightarrow$$

$$(E_1 - E)(E_2 - E) = \sqrt{(E_1 - E)(E_1 + E)}\sqrt{(E_2 - E)(E_2 + E)}\cos\phi \Rightarrow$$

$$\cos\phi = \sqrt{\frac{(\mathrm{E_1-E})(\mathrm{E_2-E})}{(\mathrm{E_1+E})(\mathrm{E_2+E})}} \tag{6}$$

<u>*Β Τρόπος (Με ανάλυση σε συνιστώσες)*</u>



Πριν την κρούση

$$p_{\pi\rho\iota\nu} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{K+E}}{c} \\ p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K+2E}{c} \\ p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Μετά την κρούση
Οι ορμές των δύο σωματίων έχουν μέτρα p_1 και p_2 σχηματίζοντας γωνίες θ_1 και θ_2 με την αρχική διεύθυνση κίνησης. Αν E_1 και E_2 οι ενέργειές τους, τότε η τετραορμή του συστήματος μετά την κρούση θα είναι:

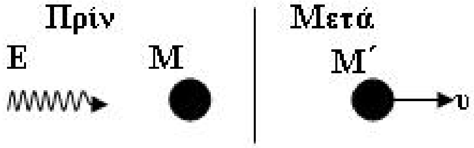
$$P_{\mu\epsilon\tau\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E_1}}{c} \\ p_1 \cos\theta_1 \\ p_1 \sin\theta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E_2}}{c} \\ p_2 \cos\theta_2 \\ -p_2 \sin\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E_1}+E_2}{c} \\ p_1 \cos\theta_1 + p_2 \cos\theta_2 \\ p_1 \sin\theta_1 - p_2 \sin\theta_2 \end{bmatrix}$$

Επειδή η τετραορμή παραμένει σταθερή, συμεπραίνουμε ότι:
$K + 2E = E_1 + E_2$ (1)΄
$p = p_1 \cos\theta_1 + p_2 \cos\theta_2$ (2)΄
$0 = p_1 \sin\theta_1 - p_2 \sin\theta_2$ (3)΄
Υψώνουμε στο τετράγωνο τις (2΄) και (3΄) και προσθέτουμε κατά μέλη:
$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \Rightarrow$
$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\phi$ (4)΄
όπου $\phi = \theta_1 + \theta_2$ η γωνία των $\vec{p_1}$ και $\vec{p_2}$.
Η συνέχεια είναι ίδια όπως και στον Α Τρόπο.
2) Από την (6) προκύπτει ότι $cos\phi > 0 \Rightarrow \phi < \pi/2$
3) Αν $|\vec{p_1}| = |\vec{p_2}|$ τότε από τις (4) και (5) θα είναι και $E_1 = E_2$. Στην περίπτωση αυτή η (6) γίνεται: $\cos\phi = \frac{\mathrm{E_1-E}}{\mathrm{E_1+E}}$.
Από την (1) προκύπτει ότι $\mathrm{E_1 = E} + \frac{\mathrm{K}}{2} \Rightarrow cos\phi = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K+4E}}$.
4) Στην κλασσική μηχανική η σχέση κινητικής ενέργειας και ορμής είναι $\mathrm{K} = \frac{p^2}{2m}$.
Από την διατήρηση της ενέργειας προκύπτει ότι: $K = K_1 + K_2 \Rightarrow p^2 = p_1^2 + p_2^2$
Από την διατήρηση της ορμής : $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\phi$
Συνδυάζοντας τις παραπάνω προκύπτει ότι $cos\phi = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$.

Εφαρμογή 8.6 ***Απορρόφηση φωτονίου από ακίνητο σωματίδιο***

Θεωρούμε ένα σωματίδιο με μάζα ηρεμίας Μ ακίνητο ως προς ένα ΑΣΑ. Ένα φωτόνιο με ενέργεια Ε ως προς το Ο απορροφάται από το σωματίδιο. Να βρεθούν μετά την κρούση:
α) Η μάζα ηρεμίας του σωματιδίου
β) Η ορμή του σωματιδίου
γ) Η κινητική ενέργεια του σωματιδίου

Λύση



α) Η τετραορμή του φωτονίου και του σωματιδίου πριν την κρούση είναι:

$$P_{\phi(\mathrm{A})} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} E \\ E \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P_{\Sigma(\mathrm{A})} = \begin{bmatrix} \mathrm{M}c \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Για λόγους απλότητας στην γραφή, επειδή έχουμε μόνο μια κατευθύνση κίνησης, γράφουμε μόνο τις δύο πρώτες συνιστώσες των τετρανυσμάτων.)

Η τετραορμή του σωματιδίου μετά την κρούση είναι:

$$P_{\Sigma(\mathrm{T})} = \begin{bmatrix} \mathrm{M}'\gamma c \\ \mathrm{M}'\gamma v \end{bmatrix}$$

Από την διατήρηση της τετραορμής προκύπτει ότι :

$$P_{\Phi(\mathrm{A})} + P_{\Sigma(\mathrm{A})} = P_{\Sigma(\mathrm{T})} \Rightarrow \frac{1}{c}\begin{bmatrix} E \\ E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{M}c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{M}'\gamma c \\ \mathrm{M}'\gamma v \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} E + \mathrm{M}c^2 \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{M}'\gamma c^2 \\ \mathrm{M}'\gamma vc \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$E + Mc^2 = M'\,\gamma\,c^2$ (1)
$E = M'\,\gamma\,v\,c$ (2)
Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι

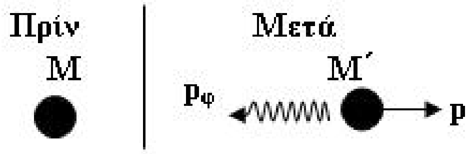
$$v = \frac{c\mathrm{E}}{\mathrm{E} + \mathrm{M}c^2} \Rightarrow \gamma = \frac{\mathrm{E} + \mathrm{M}c^2}{\sqrt{Mc^2(Mc^2 + 2E)}} \quad \text{και} \quad M' = \frac{\sqrt{Mc^2(Mc^2 + 2E)}}{c^2}$$

β) Η ορμή του σωματιδίου μετά την κρούση θα είναι
$p' = M'\gamma v = \frac{E}{c}$.
γ) Η κινητική ενέργεια του σωματιδίου μετά την κρούση θα είναι:
$\mathrm{K} = \mathrm{M}'\gamma c^2 - M'c^2 = M'(\gamma - 1)c^2$.

Εφαρμογή 8.7 ***Εκπομπή φωτονίου από ακίνητο σωματίδιο***

Θεωρούμε ένα σωματίδιο με ενέργεια ηρεμίας E_0 ακίνητο ως προς ένα ΑΣΑ. Το σωματίδιο εκπέμπει ένα φωτόνιο ενέργειας E_ϕ. Να υπολογίσετε την ενέργεια E_ϕ του φωτονίου συναρτήσει της μείωσης στην ενέργεια ηρεμίας του σωματιδίου.

Λύση



Έστω E_0' η νέα ενέργεια ηρεμίας και $\Delta E_0 = \mathrm{E}_0 - \mathrm{E}_0'$ η μείωση στην ενέργεια ηρεμίας του σωματιδίου. Έστω δε p_ϕ η ορμή του φωτονίου που παράγεται και E η ενέργεια του σωματιδίου μετά την κρούση . Οι τετραορμές του συστήματος σωμάτιο-φωτόνιο πριν και μετά την εκπομπή είναι

$$P_{\pi\rho\iota\nu} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E}_0}{c} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P_{\mu\epsilon\tau\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E}_\phi}{c} \\ -p_\phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E}}{c} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E}_\phi + \mathrm{E}}{c} \\ -p_\phi + p \end{bmatrix}$$

Από την διατήρηση της τετραορμής προκύπτει ότι:

$E_0 = E_\phi + \mathrm{E} \Rightarrow E = E_0 - E_\phi$ (1)

$p = p_\phi$ (2)

Από την σχέση ενέργειας –ορμής για το φωτόνιο και το σωματίδιο προκύπτει ότι:

$p_\phi = \frac{\mathrm{E}_\phi}{c}$ (3)

$E^2 = p^2c^2 + E_0'^2$ (4)

Αντικαθιστώντας τις (1) , (2) , (3) στην (4) συμπεραίνουμε ότι:

$$(E_0 - E_\phi)^2 = E_\phi^2 + E'^{\,2}_{0} \Rightarrow E_0^2 - 2E_0E_\phi = E'^{\,2}_{0}$$

$$\mathrm{E}_\phi = \frac{(\mathrm{E}_0 - \mathrm{E}'_0)(\mathrm{E}_0 + \mathrm{E}'_0)}{2\mathrm{E}_0} = \frac{\Delta\mathrm{E}_0(2\mathrm{E}_0 - \Delta\mathrm{E}_0)}{2\mathrm{E}_0} \Rightarrow \mathrm{E}_\phi = \Delta\mathrm{E}_0(1 - \frac{\Delta\mathrm{E}_0}{2\mathrm{E}_0})$$

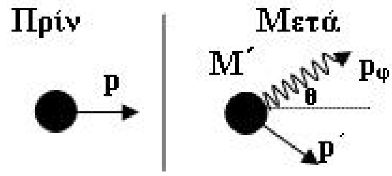
Εφαρμογή 8.8 ***Εκπομπή φωτονίου από κινούμενο σωματίδιο***

Ένα σωματίδιο με ενέργεια ηρεμίας E_0 και ταχύτητα υ (στο σύστημα εργαστηρίου) εκπέμπει ένα φωτόνιο, του οποίου η διεύθυνση κίνησης σχηματίζει γωνία θ με την αρχική διεύθυνση κίνησης του σωματιδίου.

Α) Να βρεθεί η ενέργεια του εκπεμπόμενου φωτονίου συναρτήσει της ταχύτητας υ, της γωνίας θ, της αρχικής ενέργειας ηρεμίας και της ελάττωσης της ενέργειας ηρεμίας του σωματιδίου.

Β) Να συγκριθεί η ενέργεια αυτή με την ενέργεια που θα είχε το φωτόνιο αν το σωματίδιο ήταν αρχικά ακίνητο.

Λύση



Α) Έστω E_0 και E_0' η αρχική και τελική ενέργεια ηρεμίας του σωματιδίου, $\Delta E_0 = E_0 - E_0'$ η ελάττωση στην ενέργεια ηρεμίας του σωματιδίου, Ε και Ε΄ η ενέργεια του σωματιδίου πριν και μετά την εκπομπή και E_ϕ η ενέργεια του εκπεμπόμενου φωτονίου.
Έστω δε $\vec{p}$, $\vec{p}'$ η αρχική και η τελική ορμή του σωματιδίου και $\vec{p}_\phi$ η ορμή του εκπεμπόμενου φωτονίου (στο σύστημα εργαστηρίου).

Οι τετραορμές του συστήματος σωματίδιο - φωτόνιο στο σύστημα εργαστηρίου πριν και μετά την εκπομπή είναι:

$P_{\pi\rho\iota\nu} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E}}{c} \\ \vec{p} \end{bmatrix}$ και $P_{\mu\epsilon\tau\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E}_\phi}{c} \\ \vec{p}_\phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E'}{c} \\ \vec{p}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E}_\phi + \mathrm{E}'}{c} \\ \vec{p}_\phi + \vec{p}' \end{bmatrix}$

Από την διατήρηση της τετραορμής προκύπτει ότι:

$E = E_\phi + \mathrm{E}' \Rightarrow \mathrm{E}' = E - E_\phi$ (1)

$\vec{p} = \vec{p}_\phi + \vec{p}' \Rightarrow \vec{p}' = \vec{p} - \vec{p}_\phi \Rightarrow p'^2 = p^2 + p_\phi^2 - 2pp_\phi \cos\theta$ (2)

Από την σχέση ενέργειας –ορμής για το φωτόνιο και το σωματίδιο προκύπτει ότι:

$E^2 = E_0^2 + p^2c^2$ (3)

$E'^2 = E_0'^2 + p'^2c^2$ (4)

$p_\phi = \frac{\mathrm{E}_\phi}{c}$ (5)

Αντικαθιστώντας στην (2) την p_ϕ από την (5) και τα τετράγωνα των ορμών από τις (3) και (4) προκύπτει ότι:

$E'^2 - E_0'^2 = E^2 - E_0^2 + E_\phi^2 - 2pcE_\phi \cos\theta$ (6)

Αντικαθιστώντας την Ε΄ από την (1) στην (6) προκύπτει ότι:

$2\mathrm{E}_\phi(\mathrm{E} - pc \ \cos\theta) = \mathrm{E}_0^2 - \mathrm{E}_0'^2$ (7)

Όμως $\mathrm{E} = \mathrm{M}\gamma c^2 = \gamma E_0$ και $pc = M\gamma vc = M\gamma\beta c^2 = \gamma\beta E_0$

Αντικαθιστώντας στην (7) προκύπτει ότι:

$2\mathrm{E}_\phi\gamma\mathrm{E}_0(1-\beta \ \cos\theta) = \mathrm{E}_0^2 - \mathrm{E}_0'^2 \Rightarrow 2\mathrm{E}_\phi\gamma\mathrm{E}_0(1-\beta \ \cos\theta) = (\mathrm{E}_0 - \mathrm{E}_0')(\mathrm{E}_0 + \mathrm{E}_0') \Rightarrow$

$2\mathrm{E}_\phi\gamma\mathrm{E}_0(1-\beta \ \cos\theta) = \Delta\mathrm{E}_0(2\mathrm{E}_0 - \Delta\mathrm{E}_0) \Rightarrow \mathrm{E}_\phi = \frac{\Delta\mathrm{E}_0(2\mathrm{E}_0 - \Delta\mathrm{E}_0)(1-\beta^2)^{1/2}}{2\mathrm{E}_0(1-\beta \ \cos\theta)}$ (8)

Β) Αν το σωματίδιο ήταν αρχικά ακίνητο τότε β=0. Επομένως, η ενέργεια του εκπεμπόμενου φωτονίου θα ήταν

$\mathrm{E}_{\phi 0} = \frac{\Delta\mathrm{E}_0(2\mathrm{E}_0 - \Delta\mathrm{E}_0)}{2\mathrm{E}_0}$ (9)

Διαιρώντας τις (8) και (9) κατά μέλη προκύπτει ότι: $\mathrm{E}_\phi = \mathrm{E}_{\phi 0}\frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{(1-\beta \ \cos\theta)}$

Εφαρμογή 8.9 ***Ενέργεια κατωφλίου***

Θεωρούμε την πυρηνική αντίδραση: ${}^2_1H + \gamma \to {}^0_1p + {}^1_0n$ *στην οποία ο πυρήνας του δευτερίου είναι αρχικά ακίνητος (στο σύστημα εργαστηρίου).*
i) Να βρεθεί η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να έχει το φωτόνιο ώστε να προκαλέσει την διάσπαση του πυρήνα.
ii) Να δείξετε ότι στην περίπτωση της ελάχιστης ενέργειας του φωτονίου το πρωτόνιο και το νετρόνιο έχουν ορμές συγγραμμικές και ομόρροπες με την ορμή του φωτονίου, οι οποίες είναι ανάλογες με την μάζα ηρεμίας τους .

Δίνονται οι ενέργειες ηρεμίας του πυρήνα του δευτερίου $E_{10} = 1875,12MeV$,του πρωτονίου $E_{20} = 938,72MeV$ και του νετρονίου $E_{30} = 939MeV$.

Λύση

Δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κίνηση του φωτονίου γίνεται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα x. Στο σύστημα εργαστηρίου η ενέργεια του συστήματος φωτόνιο – δευτέριο είναι $E = E_\phi + E_{10}$ και η αρχική ορμή είναι ίση με την ορμή του φωτονίου.

Θα επιλύσουμε το πρόβλημα στο σύστημα κέντρου ορμής (ΣΚΟ) και στην συνέχεια θα μεταφέρουμε την λύση στο σύστημα εργαστηρίου. Η ταχύτητα του συστήματος κέντρου ορμής είναι ως γνωστόν

$$\beta = \frac{cp}{E} = \frac{E_\phi}{\mathrm{E}_\phi + \mathrm{E}_{10}}$$

Από την ταχύτητα του ΣΚΜ μπορούμε να υπολογίσουμε το αντίστοιχο γ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{E}_\phi^2}{\mathrm{E}^2}}} = \frac{\mathrm{E}}{\sqrt{\mathrm{E}_{10}^2 + 2\mathrm{E}_\phi \mathrm{E}_{10}}}$$

Η αρχική τετραορμή του συστήματος δευτέριο – φωτόνιο στο ΣΚΟ είναι:

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E}'}{c} \\ p' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E}}{c} \\ \frac{\mathrm{E}_\phi}{c} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathrm{E}' = \gamma(\mathrm{E} - \frac{\mathrm{E}_\phi}{\mathrm{E}}\mathrm{E}_\phi) = \gamma \mathrm{E}(1 - \frac{\mathrm{E}_\phi^2}{\mathrm{E}^2}) = \gamma \mathrm{E}\frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{E}' = \frac{\mathrm{E}}{\gamma} \Rightarrow \mathrm{E}' = \sqrt{\mathrm{E}_{10}^2 + 2\mathrm{E}_\phi \mathrm{E}_{10}} \qquad (1)$$

Όπως είναι αναμενόμενο ισχύει ότι p΄=0.
Παρατηρούμε ότι η ελάχιστη τιμή της E_φ αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή της E΄.
Μετά την διάσπαση οι τετραορμές του πρωτονίου και του νετρονίου στο ΣΚΟ είναι:

$$P_2' = \begin{bmatrix} \frac{E'_2}{c} \\ \vec{p'}_2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P_3' = \begin{bmatrix} \frac{E'_3}{c} \\ \vec{p'}_3 \end{bmatrix}$$

Από την διατήρηση της τετραορμής στο ΣΚΟ συμπεραίνουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} \frac{E'}{c} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E'_2}{c} \\ \vec{p'}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E'_3}{c} \\ \vec{p'}_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} E' = E'_2 + E'_3 \\ \vec{p'}_3 = -\vec{p'}_2 \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση ενέργειας ορμής, η αρχή διατήρησης της ενέργειας γίνεται:

$$E' = \sqrt{E_{20}^2 + p_2'^2} + \sqrt{E_{30}^2 + p_3'^2} = \sqrt{E_{20}^2 + p_2'^2} + \sqrt{E_{30}^2 + p_2'^2}$$

Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι η ελάχιστη τιμή της E΄ αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή της p_2'. Επομένως,

$$p_3' = p_2' = 0 \Rightarrow E' = E_{20} + E_{30}$$

Επιλύοντας την (1) ως προς E_ϕ βρίσκουμε ότι:

$$E_\phi = \frac{(\mathrm{E}_{20} + \mathrm{E}_{30} - \mathrm{E}_{10})(\mathrm{E}_{20} + \mathrm{E}_{30} + \mathrm{E}_{10})}{2\mathrm{E}_{10}}$$

Η τετραορμή του πρωτονίου στο σύστημα εργαστηρίου είναι

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E}_2}{c} \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E'}_2}{c} \\ p'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E}_{20}}{c} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p_2 = \frac{\gamma\beta\mathrm{E}_{20}}{c}$$

Ομοίως για το νετρόνιο ισχύει ότι:

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E}_3}{c} \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E'}_3}{c} \\ p'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E}_{30}}{c} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p_3 = \frac{\gamma\beta\mathrm{E}_{30}}{c}$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις συμπεραίνουμε ότι οι ορμές του πρωτονίου και του νετρονίου είναι ομόρροπες. Διαιρώντας τις δύο σχέσεις κατά μέλη προκύπτει ότι :

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{E_{20}}{E_{30}}$$

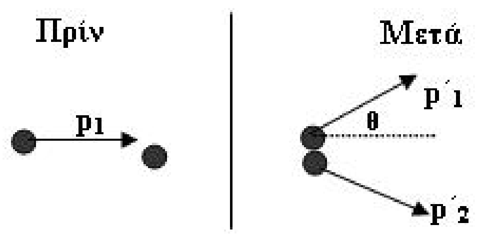
Εφαρμογή 8.10 ***Ελαστική σκέδαση***

Σωμάτιο ενέργειας E_1 και μάζας m_1 σκεδάζεται ελαστικά σε ακίνητο σωμάτιο μάζας m_2 με $m_2 < m_1$.

α) Να υπολογισθεί το συνημίτονο της γωνίας σκέδασης θ, του σωματίου 1 ως προς την αρχική του διεύθυνση συναρτήσει της ενέργειας του μετά από τη σκέδαση.

β) Να αποδειχθεί ότι ισχύει η σχέση $\sin\theta_{\text{max}} = \frac{m_2}{m_1}$ (όπως και σε μη σχετικιστικές ελαστικές σκεδάσεις).

<u>Λύση</u>



α) Θα μελετήσουμε πρώτα την σκέδαση μη σχετικιστικά.
Από την αρχή διατήρησης της ορμής προκύπτει ότι:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \Rightarrow \vec{p}_1 - \vec{p}'_1 = \vec{p}'_2 \Rightarrow p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1p_1' \cos\theta = p_2'^2$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική η κινητική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή:

$$K_1 = K_1' + K_2' \Rightarrow \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}$$

Λύνοντας την δεύτερη ως προς p'_2 και αντικαθιστώντας στην πρώτη μπορούμε να υπολογίσουμε το cosθ.

$$\cos\theta = \frac{(m_1 - m_2)p_1^2 + (m_1 + m_2)p_1'^2}{2m_1p_1p'_1}$$

Η παραπάνω παράσταση μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση της p'_1. Επομένως λαμβάνει ακρότατη τιμή όταν η παράγωγος ως προς p'_1 γίνει μηδέν. Επομένως όταν

$$\frac{d\cos\theta}{dp'_1} = \frac{(m_1 + m_2)p_1^{2'} - (m_1 - m_2)p_1^2}{2m_1p_1p_1'^2} = 0 \Rightarrow p_1' = p_1\sqrt{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}$$

Αντικαθιστώντας το p'_1 στο cosθ προκύπτει ότι:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{m_1^2 - m_2^2}}{m_1} \Rightarrow \sin\theta = \frac{m_2}{m_1}$$

Αν θέσουμε p_0 την τιμή που μηδενίζει την $\frac{d\cos\theta}{dp'_1}$ μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι:
όταν $p_1' > p_0 \Rightarrow \frac{d\cos\theta}{dp'_1} > 0$ και όταν $p_1' < p_0 \Rightarrow \frac{d\cos\theta}{dp'_1} < 0$.
Επομένως, όταν $p_1' = p_0$ η τιμή του cosθ γίνεται ελάχιστη. Συνεπώς, η τιμή της γωνίας θ γίνεται μέγιστη. Άρα $\sin\theta_{\max} = \frac{m_2}{m_1}$.

β) Θα μελετήσουμε τώρα το ίδιο φαινόμενο σχετικιστικά.
Έστω E_{10} και E_{20} οι ενέργειες ηρεμίας των δύο σωματιδίων. Η τετραορμή του συστήματος πριν και μετά την κρούση είναι (θεωρούμε ότι c=1):

$$P_{\pi\rho\iota\nu} = P_1 + P_2 = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vec{p}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{20} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 + E_{20} \\ \vec{p}_1 \end{bmatrix}$$

$$P_{\mu\varepsilon\tau\alpha} = P_1' + P_2' = \begin{bmatrix} E'_1 \\ \vec{p}'_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E'_2 \\ \vec{p}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E'_1 + E'_2 \\ \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \end{bmatrix}$$

Επειδή η τετραορμή παραμένει σταθερή προκύπτει ότι:
$$\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \Rightarrow \vec{p}_1 - \vec{p}'_1 = \vec{p}'_2 \Rightarrow p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1p_1' \cos\theta = p_2'^2 \qquad (1)$$

$\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_{20} = \mathrm{E}'_1 + \mathrm{E}'_2 \Rightarrow \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_{20} - \mathrm{E}'_1 = \mathrm{E}'_2$ (2)

Από την σχέση ενέργειας ορμής για κάθε σωμάτιο:

$p_1^2 = E_1^2 - E_{10}^2$ (3)

$p_1'^2 = E_1'^2 - E_{10}^2$ (4)

$p_2'^2 = E_2'^2 - E_{20}^2$ (5)

Από την (1) προκύπτει ότι:

$$\cos\theta = \frac{p_1^2 + p_1'^2 - p_2'^2}{2p_1 p'_1} \tag{6}$$

Αντικαθιστώντας τις ορμές από τις (3) , (4), (5) και την E'_2 από την (2) καταλήγουμε στην σχέση:

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{E}'_1(\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_{20}) - (\mathrm{E}_1\mathrm{E}_{20} + \mathrm{E}_{10}^2)}{\sqrt{\mathrm{E}_1^2 - \mathrm{E}_{10}^2}\sqrt{\mathrm{E}_1'^2 - \mathrm{E}_{10}^2}}$$

Η γωνία θ παίρνει ακρότατη τιμή όταν $\frac{d\cos\theta}{d\mathrm{E}'_1} = 0$

Παραγωγίζοντας την (6) ως προς E'_1 προκύπτει ότι:

$$\frac{d\cos\theta}{d\mathrm{E}'_1} = \frac{\mathrm{E}'_1(\mathrm{E}_1\mathrm{E}_{20} + \mathrm{E}_{10}^2) - \mathrm{E}_{10}^2(\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_{20})}{\Pi > 0}$$

Θέτουμε $\varepsilon = \frac{\mathrm{E}_{10}^2(\mathrm{E}_1+\mathrm{E}_{20})}{\mathrm{E}_1\mathrm{E}_{20}+\mathrm{E}_{10}^2}$ την τιμή της E'_1 που μηδενίζει την παράγωγο και παρατηρούμε ότι για $\mathrm{E}'_1 > \varepsilon \Rightarrow \frac{d\cos\theta}{d\mathrm{E}'_1} > 0$ και για $\mathrm{E}'_1 < \varepsilon \Rightarrow \frac{d\cos\theta}{d\mathrm{E}'_1} < 0$. Επομένως για $\mathrm{E}'_1 = \varepsilon$ η τιμή του cosθ γίνεται ελάχιστη. Συνεπώς η τιμή της γωνίας θ γίνεται μέγιστη.

Αντικαθιστώντας $\mathrm{E}'_1 = \varepsilon$ υπολογίζουμε το $\cos\theta_{\max}$.

$$\cos\theta_{\max} = \frac{\varepsilon(\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_{20}) - (\mathrm{E}_1\mathrm{E}_{20} + \mathrm{E}_{10}^2)}{\sqrt{\mathrm{E}_1^2 - \mathrm{E}_{10}^2}\sqrt{\varepsilon^2 - \mathrm{E}_{10}^2}} \tag{7}$$

Ο αριθμητής της (7) γίνεται:

$$\varepsilon(\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_{20}) - (\mathrm{E}_1\mathrm{E}_{20} + \mathrm{E}_{10}^2) = \frac{(\mathrm{E}_{10}^2 - \mathrm{E}_{20}^2)(\mathrm{E}_1^2 - \mathrm{E}_{10}^2)}{\mathrm{E}_1\mathrm{E}_{20} + \mathrm{E}_{10}^2}$$

Ομοίως η ποσότητα $\varepsilon^2 - \mathrm{E}_{10}^2$ γίνεται:

$$\varepsilon^2 - \mathrm{E}_{10}^2 = \frac{\mathrm{E}_{10}^2(\mathrm{E}_{10}^2 - \mathrm{E}_{20}^2)(\mathrm{E}_1^2 - \mathrm{E}_{10}^2)}{(\mathrm{E}_1\mathrm{E}_{20} + \mathrm{E}_{10}^2)^2}$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην (7) καταλήγουμε στην σχέση:

$$\cos\theta_{\max} = \frac{\sqrt{E_{10}^2 - E_{20}^2}}{E_{10}} \Rightarrow \sin\theta_{\max} = \frac{E_{20}}{E_{10}} = \frac{m_2}{m_1},$$

ακριβώς την ίδια με την μη σχετικιστική περίπτωση.

Εφαρμογή 8.11 ***Μηδενίζοντας το μαγνητικό πεδίο***

Στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ ο τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου δίνεται από τον πίνακα (σε συναλλοίωτη ή ανταλλοίωτη μορφή)

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & -cB \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cB & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \acute{\eta} \quad F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ -E & 0 & 0 & -cB \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cB & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(α)Υπολογίστε τα αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

(β)Υπολογίστε τη σχέση μεταξύ των ποσοτήτων E, B ώστε να υπάρχει σύστημα αναφοράς Σ' στο οποίο το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο θα έχει μόνο ηλεκτρικό πεδίο.

(γ) Υπολογίστε ταχύτητα με την οποία θα πρέπει να κινείται το Σ' του ερωτήματος (β) ως προς το Σ, καθώς και το ηλεκτρικό πεδίο στο Σ'. Δίδονται οι τύποι μετασχηματισμού των πεδίων.

$\vec{E}'_{//} = \vec{E}_{//}$ $\qquad$ $\vec{B}'_{//} = \vec{B}_{//}$

$\mathrm{\vec{E}}'_{\perp} = \gamma(\mathrm{\vec{E}}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B})$ $\quad$ $\vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E})$

<u>Λύση</u>

(α) Από την μορφή του ηλεκτρομαγνητικού τανυστή συμπεραίνουμε ότι: $\vec{E} = (E, 0, 0)$ και $\vec{B} = (0, B, 0)$.

Τα αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι

$s_1 = \vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ και $s_2 = \vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2 = E^2 - c^2B^2$

(β) Επειδή το s_2 είναι αναλλοίωτο ισχύει ότι :

$s_2 = s_2' \Rightarrow E^2 - c^2B^2 = \vec{E}'^2 > 0 \Rightarrow |E| > c|B|$

Η συνθήκη |E|>c|B| είναι αναγκαία συνθήκη ώστε να υπάρχει σύστημα συντεταγμένων στο οποίο το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο να έχει μόνο ηλεκτρικό πεδίο.

Θα αποδείξουμε ότι είναι και ικανή.

Αναζητούμε ταχύτητα $\vec{v}$ τέτοια ώστε $\vec{B}' = 0$.

Ισχύει ότι $\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel} = 0$. Επομένως $\vec{v} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{v} = v_x\hat{x} + v_z\hat{z}$, και ότι $\vec{B} = \vec{B}_{\perp}$.

Πρέπει

$$\vec{B}'_{\perp} = 0 \Leftrightarrow \vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E} \Leftrightarrow$$
$$B\hat{y} - \frac{E}{c^2}(v_x\hat{x} + v_z\hat{z}) \times \hat{x} = 0 \Leftrightarrow B\hat{y} - \frac{E}{c^2}v_z\hat{y} = 0 \Leftrightarrow v_z = \frac{Bc^2}{E} < c$$

Η v_x μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή τέτοια ώστε

$v_x^2 + v_z^2 < c^2 \Leftrightarrow v_x^2 + (\frac{Bc^2}{E})^2 < c^2$

Για την παράλληλη και την κάθετη στην ταχύτητα συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου ισχύει ότι

$\vec{E}_{\parallel} = \frac{\vec{E}\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v}$ $\qquad$ $\vec{E}_{\perp} = \vec{E} - \vec{E}_{\parallel} = \vec{E} - \frac{\vec{E}\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v}$

$$\vec{E}' = \vec{E}'_{\parallel} + \vec{\mathrm{E}}'_{\perp} = \vec{E}_{\parallel} + \gamma(\vec{\mathrm{E}}_{\perp} + \vec{v}\ \times\ \vec{B}) \Rightarrow$$
$$\vec{E}' = \frac{\vec{E}\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v} + \gamma\left(\vec{E} - \frac{\vec{E}\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v}\right) + \gamma\vec{v}\ \times\ \vec{B}$$

Επειδή ζητάμε κάποιο σύστημα αναφοράς στο οποίο να μηδενίζεται το μαγνητικό πεδίο μπορούμε να επιλέξουμε $v_x = 0$. Επομένως $\vec{E}_{\parallel} = 0$. Συνεπώς

$$\vec{\mathrm{E}}' = \gamma(\vec{\mathrm{E}} + \vec{v}\ \times\ \vec{B}) = \gamma E\hat{x} + \gamma\frac{B^2c^2}{E}\hat{z}\times\hat{y} = \gamma(E - \frac{B^2c^2}{E})\hat{x} = \sqrt{E^2 - B^2c^2}\hat{x}.$$

Το ίδιο θα ίσχυε ακόμη και αν επιλέξουμε σύστημα με $v_x \neq 0$.

Κεφάλαιο 9

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

9.1 Μετασχηματισμός Lorentz

Άσκηση 9.1.1 *Ένα σωμάτιο με χρόνο ζωής* $10\times10^{-6}sec$ *κινείται με σταθερή ταχύτητα* v *και διασπάται σε απόσταση 20km από το σημείο δημιουργίας του. Να βρεθεί η ταχύτητα* v.

Λύση

Στο σύστημα ηρεμίας Σ΄ του σωματιδίου για τα γεγονότα δημιουργίας και διάσπασης του σωματιδίου ισχύει ότι: $\Delta t' = 10\times10^{-6}sec$ και $\Delta x' = 0$. Στο σύστημα εργαστηρίου $\Delta x = 2\times10^4 m$. Από τον μετασχηματισμό Lorentz προκύπτει ότι:

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \Rightarrow \Delta x = \gamma v \Delta t' \Rightarrow \gamma v = \frac{\Delta x}{\Delta t'} \Rightarrow$$

$$v = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t'}c}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t'}\right)^2 + c^2}} = 0.98889\text{c}$$

Άσκηση 9.1.2 *Στο σύστημα Σ δύο ταυτόχρονα γεγονότα απέχουν 4km κατά μήκος του άξονα x . Ποιά χρονική διαφορά μετρά παρατηρητής που κινείται με ταχύτητα* v *κατά την θετική φορά του άξονα x΄x, όταν η απόσταση γι' αυτόν είναι 5km;*

Λύση

Για τα γεγονότα αυτά στο σύστημα Σ ισχύει ότι: $\Delta x = 4m$ και $\Delta t = 0$. Στο σύστημα ηρεμίας του παρατηρητή ισχύει ότι $\Delta x' = 5Km$. Από τον μετασχηματισμό Lorentz προκύπτει ότι:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \Rightarrow \Delta x' = \gamma\Delta x \Rightarrow \gamma = \frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{5}{4} \Rightarrow v = 0.6\,c$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}) \Rightarrow \Delta t' = -\gamma\frac{v\Delta x}{c^2} = -10^{-5}\ \text{sec}$$

, δηλ. αυτό που βρίσκεται σε $x_B > x_A$, συμβαίνει νωρίτερα.

Άσκηση 9.1.3 *Στο σημείο Α ενός συστήματος αναφοράς Σ συμβαίνουν δύο γεγονότα με διαφορά χρόνου 3 sec. Αν ως προς κινούμενο σύστημα Σ' διαφέρουν κατά 5 sec, πόσο διαφέρουν χωρικά;*

Λύση

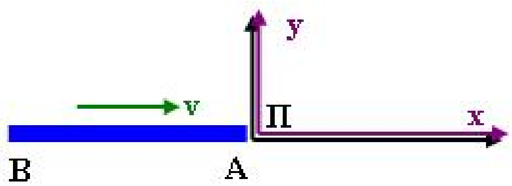
Επειδή τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στο ίδιο σημείο Α του Σ είναι Δx=0 και Δt=3sec. Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει ότι Δt΄=5 sec. Από τον μετασχηματισμό Lorentz έχουμε:

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x) \Rightarrow \Delta t' = \gamma\Delta t \Rightarrow \gamma = \frac{5}{3} \Rightarrow v = 0.8\,c$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \Rightarrow \Delta x' = -\gamma v\Delta t = -1.2\ \times 10^9\,m$$

Άσκηση 9.1.4 *Ένα διαστημόπλοιο έχει μήκος L=800 m στο σύστημα ηρεμίας του. Ένας παρατηρητής Π στη Γη μετράει ότι όταν το διαστημόπλοιο κινείται, χρειάζεται 2 μs για να περάσει από μπροστά του. Ποια η ταχύτητα του διαστημόπλοιου ως προς τη Γη;*

Λύση



Θεωρούμε ότι η αρχή του συστήματος ηρεμίας του παρατηρητή ταυτίζεται με τον παρατηρητή και η αρχή του συστήματος ηρεμίας του διαστημοπλοίου ταυτίζεται με την άκρη Α αυτού. Θεωρούμε επίσης ότι τα ρολόγια και των δύο συστημάτων αναφοράς είναι συγχρονισμένα να δείχνουν μηδέν την στιγμή που η άκρη Α φτάνει στον παρατηρητή (χωρίς βλάβη της γενικότητας). Θεωρούμε τα εξής δύο γεγονότα:

Γεγονός 1: Η άκρη Α φτάνει στον παρατηρητή. Οι χωροχρονικές συντεταγμένες του γεγονότος αυτού είναι: $x_1 = 0$, $t_1 = 0$, $x'_1 = 0$, $t'_1 = 0$.

Γεγονός 2: Η άκρη Β φτάνει στον παρατηρητή. Για το γεγονός αυτό ισχύει ότι $x_2 = 0$, $x'_2 = -L$

Από τον μετασχηματισμό Lorentz προκύπτει ότι:

$x_2 = \gamma(x'_2 + vt'_2) \Rightarrow 0 = \gamma(-L + vt'_2) \Rightarrow t'_2 = \frac{L}{v}$
$t_2 = \gamma(t'_2 + \frac{vx'_2}{c^2}) = \gamma(\frac{L}{v} - \frac{vL}{c^2}) = \frac{\gamma L}{v}(1 - \frac{v^2}{c^2}) = \frac{L}{\gamma v}$ (1)
Από τα δεδομένα του προβλήματος είναι $t_2 = 2 \times 10^{-6} sec.$
Αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει ότι $\gamma v = \frac{4}{3}c \Rightarrow v = 0.8\, c$

Άσκηση 9.1.5 *Ένας κύκλος ακίνητος πάνω στο επίπεδο xy ενός συστήματος αναφοράς Σ έχει εμβαδόν* $12cm^2$. *Για ένα σύστημα αναφοράς Σ΄κινούμενο ως προς τον άξονα x ο κύκλος έχει εμβαδό* $7.2cm^2$.
α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος στο σύστημα Σ΄ φαίνεται σαν έλλειψη.
β) Να υπολογίσετε τη σχετική ταχύτητα των συστημάτων.
Δίνεται το εμβαδόν της έλλειψης Ε=πab όπου a και b τα μήκη των ημιαξόνων της.

Λύση

α) Δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο κύκλος έχει ως κέντρο την αρχή των αξόνων του Σ.

Για να μπορέσει ο παρατηρητής που βρίσκεται στο Σ΄ να βρεί το σχήμα της γραμμής που αντιστοιχεί στον κύκλο θα πρέπει να κάνει ταυτόχρονη (στο σύστημά του) μέτρηση των συντεταγμένων των σημείων της γραμμής και στη συνέχεια να βρει την εξίσωση που ικανοποιούν αυτές.

Έστω ότι ο παρατηρητής αυτός μετρά τις συντεταγμένες όλων των σημείων της γραμμής την στιγμή t'_0 . Την στιγμή αυτή ένα τυχαίο σημείο έχει συντεταγμένες (x΄,y΄) στο Σ΄, και συντεταγμένες (x,y) στο Σ. Επειδή το σχήμα που βλέπει ο Σ είναι κύκλος ισχύει ότι: $x^2 + y^2 = R^2$. (1)
Από τον μετασχηματισμό Lorentz προκύπτει ότι:
$x = \gamma(x' + vt'_0)$ (2)
$y = y'$ (3)
Αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στην (1) προκύπτει η :

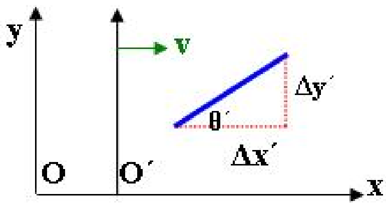
$$\gamma^2(x' + vt'_0)^2 + y'^2 = R^2 \Rightarrow \frac{(x' + vt'_0)^2}{(\frac{R}{\gamma})^2} + \frac{y'^2}{R^2} = 1$$

Επομένως η γραμμή που βλέπει ο Σ΄ είναι (κινούμενη) έλλειψη με ημιάξονες $a = R$ κατά μήκος του άξονα y και $b = \frac{R}{\gamma}$ κατά μήκος του άξονα x. Συνεπώς το εμβαδόν του σχήματος που βλέπει είναι

$$\mathrm{E}' = \pi R\frac{R}{\gamma} \Rightarrow \mathrm{E}' = \frac{\mathrm{E}}{\gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{\mathrm{E}}{E'} = \frac{5}{3} \Rightarrow v = 0.8\, c$$

Άσκηση 9.1.6 *Αδρανειακός παρατηρητής Ο΄ κινείται με ταχύτητα υ σχετικά με τον Ο. Μια ράβδος ακίνητη ως προς τον Ο΄ σχηματίζει γωνία θ΄ με την διεύθυνση της κίνησης. Δείξτε ότι για την γωνία θ που μετρά ο Ο ισχύει:* $\tan\theta = \gamma\, \tan\theta'$.

Λύση



Δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι άξονες των δύο συστημάτων αναφοράς είναι παράλληλοι, η κίνηση του O΄ σε σχέση με τον O γίνεται κατά την θετική διεύθυνση του άξονα x και η ράβδος βρίσκεται στο επίπεδο xOy.

Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό Lorentz για την συγκεκριμένη διάταξη ισχύει ότι:

$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t)$ (1)

$\Delta y' = \Delta y$ (2)

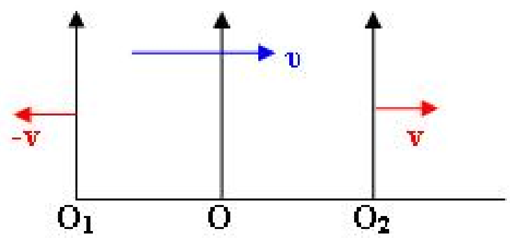
Για να μπορέσει να βρει ο O την γωνία θ θα πρέπει να κάνει ταυτόχρονη μέτρηση των συντεταγμένων των άκρων της (Δt=0). Η γωνία θ δίνεται από την σχέση $\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Αντικαθιστώντας στην (1) Δt=0 προκύπτει ότι $\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}$ Επομένως για την γωνία θ ισχύει ότι:

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \gamma\frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \gamma\tan\theta'$$

Άσκηση 9.1.7 *Θεωρούμε δύο αδρανειακούς παρατηρητές O_1 και O_2· ο πρώτος ακίνητος στο σύστημα εργαστηρίου και ο δεύτερος κινούμενος με ταχύτητα υ. Να βρεθεί η ταχύτητα v που πρέπει να έχει (στο σύστημα εργαστηρίου) ένας τρίτος παρατηρητής O για να βλέπει και τους δύο παρατηρητές να απομακρύνονται από αυτόν με αντίθετες ταχύτητες.*

Λύση



Η ταχύτητα του O ως προς O_1 είναι v. Η ταχύτητα του O_1 ως προς O είναι -v. Η ταχύτητα του O_2 ως προς O είναι v. Η ταχύτητα του O_2 ως προς O_1 είναι υ. Από το νόμο μετασχηματισμού της ταχύτητας συμπεραίνουμε ότι:

$$v_{\mathrm{O_2O_1}} = \frac{v_{\mathrm{O_2O}} + v_{\mathrm{OO_1}}}{1 + \frac{v_{\mathrm{O_2O}} v_{\mathrm{OO_1}}}{c^2}} \Rightarrow \upsilon = \frac{\mathrm{v}+\mathrm{v}}{1+\frac{\mathrm{vv}}{c^2}} \Rightarrow \upsilon = \frac{2\mathrm{v}}{1+\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}.$$

Την τελευταία σχέση επιλύουμε ως προς v.

Άσκηση 9.1.8 *Δύο ίδια οχήματα κινούνται με αντίθετες ταχύτητες μέτρου v ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς Σ. Πόσο μικρότερο μήκος από το φυσικό του μήκος θα έχει το κάθε όχημα όπως αυτό μετράται ως προς το άλλο;*

Λύση

Η σχετική ταχύτητα του ενός ως προς τον άλλο είναι $v_{\sigma\chi} = \frac{v+v}{1+vv} = \frac{2v}{1+v^2}$ Επομένως

$$1 - v_{\sigma\chi}^2 = 1 - \frac{4v^2}{(1+v^2)^2} = \left(\frac{1-v^2}{1+v^2}\right)^2 \Rightarrow \gamma_{\sigma\chi} = \frac{1+v^2}{1-v^2}$$

Το μετρούμενο μήκος έχει υποστεί συστολή Lorentz σε σχέση με το ιδιομήκος. Έτσι

$$L_{\sigma\chi} = \frac{L}{\gamma_{\sigma\chi}} = L\frac{1-v^2}{1+v^2} \Rightarrow L - L_{\sigma\chi} = L\frac{2v^2}{1+v^2}$$

Άσκηση 9.1.9 *Δύο όμοιες ράβδοι (η 2 και η 3 αντίστοιχα) ίδιου φυσικού μήκους ολισθαίνουν κατά μήκος του άξονα x ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς Σ1 με ταχύτητες $\vec{v}_{21}$, $\vec{v}_{31}$ αντίστοιχα ($\vec{v}_{21} \neq \vec{v}_{31}$). Στο Σ1 τα μήκη των δύο ράβδων μετρούνται $L_{21} = L_{31} = a$ αντίστοιχα.*
(α) Τι συμπέρασμα μπορείτε να εξάγετε για τις δύο ταχύτητες $\vec{v}_{21}$, $\vec{v}_{31}$;
(β) Έστω $L_{23} = b$ το μήκος της ράβδου 2 όταν μετράται στο σύστημα ηρεμίας της ράβδου 3. Με δεδομένα τα a, b υπολογίστε τις ταχύτητες $\vec{v}_{21}$, $\vec{v}_{31}$ των ράβδων στο Σ καθώς και την ταχύτητα $\vec{v}_{23}$ της ράβδου 2 στο σύστημα ηρεμίας της ράβδου 3.

Λύση

Έστω L_0 το μήκος κάθε ράβδου στο σύστημα ηρεμίας της. Λόγω κίνησης ως προς το Σ_1, κάθε ράβδος υφίσταται συστολή Lorentz. Επομένως,

$$a = \frac{L_0}{\gamma_{21}} = L_0\sqrt{1 - v_{21}^2} \text{ και } a = \frac{L_0}{\gamma_{31}} = L_0\sqrt{1 - v_{31}^2}$$

Επομένως $|\vec{v}_{21}| = |\vec{v}_{31}|$. Σύμφωνα με την υπόθεση $\vec{v}_{21} \neq \vec{v}_{31}$. Συνεπώς $\vec{v}_{21} = -\vec{v}_{31} = \vec{v}$. Επειδή οι ταχύτητες των δύο ράβδων στο Σ_1 είναι αντίθετες, η ταχύτητα της μιας ως προς την άλλη είναι $v_{23} = \frac{2v}{1+v^2}$ Συνεπώς

$$\lambda = \frac{b}{a} = \frac{L_0\sqrt{1 - v_{23}^2}}{L_0\sqrt{1 - v^2}} \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1 - \frac{4v^2}{(1+v^2)^2}}{1 - v^2} = \frac{1 - v^2}{(1+v^2)^2} < 1$$

Η εξίσωση αυτή είναι δευτεροβάθμια ως προς v^2,

$$\lambda^2(v^2)^2 + (2\lambda^2 + 1)v^2 + \lambda^2 - 1 = 0,$$

η οποία για κάθε < 1 έχει μόνο μια θετική ρίζα μικρότερη του 1.

$$v^2 = \frac{-(2\lambda^2+1)+\sqrt{8\lambda^2+1}}{2\lambda^2}$$

. Από την τιμή της $v = |\vec{v}_{21}| = |\vec{v}_{31}|$ μπορεί να υπολογιστεί και η $_{23}$.

Άσκηση 9.1.10 *Ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ$^{(0)}$, το σύστημα Σ$^{(1)}$ κινείται με ταχύτητα v κατά τον x - άξονα. Το σύστημα Σ$^{(2)}$ κινείται ως προς το Σ$^{(1)}$ με ταχύτητα v κατά τον x - άξονά του, κοκ. Έστω τέλος ότι το Σ$^{(n)}$ κινείται ως προς το Σ$^{(n-1)}$ με ταχύτητα v κατά τον x-άξονά του. Υπολογίστε την ταχύτητα V του Σ$^{(n)}$ ως προς το Σ$^{(0)}$.*
[Υπόδειξη: Δείξτε ότι δύο τυποποιημένοι μετασχηματισμοί προώθησης γραμμένοι με τη μορφή υπερβολικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων $(\tanh\phi = v/c, \cosh\phi = \gamma, \sinh\phi = \gamma v/c)$ *δρώντας διαδοχικά με αντίστοιχες «γωνίες» - ωκύτητας φ$_1$, φ$_2$ οδηγούν σε ένα μετασχηματισμό προώθησης με αντίστοιχη γωνία φ$_1$+φ$_2$].*

<u>1η Λύση</u>

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση sinh έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Επομένως υπάρχει $\phi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\sinh\varphi = \gamma\beta = \gamma\frac{v}{c}$ για κάθε $|v| < 1$.
Ισχύει ότι $\gamma^2 - (\gamma\beta)^2 = 1$. Επομένως γ=coshφ και β=tanhφ .
Ο πίνακας του μετασχηματισμού Lorentz γίνεται:

$$\Lambda(\varphi) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε δύο μετασχηματισμούς Lorentz με ταχύτητες v_1, v_2 και επομένως «γωνίες» - ωκύτητας ϕ_1 και ϕ_2. Για το γινόμενο των δύο μετασχηματισμών ισχύει ότι:

$$\Lambda(\varphi_1)\Lambda(\varphi_2) = \begin{bmatrix} \cosh\varphi_1 & -\sinh\varphi_1 \\ -\sinh\varphi_1 & \cosh\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh\varphi_2 & -\sinh\varphi_2 \\ -\sinh\varphi_2 & \cosh\varphi_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\Lambda(\varphi_1)\Lambda(\varphi_2) = \begin{bmatrix} \cosh(\varphi_1+\varphi_2) & -\sinh(\varphi_1+\varphi_2) \\ -\sinh(\varphi_1+\varphi_2) & \cosh(\varphi_1+\varphi_2) \end{bmatrix} = \Lambda(\varphi_1+\varphi_2)$$

Κατά τους υπολογισμούς λάβαμε υπόψη ότι

$$\cosh(\varphi_1+\varphi_2) = \cosh\varphi_1\cosh\varphi_2 + \sinh\varphi_1\sinh\varphi_2$$
$$\sinh(\varphi_1+\varphi_2) = \sinh\varphi_1\cosh\varphi_2 + \sinh\varphi_2\cosh\varphi_1$$

Ισχύει ότι

$$\Lambda(0) = \mathrm{I} \quad \text{και} \quad \Lambda(\varphi)\Lambda(-\varphi) = \Lambda(0) = \mathrm{I} \Rightarrow \Lambda^{-1}(\varphi) = \Lambda(-\varphi)$$

Έστω φ η «γωνία» - ωκύτητας που αντιστοιχεί στην ταχύτητα v του $\Sigma^{(j+1)}$ ως προς το $\Sigma^{(j)}$ και θ η «γωνία» - ωκύτητας που αντιστοιχεί στην ταχύτητα V του $\Sigma^{(n)}$ ως προς το $\Sigma^{(0)}$.
Έστω $X^{(0)}$, $X^{(1)}$,..$X^{(n)}$ οι πίνακες χωροχρονικών συντεταγμένων ενός τυχαίου γεγονότος ως προς τα $\Sigma^{(0)}$, $\Sigma^{(1)}$, .. $\Sigma^{(n)}$.
Ισχύει ότι:
$X^{(1)} = \Lambda(\varphi)X^{(0)}$
$X^{(2)} = \Lambda(\varphi)X^{(1)} = \Lambda(\varphi)\Lambda(\varphi)X^{(0)} = \Lambda(2\varphi)X^{(0)}$
Επαγωγικά καταλήγουμε στην σχέση
$X^{(n)} = \Lambda(n\varphi)X^{(0)}$
Επειδή η θ είναι η «γωνία» - ωκύτητας που αντιστοιχεί στην ταχύτητα V του $\Sigma^{(n)}$ ως προς το $\Sigma^{(0)}$, ισχύει ότι

$$X^{(n)} = \Lambda(\theta)X^{(0)} \Rightarrow \Lambda(n\varphi)X^{(0)} = \Lambda(\theta)X^{(0)}$$

Επειδή το $X^{(0)}$ είναι τυχαίο, συμπεραίνουμε ότι $\Lambda(n\varphi) = \Lambda(\theta) \Rightarrow \theta = n\varphi$.
Επειδή η φ είναι η «γωνία» - ωκύτητας που αντιστοιχεί στην ταχύτητα v, ισχύει ότι:

$$\beta = \frac{v}{c} = \tanh\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}} = \frac{e^{2\varphi} - 1}{e^{2\varphi} + 1} \Leftrightarrow e^{2\varphi} = \frac{1+\beta}{1-\beta}$$

Επειδή η θ είναι η «γωνία» - ωκύτητας που αντιστοιχεί στην ταχύτητα V, ισχύει ότι:

$$\frac{V}{c} = \tanh\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}} = \frac{e^{2\theta} - 1}{e^{2\theta} + 1} = \frac{e^{2n\varphi} - 1}{e^{2n\varphi} + 1} \Rightarrow \frac{V}{c} = \frac{(1+\beta)^n - (1-\beta)^n}{(1+\beta)^n + (1-\beta)^n}$$

<u>2η Λύση</u>

Έστω v_n η ταχύτητα του $\Sigma^{(n)}$ ως προς το $\Sigma^{(0)}$.
Επειδή η ταχύτητα του $\Sigma^{(n+1)}$ ως προς το $\Sigma^{(n)}$ είναι v ισχύει ότι
$v_{n+1} = \frac{v_n + v}{1 + \frac{v_n v}{c^2}} \Leftrightarrow \beta_{n+1} = \frac{\beta_n + \beta}{1 + \beta_n \beta}$ (1)
Η σχέση (1) είναι μια αναγωγική σχέση πρώτης τάξεως με $\beta_1 = \beta$.
Θέτουμε $\zeta_n = \frac{1+\beta_n}{1-\beta_n}$ (2)
Από την (1) προκύπτει ότι:

$$\zeta_{n+1} = \frac{1 + \beta_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} = \frac{1 + \beta_n\beta + \beta_n + \beta}{1 + \beta_n\beta - \beta_n - \beta} = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)\left(\frac{1+\beta_n}{1-\beta_n}\right) = \frac{1+\beta}{1-\beta}\zeta_n$$

Επομένως, η ζ_n αποτελεί γεωμετρική πρόοδο. Συνεπώς

$$\zeta_n = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{n-1}\zeta_1 = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^n$$

Επιλύοντας την (2) ως προς β_n προκύπτει ότι:

$$\beta_n = \frac{\zeta_n - 1}{\zeta_n + 1} = \frac{(1+\beta)^n - (1-\beta)^n}{(1+\beta)^n + (1-\beta)^n}$$

Άσκηση 9.1.11 *Προκειμένου να μετρήσουμε το μήκος, κατά μήκος της κίνησης ενός κινούμενου αντικειμένου, δύο παρατηρητές του ίδιου συστήματος αναφοράς Σ (όχι του Σ' στο οποίο το αντικείμενο είναι ακίνητο) εκτοξεύουν φωτεινές ακτίνες με το φωτοόπλο τους κατά μήκος της κίνησης του αντικειμένου. Ο παρατηρητής Α στέλνει τις φωτεινές ακτίνες ταυτόχρονα και μετρά τη χρονική διαφορά Δt_A των αφίξεων των δύο ακτίνων. Ο παρατηρητής Β στέλνει τις φωτεινές ακτίνες έτσι ώστε αυτές να φτάσουν ταυτόχρονα, για τον Σ, στα δύο άκρα του αντικειμένου και μετρά τη χρονική διαφορά Δt_B των αφίξεων των δύο ακτίνων. Να βρεθεί το μήκος του αντικειμένου και η ταχύτητα με την οποία κινείται αυτό.*

Λύση

Έστω L_0 το μήκος του αντικειμένου στο Σ΄. Στο Σ το μήκος του αντικειμένου είναι $L = L_0/\gamma$.

Παρατηρητής Α:

Η πρώτη ακτίνα εκτοξεύεται την στιγμή t_0 από την θέση $x_0 = 0$. Επομένως η εξίσωση «κίνησης» της 1ης ακτίνας είναι

$x_{\gamma 1} = c(t - t_0)$

Η εξίσωση κίνησης του πίσω μέρους του αντικειμένου (x΄=0) είναι

$x_\pi = vt$

Η 1η ακτίνα συναντά το πίσω μέρος του αντικειμένου την στιγμή t_1 που

$$x_{\gamma 1} = x_\pi \Rightarrow c(t_1 - t_0) = vt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{ct_0}{c - v}$$

στην θέση

$$x_1 = \frac{cvt_0}{c - v}$$

Η εξίσωση κίνησης της 1ης ανακλώμενης ακτίνας είναι

$x - x_1 = -c(t - t_1)$

Η 1η ανακλώμενη ακτίνα επιστρέφει στην θέση x=0 την στιγμή $\tilde{t}_1$ που

$$x = 0 \Rightarrow -x_1 = -c(\tilde{t}_1 - t_1) \Rightarrow \tilde{t}_1 = \frac{c + v}{c - v} t_1$$

Η δεύτερη ακτίνα εκτοξεύεται την στιγμή t_0 από την θέση $x_0 = 0$. Επομένως η εξίσωση «κίνησης» της 2ης ακτίνας είναι

$x_{\gamma 2} = c(t - t_0)$

Η εξίσωση κίνησης του εμπρόσθιου μέρους του αντικειμένου ($x' = L_0$) είναι

$x_\mu = L + vt$

Η 2η ακτίνα συναντά το εμπρόσθιο μέρος του αντικειμένου την στιγμή t_2 που

$$x_{\gamma 2} = x_\mu \Rightarrow c(t_2 - t_0) = vt_2 + L \Rightarrow t_2 = \frac{ct_0}{c - v} + \frac{L}{c - v}$$

στην θέση

$$x_2 = L + vt_2 = \frac{cvt_0}{c-v} + \frac{cL}{c-v}$$

Η εξίσωση κίνησης της 2ης ανακλώμενης ακτίνας είναι

$x - x_2 = -c(t - t_2)$

Η 2η ανακλώμενη ακτίνα επιστρέφει στην θέση x=0 την στιγμή $\tilde{t}_2$ που

$$x = 0 \Rightarrow -x_2 = -c(\tilde{t}_2 - t_2) \Rightarrow \tilde{t}_2 = \frac{c+v}{c-v}t_0 + \frac{2L}{c-v} = \tilde{t}_1 + \frac{2L}{c-v}$$

Επομένως,

$\Delta t_A = \tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = \frac{2L}{c-v} = \frac{2L_0}{\gamma(c-v)}$ (α)

Παρατηρητής Β:

Οι δύο ακτίνες φτάνουν ταυτόχρονα στα άκρα του αντικειμένου την στιγμή t_0 . Η πρώτη ανακλώμενη ακτίνα εκπέμπεται από την θέση $x_1 = x_0$ την στιγμή $t_1 = t_0$. Επομένως η εξίσωση κίνησης της 1ης ανακλώμενης ακτίνας είναι

$x - x_1 = -c(t - t_1)$

Η 1η ανακλώμενη ακτίνα επιστρέφει στην θέση x=0 την στιγμή $\tilde{t}_1$ που :

$$x = 0 \Rightarrow -x_1 = -c(\tilde{t}_1 - t_1) \Rightarrow \tilde{t}_1 = \frac{x_1}{c} + t_1 = \frac{x_0}{c} + t_0$$

Η 2η ανακλώμενη ακτίνα εκπέμπεται από την θέση $x_2 = x_0 + L$ την στιγμή $t_2 = t_0$. Επομένως η εξίσωση κίνησης της 2ης ανακλώμενης ακτίνας είναι

$x - x_2 = -c(t - t_2)$

Η 2η ανακλώμενη ακτίνα επιστρέφει στην θέση x=0 την στιγμή $\tilde{t}_2$ που :

$$x = 0 \Rightarrow \tilde{t}_2 = \frac{x_2}{c} + t_2 = \frac{x_0}{c} + \frac{L}{c} + t_0 = \tilde{t}_1 + \frac{L_0}{\gamma c}$$

Επομένως

$\Delta t_B = \tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = \frac{L_0}{\gamma c}$ (β)

Διαιρώντας τις (α) και (β) κατά μέλη προκύπτει ότι:

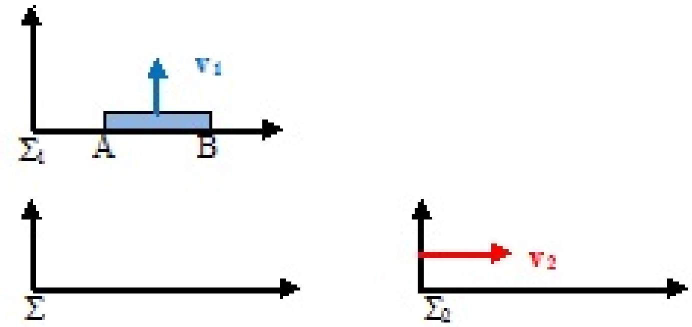
$$\frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} = 2\frac{c}{c-v} \Rightarrow v = c(1 - \frac{2\Delta t_B}{\Delta t_A})$$

Από την (β) προκύπτει ότι $L_0 = \gamma c \Delta t_B$

Άσκηση 9.1.12 *Στο σύστημα αναφοράς Σ μια ράβδος με μήκος L κινείται κατά μήκος του άξονα y με ταχύτητα v_1 μένοντας συνεχώς παράλληλη στον άξονα x. Ένα δεύτερο σύστημα αναφοράς Σ_2, το οποίο έχει τους άξονές του παράλληλους με του Σ, κινείται κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητα v_2. Να υπολογίσετε*

(α) το μήκος της ράβδου όπως αυτό μετριέται στο σύστημα Σ_2.
(β) την γωνία που σχηματίζει ο άξονας της ράβδου με τον άξονα x_2 σύστημα Σ_2.
(γ) Για $v_1 = \epsilon\, c\, cos\theta$, $v_2 = \epsilon\, c\, sin\theta$ με $\epsilon \ll 1$ αλλά σταθερό, για ποια τιμή του θ η κλίση της ράβδου θα είναι μέγιστη;

Λύση



(α) Θεωρούμε ένα σύστημα Σ_1, ως προς το οποίο η ράβδος είναι ακίνητη. Οι χωροχρονικές συντεταγμένες κάποιου σημείου της ράβδου στο σύστημα Σ_1 είναι:

$$\mathrm{X}_{(\Sigma 1)} = \begin{bmatrix} ct_1 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Οι χωροχρονικές συντεταγμένες του σημείου της ράβδου στο Σ είναι:

$$\mathrm{X}_{(\Sigma)} = \Lambda(-v_1)\mathrm{X}_{(\Sigma 1)} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \gamma_1\beta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma_1\beta_1 & 0 & \gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_1 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 ct_1 \\ x_1 \\ \gamma_1 v_1 t_1 \end{bmatrix}$$

Και στο Σ2

$$\mathrm{X}_{(\Sigma 2)} = \Lambda(v_2)\mathrm{X}_{(\Sigma)} = \begin{bmatrix} \gamma_2 & -\gamma_2\beta_2 & 0 \\ -\gamma_2\beta_2 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 ct_1 \\ x_1 \\ \gamma_1 v_1 t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_2\gamma_1 ct_1 - \gamma_2\beta_2 x_1 \\ -\gamma_2\gamma_1 v_2 t_1 + \gamma_2 x_1 \\ \gamma_1 v_1 t_1 \end{bmatrix}$$

Για το άκρο Α είναι $t_1 = t_{1A}$ και $x_1 = 0$. Επομένως

$$\begin{bmatrix} ct_{2A} \\ x_{2A} \\ y_{2A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_2\gamma_1 ct_{1A} \\ -\gamma_2\gamma_1 v_2 t_{1A} \\ \gamma_1 v_1 t_{1A} \end{bmatrix}$$

Για το άκρο Β είναι $t_1 = t_{1B}$ και $x_1 = L$. Επομένως

$$\begin{bmatrix} ct_{2B} \\ x_{2B} \\ y_{2B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_2\gamma_1 ct_{1B} - \gamma_2\beta_2 L \\ -\gamma_2\gamma_1 v_2 t_{1B} + \gamma_2 L \\ \gamma_1 v_1 t_{1B} \end{bmatrix}$$

Για να μετρήσει ο Σ_2 τις συντεταγμένες των άκρων της ράβδου θα πρέπει να τις μετρήσει ταυτόχρονα στο σύστημά του. Συνεπώς

$$ct_{2B} = ct_{2A} \Leftrightarrow \gamma_2\gamma_1 ct_{1B} - \gamma_2\beta_2 L = \gamma_2\gamma_1 ct_{1A} \Leftrightarrow t_{1B} - t_{1A} = \frac{\beta_2 L}{\gamma_1 c}$$

Με αυτήν την συνθήκη το φαινόμενο μήκος της ράβδου στους άξονες x_2 και y_2 είναι:

$$\Delta x_2 = x_{2B} - x_{2A} = -\gamma_2\gamma_1 v_2(t_{1B} - t_{1A}) + \gamma_2 L = \frac{L}{\gamma_2}$$

$$\Delta y_2 = y_{2B} - y_{2A} = \gamma_1 v_1(t_{1B} - t_{1A}) = L\beta_1\beta_2$$

Επομένως, το φαινόμενο μήκος της ράβδου στο Σ_2 είναι

$$L_2 = \sqrt{\Delta x_2^2 + \Delta y_2^2} = L\sqrt{\frac{1}{\gamma_2^2} + \beta_1^2\beta_2^2} = L\sqrt{1 - \beta_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2}$$

(β) Η κλίση του άξονα της ράβδου στο Σ_2 είναι:

$$\tan\varphi = \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} = \beta_1\beta_2\gamma_2$$

(γ) Με $v_1 = \epsilon c\cos\theta, v_2 = \epsilon c\sin\theta$ όπου $\epsilon \ll 1$ προκύπτει ότι $\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}} \simeq 1$. Τότε $\tan\varphi \simeq \beta_1\beta_2 = \varepsilon^2\sin\theta\cos\theta = \frac{\varepsilon^2}{2}\sin(2\theta)$. Επομένως η κλίση του άξονα της ράβδου γίνεται μέγιστη όταν $2\theta = 90^\circ \Leftrightarrow \theta = 45^\circ$, δηλ. όταν η ταχύτητα v_2 του Σ_2, είναι ίδια με αυτήν της ράβδου.

Άσκηση 9.1.13 *Ο μέγιστος ρυθμός χτύπων της καρδιάς ενός ανθρώπου είναι 200 ανά λεπτό (στην πραγματικότητα ο ρυθμός αυτός μεταβάλλεται με την ηλικία και αντιπροσωπεύει το μέσο όρο των ανθρώπων). Πέρα από το όριο αυτό ο άνθρωπος συνηθώς λιποθυμά. Ένας αστροναύτης εκτελεί έντονες ασκήσεις εντός του διαστημοπλοίου του για ερευνητικούς σκοπούς καθώς το διαστημόπλοιό του επιστρέφει στη Γη. Κάθε φορά που χτυπά η καρδιά του ένας φωτεινός παλμός στέλνεται στον επίγειο σταθμό. Φτάνοντας οι φωτεινοί παλμοί στη Γη με ρυθμό 220 το λεπτό, οι γιατροί της αποστολής συμπεραίνουν ότι ο ρυθμός της καρδιάς του αστροναύτη είναι 220 το λεπτό.*

(α) Δεδομένου ότι οι γιατροί της ομάδας δεν γνωρίζουν καλή φυσική ποιο είναι το πιο πιθανό συμπέρασμα στο οποίο θα καταλήξουν;

(β) Ένας γιατρός της ομάδας ο οποίος ήταν πολύ καλός στη Φυσική, αλλά δεν γνωρίζει σχετικότητα σκέφτεται ότι καθώς ο κάθε φωτεινός παλμός έρχεται από πιο κοντά, λόγω της ταχύτητας προσέγγισης του διαστημοπλοίου στη Γη, ο ρυθμός φαίνεται να μεγαλώνει. Πόση είναι η ταχύτητα του διαστημοπλοίου που εξάγει ο γιατρός αυτός για να δικαιολογήσει το περίεργο φαινόμενο;

(γ) Ένας φυσικός καλείται να ελέγξει την εκτίμηση του τελευταίου γιατρού. Τι ταχύτητα θα εκτιμήσει αυτός;

Λύση

(α) Υπάρχουν διάφορες υποθέσεις που μπορεί να κάνει ένας γιατρός, όπως ότι ο αστροναύτης αυτός ξεπερνά τον μέσο όρο των ανθρώπων, ότι έχει άλλη ηλικία από αυτήν στην οποία αναφέρεται ο μέγιστος αριθμός σφυγμών 200, ότι είναι ιδιαίτερα εξασκημένος, ότι λόγω μακράς διαμονής στο Διάστημα έχει αλλάξει η φυσιολογία του, ότι λόγω υψηλής ταχύτητας το σώμα φέρεται διαφορετικά.

(β) Ουσιαστικά ζητάμε μια μη σχετικιστική λύση του προβλήματος.
Θεωρούμε ότι το διαστημόπλοιο επιστρέφει στον σταθμό ευρισκόμενο στον θετικό ημιάξονα Ox κινούμενο κατά την αρνητική κατεύθυνση.
Έστω T΄ η περίοδος των κτύπων της καρδιάς του αστροναύτη και T ο ρυθμός λήψης των παλμών από την γη.
Ο μετασχηματισμός Γαλιλαίου που συνδέει το σύστημα αναφοράς Σ του σταθμού με το σύστημα Σ΄ του διαστημοπλοίου είναι:

t΄=t	t=t΄
x΄=x+vt	x=x΄-vt΄

Έστω ότι την στιγμή t_1' εκπέμπεται από την θέση $x_1' = 0$ ένας παλμός.
Σύμφωνα με το Σ η εκπομπή έγινε την στιγμή $t_1 = t_1'$ από την θέση
$x_1 = x_1' - vt_1' = -vt_1'$.
Η εξίσωση διάδοσης του παλμού είναι $x - x_1 = -c(t - t_1)$.
Ο παλμός φτάνει στον επίγειο σταθμό (x=0) την στιγμή $\tilde{t}_1$ για την οποία ισχύει ότι:

$$0 - x_1 = -c(\tilde{t}_1 - t_1) \Rightarrow \tilde{t}_1 = \frac{x_1}{c} + t_1 \Rightarrow \tilde{t}_1 = t_1'(1 - \beta)$$

Την στιγμή $t_2' = t_1' + \mathrm{T}'$ εκπέμπεται ο επόμενος παλμός, ο οποίος φτάνει στον επίγειο σταθμό την στιγμή $\tilde{t}_2 = t_2'(1 - \beta)$.
Επομένως, η περίοδος και η συχνότητα λήψης των παλμών από την γη είναι:

$$\mathrm{T} = \tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = (t_2' - t_1')(1 - \beta) = T'(1 - \beta) \Rightarrow f' = f(1 - \beta)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι f=220 παλμοί/min και f΄≤200 παλμοί/min, καταλήγουμε ότι:

$$1 - \beta \leq \frac{200}{220} = \frac{10}{11} \Rightarrow \beta \geq \frac{1}{11} \simeq 0.091$$

(γ) Θα ακολουθήσουμε ακριβώς την ίδια πορεία χρησιμοποιώντας αντί του μετασχηματισμού Γαλιλαίου τον μετασχηματισμό Lorentz.
Ο μετασχηματισμός Lorentz που συνδέει το σύστημα αναφοράς Σ του σταθμού με το σύστημα Σ΄ του διαστημοπλοίου είναι:

$t' = \gamma(t + \frac{vx}{c^2})$	$t = \gamma(t' - \frac{vx'}{c^2})$
$x' = \gamma(x + vt)$	$x = \gamma(x' - vt')$

Έστω ότι την στιγμή t_1' εκπέμπεται από την θέση $x_1' = 0$ ένας παλμός.
Σύμφωνα με το Σ η εκπομπή έγινε την στιγμή $t_1 = \gamma t_1'$ από την θέση $x_1 =$

$\gamma(x_1' - vt_1') = -\gamma v t_1'$.
Η εξίσωση διάδοσης του παλμού είναι $x - x_1 = -c(t - t_1)$.
Ο παλμός φτάνει στον σταθμό (x=0) την στιγμή $\tilde{t}_1$ για την οποία ισχύει ότι:

$$0 - x_1 = -c(\tilde{t}_1 - t_1) \Rightarrow \tilde{t}_1 = \frac{x_1}{c} + t_1 \Rightarrow \tilde{t}_1 = t_1'\gamma(1-\beta)$$

Την στιγμή $t_2' = t_1' + \mathrm{T}'$ εκπέμπεται ο επόμενος παλμός, ο οποίος φτάνει στον σταθμό την στιγμή $\tilde{t}_2 = t_2'\gamma(1-\beta)$. Επομένως, η περίοδος και η συχνότητα λήψης των παλμών από την γη είναι:

$$\mathrm{T} = \tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = (t_2' - t_1')\gamma(1-\beta) = T'\gamma(1-\beta) \Rightarrow f' = f\gamma(1-\beta) \Rightarrow f' = f\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι f=220 παλμοί/min και f΄≤200 παλμοί/min, καταλήγουμε ότι:

$$\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \leq \frac{200}{220} = \frac{10}{11} \Rightarrow \beta \geq \frac{21}{221} \simeq 0.095$$

Άσκηση 9.1.14 *(α) Μια ευθύγραμμη ράβδος με μήκος L σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα x του ΑΣΑ Σ, στο οποίο είναι ακίνητη. Ένα δεύτερο ΑΣΑ Σ' κινείται με τον τυποποιημένο τρόπο με ταχύτητα v σε σχέση με το Σ. Ποιο μήκος της ράβδου θα μετρήσει ένας παρατηρητής του Σ' ;*

(β) Σχηματίζουμε τώρα ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς L, η μία πλευρά του οποίου (η ΑΒ) κατέχει τη θέση που είχε η ράβδος στο προηγούμενο ερώτημα στο σύστημα Σ, ενώ ολόκληρο το τετράγωνο βρίσκεται επί του επιπέδου x-y . Ποια η περίμετρος του τετραγώνου που θα μετρά ο παρατηρητής του συστήματος Σ' ;

(γ) Θέλουμε να υπολογίσουμε τη μικρότερη περίμετρο του τετραγώνου που είναι δυνατό να μετρήσει κάποιος αδρανειακός παρατηρητής ο οποίος κινείται ως προς το τετράγωνο σε οποιαδήποτε διεύθυνση επί του επιπέδου x-y . Προς τούτο μελετήστε πρώτα τη μονοτονία της συνάρτησης της περιμέτρου ως προς την ταχύτητα v κρατώντας τη φ σταθερή και στη συνέχεια αφού βρείτε την ταχύτητα που ελαχιστοποιεί την περίμετρο ελαχιστοποιήστε στη συνέχεια την έκφραση της περιμέτρου και ως προς τη γωνία. Εξηγήστε πώς τελικά πρέπει να κινείται ο παρατηρητής για να βλέπει την περίμετρο όσο το δυνατό μικρότερη.

Λύση

(α) Η προβολή της ράβδου στην διεύθυνση της ταχύτητας (άξονας x) είναι $L_x = L\cos\phi$ και η προβολή κάθετα στην διεύθυνση της ταχύτητας είναι $L_y = L\sin\phi$.

Η παράλληλη στην ταχύτητα συνιστώσα της ράβδου υφίσταται συστολή Lorentz ενώ η κάθετη σε αυτή παραμένει αμετάβλητη. Συνεπώς

$$L'_x = \frac{L_x}{\gamma} = \frac{L\cos\varphi}{\gamma} \quad \text{και} \quad L'_y = L_y = L\sin\varphi$$

Για το μήκος της ράβδου στο Σ΄ ισχύει ότι

$$L' = \sqrt{L'^2_x + L'^2_y} = L\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{\gamma^2} + \sin^2\varphi} = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\cos^2\varphi} \tag{1}$$

(β) Οι ράβδοι ΑΒ και ΓΔ σχηματίζουν με τον άξονα x γωνία φ και συνεπώς το φαινόμενο μήκος τους είναι ίδιο με αυτό του (α) ερωτήματος.

$$(A'B') = (\Gamma'\Delta') = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\cos^2\varphi}$$

Οι ράβδοι ΒΓ και ΑΔ σχηματίζουν με τον άξονα x γωνία π/2+ φ και συνεπώς το φαινόμενο μήκος τους προκύπτει από την (1) θέτοντας όπου φ το π/2+φ.

$$(B'\Gamma') = (\mathrm{A}'\Delta') = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\varphi}$$

Επομένως η περίμετρος του τετραγώνου στο Σ΄ είναι

$$(A'B'\Gamma'\Delta') = 2L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\cos^2\varphi} + 2L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\varphi}$$

(γ) Η περίμετρος ως συνάρτηση της ταχύτητας είναι φθίνουσα. Επομένως η ελάχιστη τιμή της μετρουμένης περιμέτρου αντιστοιχεί στην μέγιστη ταχύτητα. Άρα η ελάχιστη περίμετρος μετράται όταν $v \to c$.
Στην περίπτωση αυτή $(A'B'\Gamma'\Delta') = 2L(\sin\varphi + \cos\varphi)$

Κάνοντας χρήση της ταυτότητας $\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ η περίμετρος του τετραγώνου γίνεται:

$$(A'B'\Gamma'\Delta') = 2L\left[\sin\varphi + sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)\right] = 4L\sin\frac{\pi}{4}\cos(\varphi - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow$$
$$(A'B'\Gamma'\Delta') = 2L\sqrt{2}\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})$$

Ισχύει ότι $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \varphi - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$
Η ελάχιστη τιμή του $\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})$ είναι $\frac{\sqrt{2}}{2}$ και επιτυγχάνεται κατά την ισότητα. Επιτυγχάνεται δηλαδή όταν φ=0 ή φ=π/2. Επομένως η μικρότερη δυνατή περίμετρος είναι 2L. Πρέπει να κινείται κανείς παράλληλα με μια από τις πλευρές του τετραγώνου με ταχύτητα $v \to c$ για να πετύχει την ελάχιστη περίμετρο.

Άσκηση 9.1.15 *Μια (φανταστική) αμαξοστοιχία κινείται ευθύγραμμα και ομαλά με ταχύτητα 0.6c.*

(α) Επιβάτης της αμαξοστοιχίας παρατηρεί ότι το ρολόι του δείχνει ακριβώς 12:00, την ίδια στιγμή που το ρολόι του σταθμού Α που βρίσκεται ακριβώς έξω από το παράθυρο του δείχνει την ίδια ακριβώς ώρα. Στον επόμενο σταθμό Β, απ' όπου περνά η αμαξοστοιχία κινούμενη με την ίδια σταθερή ταχύτητα, το ρολόι του σταθμού δείχνει 1:00. Τι ώρα δείχνει τότε το ρολόι του επιβάτη ; Επειδή η διαφορά των ενδείξεων των ρολογιών θα δημιουργούσε πρόβλημα στους επιβάτες γιατί δεν θα μπορούσαν να προγραμματίσουν σωστά τις μετακινήσεις τους, προτάθηκε να είναι εφοδιασμένοι με δύο διαφορετικά ρολόγια. Ένα ρολόι που δείχνει τον ιδιόχρονό τους και έχει σταθερό ρυθμό και ένα δεύτερο που δείχνει την ώρα των σταθμών και έχει μεταβλητό ρυθμό. Το δεύτερο αυτό ρολόι λειτουργεί ως εξής: Από κάθε σταθμό εκπέμπεται διαρκώς ένα ηλεκτρομαγνητικό σήμα συγκεκριμένης συχνότητας f_0. Θεωρώντας ότι η κίνηση του τραίνου είναι ευθύγραμμη και επί αυτής της ευθείας βρίσκονται όλοι οι σταθμοί, το σήμα που εκπέμπεται από τους σταθμούς λαμβάνεται από το δεύτερο ρολόι του κάθε επιβάτη, μετράται η συχνότητα f του λαμβανόμενου σήματος, υπολογίζεται η ταχύτητα του τραίνου v και στη συνέχεια ρυθμίζεται ο ρυθμός λ του δεύτερου ρολογιού έτσι ώστε η ένδειξη αυτού να συμπίπτει με τα ρολόγια όλων των σταθμών. Με τον τρόπο αυτό ο επιβάτης ανά πάσα στιγμή μπορεί να διαβάζει το χρόνο του καθώς και το χρόνο των σταθμών,

(β) Υπολογίστε το ρυθμό λ του δεύτερου ρολογιού συναρτήσει της λαμβανόμενης συχνότητας f.

(γ) Υπάρχει καμιά διαφορά αν το δεύτερο ρολόι λαμβάνει το σήμα του σταθμού Α ή αυτό του σταθμού Β όσον αφορά στο ρυθμό λ;

Λύση

(α) Έστω Σ και Σ΄ τα συστήματα αναφοράς τραίνου και σταθμών αντιστοίχως. Για τα γεγονότα «διέλευση του τραίνου από τους σταθμούς Α , Β» ισχύει ότι:
$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x')$
Επειδή $\Delta x' = 0$, η παραπάνω σχέση γίνεται $\Delta t = \gamma\Delta t'$.
Αντικαθιστώντας Δt=1h=60min και γ=5/4 βρίσκουμε ότι:
$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{4}{5}60\,\mathrm{min} = 48\,\mathrm{min}$
Επομένως το ρολόι του επιβάτη θα δείχνει 12:48.

(β) Το κανονικό ρολόι «κτυπά» κάθε ένα sec, δείχνοντας τον ιδιόχρονο του επιβάτη. Επομένως έχει ρυθμό 1 κτύπο/s. Το δεύτερο ρολόι πρέπει, όταν έχει περάσει χρόνος Δt΄=60s, να δείχνει ότι πέρασε χρόνος $\Delta t = \gamma\Delta t' = \frac{5}{4}60 = 75s$. Επομένως πρέπει να έχει κτυπήσει 75 φορές. Άρα ο ρυθμός του 2ου ρολογιού είναι $\lambda = \frac{75\,\text{κτύποι}}{60s} = \frac{5}{4} = 1.25\,\text{κτύποι}/s$
Γενικότερα ο ρυθμός του δεύτερου ρολογιού είναι λ=γ.

Έστω v η ταχύτητα απομάκρυνσης του τραίνου από τον σταθμό Α. Στο σύστημα Σ, η τετραορμή του φωτονίου που φτάνει στο τραίνο από τον σταθμό Α

είναι $P = hf_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Lorentz που συνδέει τα δύο συστήματα, βρίσκουμε την τετραορμή του ίδιου φωτονίου στο σύστημα Σ΄.

$$P' = \Lambda(v)P = hf_0 \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \gamma(1-\beta)hf_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$f = \gamma(1-\beta)f_0 = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Αν το φωτόνιο προέρχεται από τον σταθμό Β τότε
$P = hf_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $f = f_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$
Λύνοντας την σχέση $f = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ ως προς β βρίσκουμε ότι $\beta = \frac{f_0^2-f^2}{f_0^2+f^2}$ από την οποία προκύπτει ότι $\gamma = \frac{f^2+f_0^2}{2ff_0}$

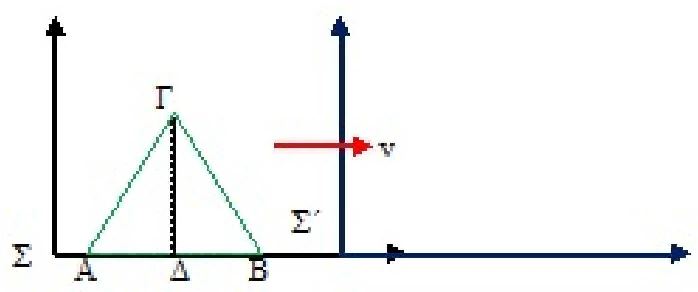
(γ) Ομοίως λύνοντας την σχέση $f = f_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ ως προς β , προκύπτει ο ίδιος παράγοντας γ. Συνεπώς ο ρυθμός του δεύτερου ρολογιού δεν εξαρτάται από τον σταθμό από τον οποίο προέρχεται το φωτόνιο που λαμβάνει.

Άσκηση 9.1.16 *(α) Ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α ηρεμεί στο αδρανειακό σύστημα Σ έτσι ώστε η πλευρά ΑΒ να βρίσκεται στον άξονα x. Υπολογίστε την περίμετρο του τριγώνου σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα Σ', το οποίο κινείται ως προς το Σ κατά τον τυποποιημένο τρόπο με ταχύτητα v.*

(β) Πώς πρέπει να κινείται (σε ποια κατεύθυνση) ένα αδρανειακό σύστημα ως προς το Σ έτσι ώστε η περίμετρος του τριγώνου να είναι η ελάχιστη δυνατή;

[Υπόδειξη: Μπορείτε να βρείτε εύκολα την απάντηση στο όριο που η σχετική ταχύτητα του Σ' πλησιάζει την ταχύτητα του φωτός c].

<u>Λύση</u>



(α) Επειδή η κίνηση γίνεται κατά μήκος της ΑΒ, η ΑΒ υφίσταται συστολή Lorentz. Επομένως το μήκος της πλευράς ΑΒ στο Σ΄ θα είναι $A'B' = \frac{\alpha}{\gamma}$.
Οι προβολές των πλευρών ΑΓ και ΒΓ στην διεύθυνση της ΑΒ υφίστανται συστολή Lorentz ενώ οι κάθετες σε αυτή δεν υφίστανται:
Επομένως

$$A'\Delta' = \frac{\mathrm{A}\Delta}{\gamma} = \frac{\alpha\cos(\pi/3)}{\gamma} = \frac{\alpha}{2\gamma} \quad \text{και} \quad \Gamma'\Delta' = \Gamma\Delta = \alpha\sin(\pi/3) = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$$

Συνεπώς

$$\mathrm{A}'\Gamma' = \mathrm{B}'\Gamma' = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\beta^2+3} = \frac{\alpha}{2}\sqrt{4-\beta^2}$$

Τέλος η περίμετρος του τριγώνου είναι ίση με $\frac{\alpha}{\gamma}+\alpha\sqrt{4-\beta^2} = \alpha\left(\sqrt{1-\beta^2}+\sqrt{4-\beta^2}\right)$.

(β) Δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κίνηση του Σ΄ γίνεται στο επίπεδο xy. Έστω φ η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα $\vec{v}$ του Σ΄ με τον άξονα x.
Ισχύει ότι $\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\tilde{\beta}^{\mathrm{T}} \\ -\gamma\tilde{\beta} & \Delta \end{bmatrix}$ όπου $\tilde{\beta} = \begin{bmatrix} \beta\cos\varphi \\ \beta\sin\varphi \end{bmatrix}$ και

$$\Delta = I + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\tilde{\beta}\tilde{\beta}^{\mathrm{T}} = I + (\gamma-1)\begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1+(\gamma-1)\cos^2\varphi & (\gamma-1)\sin\varphi\cos\varphi \\ (\gamma-1)\sin\varphi\cos\varphi & 1+(\gamma-1)\sin^2\varphi \end{bmatrix}$$

Επομένως,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta\cos\varphi & -\gamma\beta\sin\varphi \\ -\gamma\beta\cos\varphi & 1+(\gamma-1)\cos^2\varphi & (\gamma-1)\sin\varphi\cos\varphi \\ -\gamma\beta\sin\varphi & (\gamma-1)\sin\varphi\cos\varphi & 1+(\gamma-1)\sin^2\varphi \end{bmatrix}$$

Ο νόμος μετασχηματισμού των συντεταγμένων είναι:

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Για να μπορέσει ο Σ΄ να υπολογίσει την περίμετρο του τριγώνου θα πρέπει να κάνει μια ταυτόχρονη στο σύστημά του μέτρηση των συντεταγμένων των κορυφών του. Αναζητούμε λοιπόν τις τιμές των Δx΄, Δy΄ με την συνθήκη Δt΄=0. Επομένως, πρέπει να εκφράσουμε τα x΄, y΄ συναρτήσει των t΄, x, y. Για τον σκοπό αυτό λύνουμε την (1) ως προς t. Ισχύει ότι:

$$ct' = \gamma(ct - \beta x\cos\varphi - \beta y\sin\varphi) \Rightarrow ct = \frac{ct'}{\gamma} + \beta x\cos\varphi + \beta y\sin\varphi$$

Επομένως τον πίνακα των χωροχρονικών συντεταγμένων στο Σ μπορούμε να τον γράψουμε ως:

$$\begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\gamma & \beta\cos\varphi & \beta\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ x \\ y \end{bmatrix} \tag{2}$$

Κάνοντας χρήση της (2) η (1) γίνεται:

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta\cos\varphi & -\gamma\beta\sin\varphi \\ -\gamma\beta\cos\varphi & 1+(\gamma-1)\cos^2\varphi & (\gamma-1)\sin\varphi\cos\varphi \\ -\gamma\beta\sin\varphi & (\gamma-1)\sin\varphi\cos\varphi & 1+(\gamma-1)\sin^2\varphi \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1/\gamma & \beta\cos\varphi & \beta\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow$$

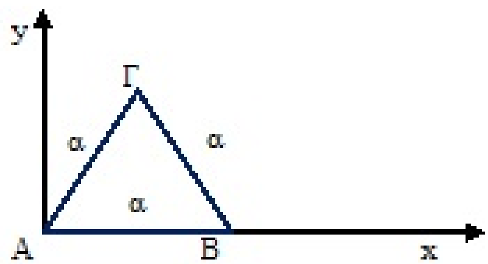
$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\beta\cos\varphi & \frac{\cos^2\varphi}{\gamma} + \sin^2\varphi & \frac{(1-\gamma)\sin\varphi\cos\varphi}{\gamma} \\ -\beta\sin\varphi & \frac{(1-\gamma)\sin\varphi\cos\varphi}{\gamma} & \frac{\sin^2\varphi}{\gamma} + \cos^2\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

Επομένως, αν $\Delta t' = 0$ τότε:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \Delta x' \\ \Delta y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\beta\cos\varphi & \frac{\cos^2\varphi}{\gamma} + \sin^2\varphi & \frac{(1-\gamma)\sin\varphi\cos\varphi}{\gamma} \\ -\beta\sin\varphi & \frac{(1-\gamma)\sin\varphi\cos\varphi}{\gamma} & \frac{\sin^2\varphi}{\gamma} + \cos^2\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Delta x' = \left(\frac{\cos^2\varphi}{\gamma} + \sin^2\varphi\right)\Delta x + \frac{(1-\gamma)\sin\varphi\cos\varphi}{\gamma}\Delta y$$

$$\Delta y' = \frac{(1-\gamma)\sin\varphi\cos\varphi}{\gamma}\Delta x + \left(\frac{\sin^2\varphi}{\gamma} + \cos^2\varphi\right)\Delta y$$



Για τις κορυφές Α και Β ισχύει ότι $\Delta x = \alpha$ και $\Delta y = 0$. Συνεπώς,

$$\Delta x' = \left(\frac{\cos^2\varphi}{\gamma} + \sin^2\varphi\right)\alpha$$
$$\Delta y' = \frac{(1-\gamma)\sin\varphi\cos\varphi}{\gamma}\alpha$$

Επομένως

$$\mathrm{A'B'} = \alpha\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{\gamma} + \sin^2\varphi\right)^2 + \frac{(1-\gamma)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\gamma^2}} \Rightarrow$$
$$\mathrm{A'B'} = \alpha\sqrt{\sin^2\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{\gamma^2}} = \alpha\sqrt{1-\beta^2\cos^2\varphi}$$

Για τις κορυφές Α και Γ ισχύει ότι $\Delta x = \frac{\alpha}{2}$ και $\Delta y = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Επομένως

$$\Delta x' = \left(\frac{\cos^2\varphi}{\gamma} + \sin^2\varphi\right)\frac{\alpha}{2} + \frac{(1-\gamma)\sin\varphi\cos\varphi}{\gamma}\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$
$$\Delta x' = \alpha\left[\frac{\cos\varphi}{\gamma}\left(\sin\varphi\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\varphi\frac{1}{2}\right) + \sin\varphi\left(\sin\varphi\frac{1}{2} - \cos\varphi\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] \Rightarrow$$
$$\Delta x' = \alpha\left[\frac{\cos\varphi}{\gamma}\sin(\varphi+\frac{\pi}{6}) + \sin\varphi\sin(\varphi-\frac{\pi}{3})\right]$$

$$\Delta y' = \frac{(1-\gamma)\sin\varphi\cos\varphi}{\gamma}\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{\sin^2\varphi}{\gamma} + \cos^2\varphi\right)\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$
$$\Delta y' = \alpha\frac{\sin\varphi}{\gamma}\left(\sin\varphi\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\varphi\frac{1}{2}\right) - \alpha\cos\varphi\left(\sin\varphi\frac{1}{2} - \cos\varphi\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow$$
$$\Delta y' = \alpha\left[\frac{\sin\varphi}{\gamma}\sin(\varphi+\frac{\pi}{6}) - \cos\varphi\sin(\varphi-\frac{\pi}{3})\right]$$

Επομένως,

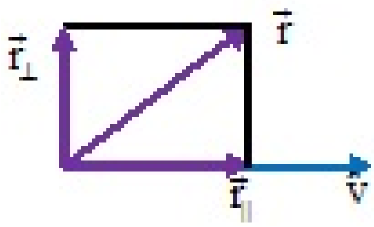
$$\mathrm{A'\Gamma'} = \alpha\sqrt{\frac{\sin^2(\varphi+\frac{\pi}{6})}{\gamma^2} + \sin^2(\varphi-\frac{\pi}{3})} = \alpha\sqrt{\frac{\cos^2(\varphi-\frac{\pi}{3})}{\gamma^2} + \sin^2(\varphi-\frac{\pi}{3})} \Rightarrow$$
$$\mathrm{A'\Gamma'} = \alpha\sqrt{1-\beta^2\cos^2(\varphi-\frac{\pi}{3})}$$

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\mathrm{B'\Gamma'} = \alpha\sqrt{1-\beta^2\cos^2(\varphi+\frac{\pi}{3})}$$

β τρόπος

Μπορούμε να καταλήξουμε στις παραπάνω σχέσεις εφαρμόζοντας την συστολή Lorentz. Κάθε πλευρά του τριγώνου αναλύεται σε μια συνιστώσα παράλληλη με την ταχύτητα και μια συνιστώσα κάθετη σε αυτήν. Η πρώτη υφίσταται συστολή με ένα παράγοντα 1/γ και η δεύτερη παραμένει αμετάβλητη. Έστω $\hat{v} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση της ταχύτητας και $\vec{r}$ το διάνυσμα μια πλευράς του τριγώνου.



Ισχύει ότι $\vec{r} = \vec{r}_{\|} + \vec{r}_{\perp}$ με $\vec{r}_{\|} \parallel \hat{v}$ και $\vec{r}_{\perp} \perp \hat{v}$. Επειδή $\vec{r}_{\|} \parallel \hat{v}$ υπάρχει αριθμός λ έτσι ώστε $\vec{r}_{\|} = \lambda\hat{v}$. Επομένως

$$\vec{r}_{\perp} \perp \hat{v} \Rightarrow \vec{r}_{\perp}\cdot\hat{v} = 0 \Rightarrow (\vec{r}-\vec{r}_{\|})\cdot\hat{v} = 0 \Rightarrow (\vec{r}-\lambda\hat{v})\cdot\hat{v} = 0 \Rightarrow \lambda = \vec{r}\cdot\hat{v}$$

Συνεπώς $\vec{r}_{\|} = (\vec{r}\cdot\hat{v})\hat{v}$ και $\vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\|}$

Για την πλευρά ΑΒ ισχύει ότι

$$\vec{r} = \alpha(1,0) \Rightarrow \vec{r}\cdot\hat{v} = \alpha(1,0)\cdot(\cos\varphi, \sin\varphi) = \alpha\cos\varphi \Rightarrow$$
$$\vec{r}_{\|} = \alpha\cos\varphi(\cos\varphi, \sin\varphi) \Rightarrow |\vec{r}_{\|}| = \alpha|\cos\varphi|$$

και

$$\vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\|} = \alpha\sin\varphi(\sin\varphi, \cos\varphi) \Rightarrow |\vec{r}_{\perp}| = |\alpha\sin\varphi|$$

$$\mathrm{A'B'} = \sqrt{\frac{r_{\|}^2}{\gamma^2} + r_{\perp}^2} = \alpha\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{\gamma^2} + \sin^2\varphi} = \alpha\sqrt{1-\beta^2\cos^2\varphi}$$

Για την πλευρά ΑΓ ισχύει ότι

$$\vec{r} = \alpha(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow \vec{r}\cdot\hat{v} = \alpha(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})\cdot(\cos\varphi, \sin\varphi) = \frac{\alpha}{2}(\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi)$$

$$\vec{r}_{\|} = \frac{\alpha}{2}(\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi)(\cos\varphi, \sin\varphi) \Rightarrow |\vec{r}_{\|}| = \alpha|\sin\varphi\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\varphi\frac{1}{2}| = \alpha|\cos(\varphi - \frac{\pi}{3})|$$

$$\vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\|} = (\sin\varphi\frac{1}{2} - \cos\varphi\frac{\sqrt{3}}{2})(\sin\varphi, -\cos\varphi) \Rightarrow |\vec{r}_{\perp}| = \alpha|\sin(\varphi - \frac{\pi}{3})|$$

Επομένως,

$$\mathrm{A'\Gamma'} = \sqrt{\frac{r_{\|}^2}{\gamma^2} + r_{\perp}^2} = \alpha\sqrt{\frac{\cos^2(\varphi - \frac{\pi}{3})}{\gamma^2} + \sin^2(\varphi - \frac{\pi}{3})} = \alpha\sqrt{1-\beta^2\cos^2(\varphi - \frac{\pi}{3})}$$

Ομοίως

$$\mathrm{B'\Gamma'} = \alpha\sqrt{1-\beta^2\cos^2(\varphi + \frac{\pi}{3})}$$

Η περίμετρος του τριγώνου στο Σ′ είναι η συνάρτηση

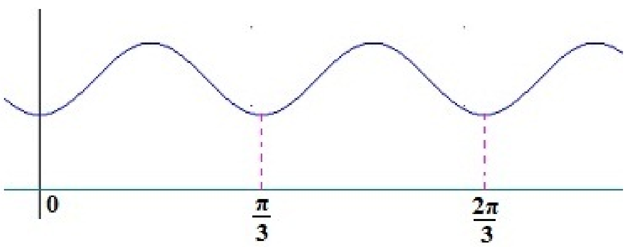
$$f(\varphi) = \alpha\sqrt{1-\beta^2\cos^2\varphi} + \alpha\sqrt{1-\beta^2\cos^2(\varphi-\frac{\pi}{3})} + \alpha\sqrt{1-\beta^2\cos^2(\varphi+\frac{\pi}{3})}$$

Ισχύει ότι

$$f'(\varphi) = \alpha\beta^2\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{1-\beta^2\cos^2\varphi}} + \alpha\beta^2\frac{\cos(\varphi-\frac{\pi}{3})\sin(\varphi-\frac{\pi}{3})}{\sqrt{1-\beta^2\cos^2(\varphi-\frac{\pi}{3})}} + \alpha\beta^2\frac{\cos(\varphi+\frac{\pi}{3})\sin(\varphi+\frac{\pi}{3})}{\sqrt{1-\beta^2\cos^2(\varphi+\frac{\pi}{3})}}$$

Εύκολα φαίνεται ότι $f'(0) = f'(\frac{\pi}{3}) = f'(\frac{2\pi}{3}) = 0$ και για αυτές τις τιμές της γωνίας φ η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστη τιμή.

Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται το γράφημα της f για μια τιμή του β. Οι τιμές της φ για τις οποίες η περίμετρος του τριγώνου ελαχιστοποιείται αντιστοιχούν σε ταχύτητα που έχει την διεύθυνση των πλευρών.



Αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι οι τιμές της φ για τις οποίες η f παρουσιάζει ακρότατο είναι ανεξάρτητες της παραμέτρου β. Θεωρώντας δεδομένη αυτήν την ιδιότητα μπορούμε να προσδιορίσουμε τη διεύθυνση ελάχιστης περιμέτρου ως εξής: Θεωρούμε την περίπτωση που η ταχύτητα του Σ′ τείνει στην μονάδα. Τότε οι συνιστώσες των πλευρών που είναι παράλληλες στην ταχύτητα θα συσταλούν σε μηδενικό μήκος και οι συνιστώσες που είναι κάθετες σε αυτήν θα παραμείνουν αμετάβλητες. Επομένως η περίμετρος του τριγώνου θα είναι ίση με την προβολή των πλευρών στην διεύθυνση που είναι κάθετη στην ταχύτητα. Αναζητούμε λοιπόν την διεύθυνση στην οποία η προβολή του τριγώνου είναι η ελάχιστη δυνατή. Είναι στοιχειώδες να αποδείξουμε ότι η διεύθυνση αυτή είναι η διεύθυνση κάποιου ύψους. Άρα η διεύθυνση της ταχύτητας για την οποία η περίμετρος παίρνει ελάχιστη τιμή είναι η διεύθυνση κάποιας πλευράς.

9.2 Χώρος Minkowski

Άσκηση 9.2.1 *Δύο γεγονότα (A και B) συμβαίνουν σε ένα σύστημα αναφοράς Σ_1 με χρονική διαφορά $\Delta t_1 = t_{1A} - t_{1B} = T > 0$. Τα ίδια γεγονότα συμβαίνουν σε ένα άλλο σύστημα αναφοράς Σ_2 με χρονική διαφορά $\Delta t_2 = t_{2A} - t_{2B} = -T < 0$.*

(α) Το τετράνυσμα AB που συνδέει τα δύο γεγονότα τι είναι (χρονοειδές, χωροειδές, ή φωτοειδές); Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(β) Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τη σχέση των χωρικών αποστάσεων στα δύο συστήματα;

(γ) Αν το Σ_2 κινείται κατά τον τυποποιημένο τρόπο με ταχύτητα v σε σχέση με το Σ_1, με πόση ταχύτητα ως προς το Σ_1 κινείται το σύστημα που παρατηρεί τα δύο γεγονότα να συμβαίνουν ταυτόχρονα;

Λύση

(α) Η συνάρτηση που συνδέει τη χρονική διαφορά των δύο γεγονότων σε κάποιο σύστημα με την χρονική διαφορά στο Σ_1 είναι συνεχής συνάρτηση των συνιστωσών της ταχύτητας. Επομένως, αφού στο Σ_1 είναι $\Delta t_1 > 0$ και στο Σ_2 $\Delta t_2 < 0$, υπάρχει σύστημα Σ_3, στο οποίο $\Delta t_3 = 0$. Υπολογίζουμε το αναλλοίωτο ΔS^2 στο Σ_3.

$\Delta S^2_{AB} = -c^2 \Delta t_3^2 + \Delta \vec{x}_3^2 = \Delta \vec{x}_3^2 > 0$

Άρα το τετράνυσμα AB είναι χωροειδές.

(β) Επειδή το ΔS^2 είναι αναλλοίωτο ισχύει ότι:

$$-c^2 \Delta t_1^2 + \Delta \vec{x}_1^2 = -c^2 \Delta t_2^2 + \Delta \vec{x}_2^2 \Rightarrow$$
$$-c^2 T^2 + \Delta \vec{x}_1^2 = -c^2 T^2 + \Delta \vec{x}_2^2 \Rightarrow |\Delta \vec{x}_1| = |\Delta \vec{x}_2|$$

(γ) Έστω u η ταχύτητα του Σ_3 σε σχέση με το Σ_1. Ισχύει ότι

$$\Delta t_3 = \gamma_u(\Delta t_1 - \tfrac{u}{c^2}\Delta x_1) = 0 \Rightarrow u = c^2 \tfrac{T}{\Delta x_1} \qquad (1)$$

$\Delta t_2 = \gamma_v(\Delta t_1 - \frac{v}{c^2}\Delta x_1) \Rightarrow -T = \gamma_v(T - \frac{v}{c^2}\Delta x_1) \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{c^2(\gamma_v+1)T}{\gamma_v v}$

Αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει ότι: $u = \frac{\gamma_v v}{\gamma_v + 1}$

Άσκηση 9.2.2 *Έστω δύο γεγονότα A, B με συντεταγμένες (c t,x,y,z) σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς: (10,2,3,0) και (13,2,7,3) αντίστοιχα, εκφρασμένες σε κατάλληλο σύστημα μονάδων όπου η ταχύτητα του φωτός είναι c = 1.*

(α) Να εξετασθεί αν τα δύο γεγονότα συνδέονται με ένα χωροειδές, χρονοειδές ή φωτοειδές τετράνυσμα.

(β) Η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα συνεπάγεται ότι υπάρχει σύστημα αναφοράς στο οποίο τα δύο γεγονότα μπορούν να γίνουν ταυτόχρονα;

(γ) Αν ένα σύστημα αναφοράς κινείται κατά μήκος του άξονα x είναι δυνατό τα δύο γεγονότα να αντιστραφούν ως προς τη χρονική τους σειρά;

(δ) Αν ένα σύστημα αναφοράς κινείται κατά μήκος του άξονα y είναι δυνατό τα δύο γεγονότα να αντιστραφούν ως προς τη χρονική τους σειρά; Βρείτε την ελάχιστη ταχύτητα του συστήματος αναφοράς ώστε αυτό να είναι δυνατό.

(ε) Εάν σε κάποιο δικαστήριο αναφερόταν το γεγονός A ως η εκπυρσοκρότηση ενός όπλου και το γεγονός B ως ο φόνος κάποιου από βλήμα και σας καλούσαν ως ειδικό, θα μπορούσατε να αποφανθείτε αν είναι δυνατό το βλήμα να προέρχεται από το εν λόγω όπλο;

Λύση

(α) Το τετράνυσμα «που συνδέει» τα δύο γεγονότα είναι το AB=(3,0,4,3). Το τετράγωνο του AB είναι

$\Delta S^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = -9 + 16 + 9 = 16 > 0$

Επομένως τα δύο γεγονότα συνδέονται με χωροειδές διάνυσμα.

(β) Σε ένα άλλο σύστημα αναφοράς θα ισχύει ότι $-\Delta t'^2 + \Delta \vec{x}'^2 = 16$. Επομένως η συνθήκη $\Delta t' = 0$ δεν φαίνεται απραγματοποίητη. Για να αποδείξουμε ότι είναι δυνατή, εκτελούμε κατ' αρχάς μια στροφή έτσι ώστε ο άξονας x να ταυτιστεί με το διάνυσμα $\Delta\vec{x} = (0, 4, 3)$.

Έτσι έχουμε ένα σύστημα αναφοράς Σ΄ στο οποίο το AB είναι AB=(3,5,0,0). Θεωρούμε ένα σύστημα αναφοράς Σ΄΄ το οποίο κινείται με ταχύτητα v κατά μήκος του άξονα x΄. Συνεπώς $\Delta t'' = \gamma(\Delta t' - v\Delta x')$.

Ισχύει ότι $\Delta t'' = 0 \Leftrightarrow \Delta t' = v\Delta x' \Leftrightarrow v = \frac{\Delta t'}{\Delta x'} = \frac{3}{5}$

Επομένως, σε ένα σύστημα αναφοράς κινούμενο με ταχύτητα 0.6c κατά μήκος του διανύσματος $\Delta\vec{x}$ τα A και B είναι ταυτόχρονα.

(γ) Έστω ένα σύστημα αναφοράς Σ΄ κινούμενο με ταχύτητα v κατά μήκος του άξονα x. Επειδή Δx=0, ισχύει ότι $\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x) = \gamma\Delta t$. Επομένως, δεν είναι δυνατόν να αντιστραφεί η χρονική σειρά των γεγονότων.

(δ) Έστω ένα σύστημα αναφοράς Σ΄ κινούμενο με ταχύτητα v κατά μήκος του άξονα y. Ισχύει ότι $\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta y) = \gamma(3 - 4v)$

Για να αντιστραφεί η χρονική σειρά των γεγονότων πρέπει $\Delta t' < 0 \Leftrightarrow v > 3/4$.

(ε) Όχι δεν είναι δυνατό αφού δύο γεγονότα που συνδέονται με ένα χωροειδές τετράνυσμα δεν μπορούν να έχουν σχέση αιτίου-αιτιατού.

Άσκηση 9.2.3 *Θεωρήστε δύο χωροχρονικά γεγονότα x_A^μ, x_B^μ, τα οποία συνδέονται με ένα χωροειδές τετράνυσμα*

$$\begin{bmatrix} \Delta x^0 \\ \Delta\vec{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B^0 - x_A^0 \\ \vec{x}_B - \vec{x}_A \end{bmatrix}$$

(α) Ποια η σχέση των Δx^0 και $\Delta\vec{x}$;

(β) Υπολογίστε την ταχύτητα με την οποία πρέπει να κινείται ένας παρατηρητής, σε σχέση με το αρχικό σύστημα αναφοράς, στο οποίο δίδονται οι συντεταγμένες των δύο γεγονότων, ούτως ώστε τα δύο γεγονότα να είναι ταυτόχρονα.

(γ) Είναι μοναδική η ταχύτητα αυτή;

[Δίδεται ο γενικός μετασχηματισμός προώθησης υπό μορφή πίνακα:

$\begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta^T \\ -\gamma\beta & I + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta\beta^T \end{bmatrix}$ *όπου I ο μοναδιαίος πίνακας 3x3,* $\beta = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$ *και* β^T *είναι ο ανάστροφος του β.]*

Λύση

(α) Επειδή το δοθέν τετράνυσμα είναι χωροειδές, το τετράγωνό του είναι θετικός αριθμός. Επομένως

$$-(\Delta x^0)^2 + \Delta\vec{x}^2 > 0 \Leftrightarrow |\Delta\vec{x}| > |\Delta x^0|$$

(β) Για τις συνιστώσες του τετρανύσματος στο «κινούμενο» σύστημα αναφοράς ισχύει ότι:

$$\begin{bmatrix} \Delta x'^0 \\ \Delta\vec{x}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta^T \\ -\gamma\beta & I + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta\beta^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^0 \\ \Delta\vec{x} \end{bmatrix}$$

Για να είναι τα δύο γεγονότα ταυτόχρονα στο σύστημα αυτό θα πρέπει:

$$\Delta x'^0 = 0 \Leftrightarrow \gamma(\Delta x^0 - \vec{\beta}\cdot\Delta\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{\beta}\cdot\Delta\vec{x} = \Delta x^0 \qquad (1)$$

(γ) Η σχέση (1) δεν προσδιορίζει μονοσήμαντα την ταχύτητα $\vec{\beta}$ αλλά μόνο την συνιστώσα της, την παράλληλη στο $\Delta\vec{x}$.
Πράγματι έστω ότι $\vec{\beta} = \vec{\beta}_{\|} + \vec{\beta}_{\perp}$ όπου $\vec{\beta}_{\|}$ και $\vec{\beta}_{\perp}$ είναι αντιστοίχως η παράλληλη και κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στο $\Delta\vec{x}$. Τότε υπάρχει λ πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $\vec{\beta}_{\|} = \lambda\Delta\vec{x}$.
Η σχέση (1) είναι ισοδύναμη με την

$$\vec{\beta}\cdot\Delta\vec{x} = \Delta x^0 \Leftrightarrow (\vec{\beta}_{\|} + \vec{\beta}_{\perp})\cdot\Delta\vec{x} = \Delta x^0 \Leftrightarrow$$

$$\vec{\beta}_{\|}\cdot\Delta\vec{x} = \Delta x^0 \Leftrightarrow \lambda\Delta\vec{x}^2 = \Delta x^0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\Delta x^0}{\Delta\vec{x}^{\,2}}$$

Συνεπώς, $\vec{\beta}_{\|} = \frac{\Delta x^0}{\Delta\vec{x}^2}\Delta\vec{x}$ και $\vec{\beta} = \frac{\Delta x^0}{\Delta\vec{x}^2}\Delta\vec{x} + \vec{\beta}_{\perp}$ με $\vec{\beta}_{\perp}$ αυθαίρετο διάνυσμα κάθετο στο $\Delta\vec{x}$. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι επειδή το αρχικό τετράνυσμα είναι χωροειδές ισχύει ότι $|\vec{\beta}_{\|}| = \frac{|\Delta x^0|}{|\Delta\vec{x}|} < 1$

Άσκηση 9.2.4 *Θεωρήστε μια σειρά από γεγονότα A_i (με i = 0,1, 2,...) τα οποία σε κάποιο σύστημα αναφοράς Σ συμβαίνουν στις ακόλουθες χωροχρονικές θέσεις $x_i = i$, $t_i = \sqrt{(i+1)^2 - 1}$*

(α) Σχεδιάστε σε ένα χωροχρονικό διάγραμμα t - x τα γεγονότα A_i.

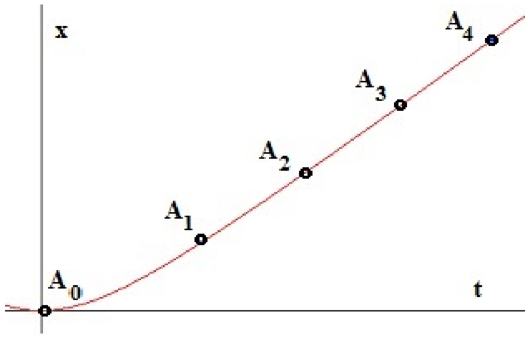
(β) Ελέγξτε το χαρακτήρα (χωροειδές, χρονοειδές, φωτοειδές) των χωροχρονικών τετρανυσμάτων A_iA_{i+1} (του τετρανύσματος που έχει άκρα τα γεγονότα A_i και A_{i+1}).

(γ) Υπάρχει σύστημα αναφοράς στο οποίο το γεγονός A_N να συμβεί πριν από το A_0;

(δ) Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιεί η ταχύτητα με την οποία πρέπει να κινείται, ως προς το αρχικό σύστημα Σ, ένα σύστημα αναφοράς Σ' ώστε $x'_N < x'_0$.

(ε) Ένα φωτόνιο εκπέμπεται προς την θετική κατεύθυνση του άξονα x από το σημείο $x = a$ τη χρονική στιγμή t = 0, ως προς το αρχικό σύστημα Σ. Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιεί το a ώστε κάθε χρονική στιγμή t_i το φωτόνιο να βρίσκεται πίσω από το γεγονός A_i, δηλαδή $x_{\varphi\omega\tau}(t_i) < x_i$.

Λύση



(α) Απαλείφοντας το i από τις σχέσεις $x = i$ και $t = \sqrt{(i+1)^2 - 1}$ καταλήγουμε στην σχέση $(x+1)^2 - t^2 = 1$, της οποίας το γράφημα είναι υπερβολή.

Ενδεικτικά αναφέρουμε τις χωροχρονικές συντεταγμένες των 4 πρώτων γεγονότων $A_0 = (0,0), A_1 = (\sqrt{3},1), A_2 = (\sqrt{8},2), A_3 = (\sqrt{15},3)$.

(β) Θα αποδείξουμε ότι το A_iA_{i+1} είναι χρονοειδές.
Επειδή $x_{i+1} > x_i$ και $t_{i+1} > t_i$, ο χρονοειδής χαρακτήρας είναι ισοδύναμος με

$$\begin{aligned}
&t_{i+1} - t_i > x_{i+1} - x_i \Leftrightarrow t_{i+1} - t_i > 1 \Leftrightarrow t_{i+1} > t_i + 1 \Leftrightarrow \\
&\sqrt{(i+2)^2 - 1} > \sqrt{(i+1)^2 - 1} + 1 \Leftrightarrow \\
&(i+2)^2 - 1 > (i+1)^2 + 2\sqrt{(i+1)^2 - 1} \Leftrightarrow \\
&2i + 2 > 2\sqrt{(i+1)^2 - 1} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow 0 > -1
\end{aligned}$$

η οποία είναι αληθής.

(γ) Για τα γεγονότα A_0 και A_N ισχύει ότι $\Delta x = x_N - x_0 = N$ και
$\Delta t = t_N - t_0 = \sqrt{(N+1)^2 - 1} = \sqrt{N^2 + 2N} > N = \Delta x$
Έστω ότι υπάρχει σύστημα αναφοράς τέτοιο ώστε το γεγονός A_N να συμβεί πριν από το A_0. Ισχύει ότι $\Delta t' < 0 \Leftrightarrow \Delta t - v\Delta x < 0 \Leftrightarrow v > \frac{\Delta t}{\Delta x} > 1$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα τέτοιο σύστημα δεν υπάρχει.

(δ) Θέλουμε

$$\Delta x' < 0 \Leftrightarrow \Delta x - v\Delta t < 0 \Leftrightarrow v > \frac{\Delta x}{\Delta t} \Leftrightarrow v > \frac{N}{\sqrt{N^2 + 2N}} = \sqrt{\frac{N}{N+2}}$$

(ε) Η εξίσωση κίνησης του φωτονίου είναι $x_\varphi - a = t - 0 \Leftrightarrow x_\varphi = a + t$

Θέλουμε

$$x_\varphi(t_i) < x_i \Leftrightarrow a < i - \sqrt{i^2+2i} \Leftrightarrow a < \frac{i^2-(i^2+2i)}{i+\sqrt{i^2+2i}} \Leftrightarrow$$
$$a < \frac{-2i}{i+\sqrt{i^2+2i}} = -\frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{2}{i}}}$$

Η συνάρτηση f με $f(i) = -\frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{2}{i}}}$ είναι γνησίως φθίνουσα.
Για να είναι $a < f(i)$ για κάθε i πρέπει $a < \lim_{i\to\infty} f(i) = \lim_{i\to\infty} \frac{-2}{1+\sqrt{1+\frac{2}{i}}} = -1 \Leftrightarrow$ $a < -1$

Άσκηση 9.2.5 *Ένας πύραυλος μήκους L κινείται κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητα v. Στο σύστημα του πυραύλου συμβαίνουν ταυτόχρονα δύο εκρήξεις στη βάση και την κορυφή αυτού, αντίστοιχα.*

(α) Στο σύστημα Σ, ως προς το οποίο ο πύραυλος κινείται με την ανωτέρω ταχύτητα, ποια έκρηξη συνέβη πρώτα;

(β) Ποια η χωρική απόσταση των δύο εκρήξεων και ποια η χρονική διαφορά αυτών στο σύστημα Σ;

(γ) Ένας παρατηρητής του συστήματος Σ ίσως υποθέσει ότι η έκρηξη που προηγήθηκε υπήρξε η αιτία για τη δεύτερη έκρηξη. Πώς θα κρίνατε την πρόταση αυτή;

(δ) Υπολογίστε τη χωροχρονική απόσταση των 2 γεγονότων.

(ε) Ποια η χωροχρονική θέση του κάθε γεγονότος, συγκριτικά με τον κώνο φωτός που έχει αρχή (κορυφή) το άλλο γεγονός;

Λύση

(α) Σύμφωνα με τα δεδομένα $\Delta x' = x_2' - x_1' = L$ και $\Delta t' = 0$.
Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Lorentz που συνδέει τα δύο συστήματα, προκύπτει ότι:
$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x') = \frac{\gamma v L}{c^2} > 0.$
Επομένως στο σύστημα Σ η έκρηξη που συνέβη στην βάση προηγείται αυτής που συνέβη στην κορυφή.

(β) $\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') = \gamma L.$

(γ) Είναι αδύνατο το ένα γεγονός να υπήρξε αίτιο για το άλλο, αφού στο Σ' συνέβησαν ταυτόχρονα και άρα θα χρειαζόταν άπειρη ταχύτητα διάδοσης πληροφορίας για να προκληθεί η μία έκρηξη εξαιτίας της άλλης.

(δ) Για την χωροχρονική απόσταση των δύο εκρήξεων ισχύει ότι
$\Delta S^2 = \Delta S'^2 = -c^2\Delta t'^2 + \Delta x'^2 = L^2 > 0$

(ε) Επομένως, το τετράνυσμα που συνδέει τα δύο γεγονότα είναι χωροειδές. Ως εκ τούτου το κάθε ένα γεγονός βρίσκεται εκτός του κώνου φωτός του άλλου.

Άσκηση 9.2.6 *Θεωρήστε μια τριάδα γεγονότων A_1, A_2, A_3 για την οποία δίδεται ότι το A_i (i = 2, 3) βρίσκεται εντός του μελλοντικού κώνου φωτός με κορυφή το γεγονός A_{i-1} (αλλά όχι επάνω στον κώνο).*

(α) Δείξτε ότι το τετράνυσμα με αρχή το γεγονός A_1 και τέλος το A_3 είναι ένα χρονικό (δηλ. χρονοειδές) τετράνυσμα.

(β) Αν σας δίδονται οι χωροχρονικές συντεταγμένες των A_1, A_2 σε κάποιο σύστημα Σ (π.χ. t_1, $\vec{x}_1$ για το A_1), βρείτε την ταχύτητα που θα πρέπει να έχει κάποιο σύστημα αναφοράς Σ' ως προς το Σ ώστε τα γεγονότα A_1, A_2 να συμβαίνουν με κάποια χρονική διαφορά αλλά στο ίδιο χωρικό σημείο. Είναι το Σ' μονοσήμαντα ορισμένο, δηλαδή υπάρχουν περισσότερα του ενός συστήματα αναφοράς Σ' ώστε τα A_1, A_2 να συμβαίνουν στο ίδιο χωρικό σημείο;

(γ) Ποια σχέση ανισότητας συνδέει το

$$\sqrt{-(A_1A_3)^2} \text{ με το } \sqrt{-(A_1A_2)^2} + \sqrt{-(A_2A_3)^2}$$

(Ο κάθε όρος $(A_iA_j)^2$ είναι το τετράγωνο του αντίστοιχου τετρανύσματος.).

(δ) Πότε ισχύει η ισότητα στην παραπάνω σχέση και τι σημαίνει αυτό γεωμετρικά;

Λύση

(α) Έστω

$$a = A_1A_2 = \begin{bmatrix} a^0 \\ \vec{a} \end{bmatrix}, b = A_2A_3 = \begin{bmatrix} b^0 \\ \vec{b} \end{bmatrix}, c = A_1A_3 = \begin{bmatrix} c^0 \\ \vec{c} \end{bmatrix}$$

τα αντίστοιχα τετρανύσματα σε κάποιο αδρανειακό σύστημα Σ.
Ισχύει ότι c=a+b.
Επειδή το A_2 βρίσκεται στον μελλοντικό κώνο φωτός του A_1, ισχύει ότι $a^0 > 0$ και το a είναι χρονοειδές. Επομένως $-(a^0)^2 + \vec{a}^2 < 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| < a^0$. Ομοίως $b^0 > 0$ και $|\vec{b}| < b^0$.
Επειδή c=a+b ισχύει ότι $c^0 = a^0 + b^0 > 0$ και $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.
Από την τριγωνική ανισότητα προκύπτει ότι:
$|\vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| < a^0 + b^0 = c^0$
Επομένως το c είναι χρονοειδές. Αυτό σημαίνει ότι ο μελλοντικός κώνος φωτός του A_2 βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στον μελλοντικό κώνο φωτός του A_1.

(β) Αναζητούμε σύστημα αναφοράς Σ΄κινούμενο με ταχύτητα ως προς το Σ τέτοιο ώστε $\Delta\vec{x}'_{12} = 0$.
Αν $\Delta\vec{x}_\parallel$ και $\Delta\vec{x}_\perp$ οι συνιστώσα του χωρικού μέρους της χωροχρονικής μετατόπισης που είναι παράλληλη και κάθετη στην ταχύτητα $\vec{v}$ αντιστοίχως, τότε
$\Delta\vec{x}'_\perp = \Delta\vec{x}_\perp$ και $\Delta\vec{x}'_\parallel = \gamma(\Delta\vec{x}_\parallel - \vec{v}\Delta t)$.
Για τα γεγονότα A_1 και A_2 θέλουμε

$\Delta\vec{x}' = \vec{0} \Rightarrow \Delta\vec{x}'_{\perp} = \vec{0} \Rightarrow \Delta\vec{x}_{\perp} = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \Delta\vec{x}_{12}$
Επομένως, για τα γεγονότα A_1 και A_2 ισχύει ότι $\Delta\vec{x}_{\parallel} = \Delta\vec{x}$.
Πρέπει επίσης
$\Delta\vec{x}'_{\parallel} = 0 \Rightarrow \Delta\vec{x}_{\parallel} = \vec{v}\Delta t \Rightarrow \vec{v} = \frac{\Delta\vec{x}_{12}}{\Delta t_{12}}$ (1)
Επειδή το A_1A_2 είναι χρονοειδές, ισχύει ότι $|\Delta\vec{x}_{12}| < \Delta t_{12} \Rightarrow |\vec{v}| < 1$

Από την σχέση (1) φαίνεται ότι το σύστημα αναφοράς στο οποίο τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στο ίδιο χωρικό σημείο είναι μονοσήμαντα ορισμένο.

(γ) Θεωρούμε ένα σύστημα αναφοράς Σ΄ στο οποίο τα A_1, A_3 συμβαίνουν στο ίδιο χωρικό σημείο. Σε αυτό το σύστημα αναφοράς ισχύει ότι $\vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{b} = -\vec{a}$.

Επομένως

$$A_1A_2 = \begin{bmatrix} a'^0 \\ \vec{p} \end{bmatrix}, \quad A_2A_3 = \begin{bmatrix} b'^0 \\ -\vec{p} \end{bmatrix}, \quad A_1A_3 = \begin{bmatrix} a'^0 + b'^0 \\ \vec{0} \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{-(A_1A_2)^2} = \sqrt{(a'^0)^2 - \vec{p}^2}, \quad \sqrt{-(A_2A_3)^2} = \sqrt{(b'^0)^2 - \vec{p}^2}$$

$$\sqrt{-(A_1A_3)^2} = \sqrt{(a'^0 + b'^0)^2} = a'^0 + b'^0$$

Προφανώς

$$\sqrt{-(A_1A_2)^2} + \sqrt{-(A_2A_3)^2} \leq \sqrt{-(A_1A_3)^2}$$

(δ) Η ισότητα στην παραπάνω σχέση ισχύει όταν $\vec{p} = 0$. Ισοδύναμα στο σύστημα στο οποίο τα A_1, A_3 συμβαίνουν στο ίδιο χωρικό σημείο είναι ίδιο με το σύστημα στο οποίο τα A_1, A_2 και A_2, A_3 συμβαίνουν στο ίδιο χωρικό σημείο. Ισοδυνάμως

$$\frac{\Delta\vec{x}_{12}}{\Delta t_{12}} = \frac{\Delta\vec{x}_{23}}{\Delta t_{23}} \Leftrightarrow \Delta\vec{x}_{23} = \frac{\Delta t_{23}}{\Delta t_{12}}\Delta\vec{x}_{12}$$

Για τα τετρανύσματα ισχύει ότι

$$A_2A_3 = \begin{bmatrix} \Delta t_{23} \\ \Delta\vec{x}_{23} \end{bmatrix} = \frac{\Delta t_{23}}{\Delta t_{12}} \begin{bmatrix} \Delta t_{12} \\ \Delta\vec{x}_{12} \end{bmatrix} = \lambda A_1A_2 \quad , \lambda > 0.$$

Επομένως η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα τετρανύσματα A_1A_2 και A_2A_3 είναι το ένα θετικό πολλαπλάσιο του άλλου. Αξίζει να σημειωθεί ότι η τελευταία πρόταση είναι ανεξάρτητη του συστήματος αναφοράς.

Άσκηση 9.2.7 *Το γεγονός Β βρίσκεται εντός του μελλοντικού κώνου φωτός του γεγονότος Α και το γεγονός Γ βρίσκεται εντός του μελλοντικού κώνου φωτός του γεγονότος Β.*

(α) Το γεγονός Γ πού βρίσκεται αναφορικά με τον κώνο φωτός του γεγονότος Α;

(β) Τι είδους τετρανυσμα είναι το ΑΓ;

(γ) Θα μπορούσε το γεγονός Γ να είναι η κατάληξη ενός φαινομένου το οποίο έχει ως αίτιο το γεγονός Α;

(δ) Μπορούμε σε κάποιο σύστημα αναφοράς να παρατηρήσουμε τα δύο γεγονότα, Α,Γ, να συμβαίνουν ταυτόχρονα; Εξηγήστε.

(ε) Τα τρία γεγονότα έχουν διαφορετικές θέσεις και χρονικές στιγμές στο σύστημα Σ. Όμως ισχύει ότι $\Delta\vec{x}_{AB} \perp \Delta\vec{x}_{B\Gamma}$ και $|\Delta\vec{x}_{AB}| = |\Delta\vec{x}_{B\Gamma}|$ (όπου το σύμβολο $\vec{}$ αναφέρεται στο χωρικό μέρος του τετρανύσματος). Αν ένα σύστημα Σ_1 κινούμενο με ταχύτητα $\vec{v}_1$ παρατηρεί τα γεγονότα Α και Β να συμβαίνουν στην ίδια χωρική θέση και ένα άλλο σύστημα Σ_2 κινούμενο με ταχύτητα $\vec{v}_2$ παρατηρεί τα γεγονότα Β και Γ να συμβαίνουν στην ίδια χωρική θέση, να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας $|\vec{v}_3|$ ενός συστήματος Σ_3, στο οποίο τα γεγονότα Α και Γ παρατηρούνται να συμβαίνουν στην ίδια χωρική θέση (γνωστές θεωρούνται μόνο οι $|\vec{v}_1|$, $|\vec{v}_2|$).

<u>Λύση</u>

(α) Το δεδομένο ότι το Β βρίσκεται εντός του μελλοντικού κώνου φωτός του γεγονότος Α σημαίνει ότι το τετράνυσμα ΑΒ είναι χρονοειδές και $\Delta t_{AB} > 0$.
Επομένως $\Delta S^2_{AB} < 0 \Leftrightarrow -\Delta t^2_{AB} + \Delta\vec{x}^2_{AB} < 0 \Leftrightarrow |\Delta\vec{x}_{AB}| < \Delta t_{AB}$.
Ομοίως επειδή το γεγονός Γ βρίσκεται εντός του μελλοντικού κώνου φωτός του γεγονότος Β ισχύει ότι $\Delta t_{B\Gamma} > 0$ και $|\Delta\vec{x}_{\mathrm{B\Gamma}}| < \Delta t_{B\Gamma}$
Για τα γεγονότα Α, Γ ισχύει ότι:
$\Delta t_{A\Gamma} = \Delta t_{AB} + \Delta t_{B\Gamma} > 0$ και $\Delta\vec{x}_{A\Gamma} = \Delta\vec{x}_{\mathrm{AB}} + \Delta\vec{x}_{\mathrm{B\Gamma}}$
Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα προκύπτει ότι:

$$|\Delta\vec{x}_{A\Gamma}| = |\Delta\vec{x}_{\mathrm{AB}} + \Delta\vec{x}_{\mathrm{B\Gamma}}| \leq |\Delta\vec{x}_{\mathrm{AB}}| + |\Delta\vec{x}_{\mathrm{B\Gamma}}| < \Delta t_{AB} + \Delta t_{B\Gamma} = \Delta t_{A\Gamma}$$

Επομένως, το γεγονός Γ βρίσκεται εντός του μελλοντικού κώνου φωτός του γεγονότος Α.

(β) Επειδή $|\Delta\vec{x}_{A\Gamma}| < \Delta t_{A\Gamma}$, το ΑΓ είναι χρονοειδές τετράνυσμα.

(γ) Ναι επειδή το γεγονός Γ βρίσκεται εντός του μελλοντικού κώνου φωτός του γεγονότος Α.

(δ) Επειδή το ΑΓ είναι χρονοειδές ισχύει ότι $\Delta S^2_{A\Gamma} < 0 \Leftrightarrow \Delta\vec{x}^2_{A\Gamma} < \Delta t^2_{A\Gamma}$
Επομένως αν σε κάποιο σύστημα αναφοράς είναι $\Delta t_{A\Gamma} = 0$,τότε σε αυτό το σύστημα αναφοράς θα ισχύει ότι $\Delta\vec{x}^2_{A\Gamma} < 0$, που είναι αδύνατο.

(ε) Θεωρούμε δύο τυχαία γεγονότα απέχοντα στο Σ χωρικά κατά $\Delta\vec{x}$ και χρονικά κατά Δt. Έστω τυχόν σύστημα Σ΄ που κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ ως προς το Σ.
Ο μετασχηματισμός Lorentz που συνδέει τα δύο συστήματα είναι:
$\Delta\vec{x}'_{\parallel} = \gamma(\Delta\vec{x}_{\parallel} - \vec{v}\Delta t)$ και $\Delta\vec{x}'_{\perp} = \Delta\vec{x}_{\perp}$
Αν στο Σ΄ τα γεγονότα συμβαίνουν στην ίδια θέση είναι τότε
$\Delta\vec{x}'_{\perp} = \vec{0} \Rightarrow \Delta\vec{x}_{\perp} = 0 \Rightarrow \vec{v} \parallel \Delta\vec{x} \Rightarrow \Delta\vec{x}_{\parallel} = \Delta\vec{x}$

$$\Delta\vec{x}'_{\parallel} = 0 \Rightarrow \Delta\vec{x} - \vec{v}\Delta t \Rightarrow \vec{v} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

Βάσει των παραπάνω ισχύει ότι $\vec{v}_1 = \frac{\Delta\vec{x}_{AB}}{\Delta t_{AB}},\ \vec{v}_2 = \frac{\Delta\vec{x}_{B\Gamma}}{\Delta t_{B\Gamma}},\ \vec{v}_3 = \frac{\Delta\vec{x}_{A\Gamma}}{\Delta t_{A\Gamma}}$
Έστω $R = |\Delta\vec{x}_{AB}| = |\Delta\vec{x}_{B\Gamma}|$.
Επειδή $\Delta\vec{x}_{AB} \perp \Delta\vec{x}_{B\Gamma}$ και $\Delta\vec{x}_{A\Gamma} = \Delta\vec{x}_{\mathrm{AB}} + \Delta\vec{x}_{\mathrm{B\Gamma}}$ συμπεραίνουμε ότι
$\Delta\vec{x}^2_{\mathrm{A\Gamma}} = \Delta\vec{x}^2_{\mathrm{A}B} + \Delta\vec{x}^2_{B\Gamma} = 2R^2 \Rightarrow |\Delta\vec{x}_{A\Gamma}| = R\sqrt{2}$

Έστω v_1, v_2, v_3 τα μέτρα των τριών ταχυτήτων. Ισχύει ότι

$$v_3 = \frac{|\Delta\vec{x}_{A\Gamma}|}{\Delta t_{A\Gamma}} = \frac{R}{\Delta t_{AB} + \Delta t_{B\Gamma}}\sqrt{2} = \frac{R}{\frac{R}{v_1} + \frac{R}{v_2}}\sqrt{2} = \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2}\sqrt{2}$$

Άσκηση 9.2.8 *Το γεγονός Β βρίσκεται εντός του μελλοντικού κώνου φωτός του γεγονότος Α.*

(α) Ισχύει η παραπάνω πρόταση για κάθε παρατηρητή;

(β) Μπορεί σε κάποιο σύστημα αναφοράς να ανατραπεί η χρονική σειρά των δύο γεγονότων; Εξηγήστε.

(γ) Πώς κινείται ο αδρανειακός παρατηρητής ο οποίος μετράει την ελάχιστη δυνατή χρονική απόσταση μεταξύ των δύο γεγονότων;

[Αν σας διευκολύνει θεωρήστε γνωστές τις χωροχρονικές συντεταγμένες των δύο γεγονότων σε κάποιο αρχικό αδρανειακό σύστημα (t_A, x_A, y_A, z_A) και (t_B, x_B, y_B, z_B).]

(δ) Υποθέστε ότι το γεγονός Α αφορά κάποια έκρηξη στο Διάστημα (όπου όλες οι βαρυτικές δυνάμεις θεωρούνται αμελητέες), κατά την οποία δημιουργείται πληθώρα θραυσμάτων που κινούνται προς όλες τις κατευθύνσεις και με διαφορετικές ταχύτητες. Όλα τα θραύσματα που δημιουργούνται αυτοεκρήγνυνται μετά από συγκεκριμένο χρόνο τ (ίδιο για όλα τα θραύσματα), όπως αυτός μετριέται στο σύστημα του εκάστοτε θραύσματος. Μπορεί κάθε τέτοια αυτοέκρηξη να θεωρηθεί ως κάποιο γεγονός Β εντός του μελλοντικού κώνου φωτός του Α; Δικαιολογήστε την απάντηση σας.

(ε) Στο σύστημα για το οποίο είναι ακίνητο το σώμα της πρώτης έκρηξης, θα αυτοεκραγούν πρώτα τα κοντινότερα ή τα μακρινότερα θραύσματα;

(στ) Παρατηρώντας τις εκλάμψεις των αυτοεκρήξεων των θραυσμάτων από τη θέση της πρώτης έκρηξης μπορείτε να προσδιορίσετε πόσο μακριά συνέβη καθεμία από αυτές;

Λύση

(α) Το τετράνυσμα που συνδέει τα δύο γεγονότα είναι χρονοειδές και αυτό δεν αλλάζει με το σύστημα αναφοράς.

(β) 'Οχι. Αν υπήρχε, θα υπήρχε κάποια ταχύτητα όπου η χρονική διαφορά θα γινόταν μηδενική. Όμως για χρονοειδή τετρανύσματα ισχύει ότι $\Delta t^2 - \Delta\vec{x}^2 > 0$. Επομένως είναι αδύνατον σε κάποιο σύστημα να ισχύει Δt=0.

(γ) Στο ζητούμενο σύστημα αναφοράς ισχύει ότι:

$\Delta t^2 - \Delta\vec{x}^{\,2} = \Delta t'^2 - \Delta\vec{x}'^2 \Rightarrow \Delta t'^2 = \Delta t^2 - \Delta\vec{x}^{\,2} + \Delta\vec{x}'^2$

Για να είναι Δt' = min θα πρέπει Δx' = 0. Επομένως, στο συγκεκριμένο σύστημα θα πρέπει τα γεγονότα να συμβούν στην ίδια θέση. Άρα το ζητούμενο σύστημα είναι το ιδιοσύστημα του σωματιδίου στη ζωή του οποίου συμβαίνουν τα δύο γεγονότα. Επομένως ο εν λόγω παρατηρητής κινείται στο αρχικό σύστημα με ταχύτητα $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$.

(δ) Ναι μπορεί να θεωρηθεί αφού η δημιουργία και η αυτοέκρηξη του κάθε θραύσματος αποτελούν διαδοχικά γεγονότα στη ζωή του θραύσματος.

(ε) Επειδή $\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta\vec{x}^2$, συμπεραίνουμε ότι όσο μικρότερο είναι το $|\Delta\vec{x}|$ τόσο μικρότερο είναι και το Δt. Επομένως τα κοντινότερα θραύσματα θα εκραγούν πρώτα.

(στ) Έστω ότι μια έκρηξη συμβαίνει σε απόσταση r. Η καταγραφή της έκλαμψης θα συμβεί μετά από χρόνο $T = \Delta t + r$, όπου Δt το χρονικό διάστημα μέχρι να γίνει η αυτοέκρηξη.
Επομένως $\tau^2 = \Delta t^2 - r^2 \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\tau^2 + r^2}$.
Συνεπώς $T = \sqrt{\tau^2 + r^2} + r \Leftrightarrow r = \frac{T^2 - \tau^2}{2T}$

Επειδή η παραπάνω συνάρτηση είναι αύξουσα συνάρτηση του για $(T > \tau)$, ισχύει ότι όσο πιο αργά φτάσει η λάμψη, τόσο πιο μακριά συνέβη η αυτοέκρηξη.

9.3 Τετραταχύτητα - Τετραορμή

Άσκηση 9.3.1 *Ένα σωματίδιο έχει ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων τετραταχύτητα u και ταχύτητα $\vec{v}$. Να εκφράσετε:*

(α) Το u^0 συναρτήσει του $\beta = \frac{|\vec{v}|}{c}$
(β) Τα u^i συναρτήσει των $\beta^i = \frac{v^i}{c}$
(γ) Το u^0 συναρτήσει των u^i.
(δ) Τον διαφορικό τελεστή $\frac{d}{d\tau}$ συναρτήσει του $\frac{d}{dt}$ και του $\vec{v}$.
(ε) Το v^i συναρτήσει των u^i.
(στ) Το v (μέτρο) συναρτήσει του u^0

Λύση

(α) και **(β)**

Α Τρόπος:
Ισχύει ότι $u^0 = \frac{dx^0}{d\tau}$

$$dS^2 = -(dx^0)^2 + d\vec{x}^{\,2} \Rightarrow -c^2 d\tau^2 = -(dx^0)^2 + v^2 dt^2 \Rightarrow -c^2 d\tau^2 = -(dx^0)^2 + (dx^0)^2 \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow$$
$$\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow u^0 = \gamma c$$

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = v^i \frac{1}{c}\frac{dx^0}{d\tau} = \beta^i u^0 = \gamma c \beta^i \Rightarrow u^i = \gamma c \beta^i$$

Β Τρόπος
Στο σύστημα ηρεμίας Ο΄ του σωματιδίου ισχύει ότι:

$$dS^2 = -(dx'^0)^2 + d\vec{x}'^2 \Rightarrow -c^2 d\tau^2 = -(dx'^0)^2 + 0 \Rightarrow \frac{dx'^0}{d\tau} = c \Rightarrow u'^0 = c$$

Σύμφωνα με τον νόμο μετασχηματισμού της τετραταχύτητας ισχύει ότι:

$$U = \Lambda U' \Rightarrow U = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta^{\mathrm{T}} \\ \gamma\beta & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma c \\ \gamma\beta c \end{bmatrix} \Rightarrow u^0 = \gamma c \text{ και } u^i = \gamma c \beta^i$$

(γ)

$$u^\alpha u_\alpha = -c^2 \Rightarrow u^0 u_0 + u^i u_i = -c^2 \Rightarrow -(u^0)^2 + u^i u_i = -c^2 \Rightarrow u^0 = \sqrt{c^2 + u^i u_i}$$

(δ)

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt} = \frac{1}{c}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{d}{dt} = \frac{u^0}{c}\frac{d}{dt} = \gamma\frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{d}{d\tau} = \gamma\frac{d}{dt}$$

(ε)

$$u^i = \gamma c \beta^i \Rightarrow u^i = u^0 v^i \Rightarrow v^i = \frac{u^i}{u^0} \Rightarrow v^i = \frac{u^i}{\sqrt{c^2 + u^i u_i}}$$

(στ)

$$u^0 = \gamma c \Rightarrow (u^0)^2 = \gamma^2 c^2 \Rightarrow (u^0)^2 = \frac{c^2}{1-\beta^2} \Rightarrow \beta = \frac{\sqrt{(u^0)^2 - c^2}}{u^0} \Rightarrow$$

$$v = c\frac{\sqrt{(u^0)^2 - c^2}}{u^0}$$

Άσκηση 9.3.2 *Δύο ΑΣΑ Σ1 και Σ2 κινούνται με ταχύτητες $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ ως προς ένα ΑΣΑ Σ. Να αποδείξετε ότι η σχετική τους ταχύτητα ικανοποιεί την σχέση:*

$$\beta^2 = \frac{(\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2)^2 - (\vec{\beta}_1 \times \vec{\beta}_2)^2}{(1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2)^2}$$

Λύση

Στο Σ_1 η τετραταχύτητα της αρχής O_1 είναι $u_1 = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$ και της αρχής O_2 είναι $u_2 = \begin{bmatrix} \gamma c \\ \gamma c\vec{\beta} \end{bmatrix}$ Επομένως το εσωτερικό τους γινόμενο ισούται με $u_1 u_2 = -\gamma c^2$.

Στο Σ η τετραταχύτητα της αρχής O_1 είναι $u_1' = \begin{bmatrix} c\gamma_1 \\ \gamma_1 \vec{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\gamma_1 \\ \gamma_1 c\vec{\beta}_1 \end{bmatrix}$ και της αρχής O_2 είναι $u'_2 = \begin{bmatrix} c\gamma_2 \\ \gamma_2 c\vec{\beta}_2 \end{bmatrix}$. Επομένως το εσωτερικό τους γινόμενο ισούται με $u'_1 u'_2 = -\gamma_1\gamma_2 c^2 + c^2\gamma_1\gamma_2\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2$. Επειδή το εσωτερικό γινόμενο είναι βαθμωτό μέγεθος ισχύει ότι

$$u'_1 u'_2 = u_1 u_2 \Rightarrow -\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2 = -\gamma \Rightarrow \gamma = \gamma_1\gamma_2(1-\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2)$$

Όμως

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \beta^2 = \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2} = \frac{\gamma_1^2\gamma_2^2(1-\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2)^2-1}{\gamma_1^2\gamma_2^2(1-\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2)^2} = \frac{(1-\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2)^2-\gamma_1^{-2}\gamma_2^{-2}}{(1-\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2)^2} \Rightarrow$$

$$\beta^2 = \frac{(1-\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2)^2-(1-\vec{\beta}_1^2)(1-\vec{\beta}_2^2)}{(1-\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2)^2} = \frac{\vec{\beta}_1^2+\vec{\beta}_2^2-2\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2+(\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2)^2-\vec{\beta}_1^2\vec{\beta}_2^2}{(1-\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2)^2} \Rightarrow$$

$$\beta^2 = \frac{(\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2)^2+(\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2)^2-\vec{\beta}_1^2\vec{\beta}_2^2}{(1-\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2)^2}$$

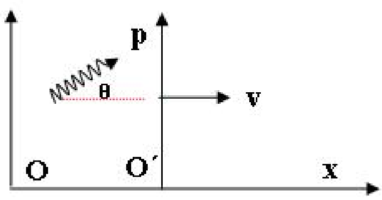
Ισχύει η ταυτότητα

$$(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d}) - (\vec{a}.\vec{d})(\vec{b}.\vec{c}) \Rightarrow$$
$$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = (\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{b}) - (\vec{a}.\vec{b})(\vec{b}.\vec{a}) = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2$$

Επομένως

$$\beta^2 = \frac{(\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2)^2+(\vec{\beta}_1\times\vec{\beta}_2)^2}{(1-\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2)^2}$$

Άσκηση 9.3.3 *Αδρανειακός παρατηρητής O΄ κινείται με ταχύτητα υ σχετικά με τον O. Ένα φωτόνιο κινείται έτσι ώστε η ορμή του ως προς O να σχηματίζει γωνία θ με την διεύθυνση της κίνησης. Να βρεθεί η γωνία θ΄ στο O΄.*



Λύση

Η τετραορμή του φωτονίου στα O και O΄ αντίστοιχα είναι

$$P = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} E \\ E\cos\theta \\ E\sin\theta \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P' = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} E' \\ E'\cos\theta' \\ E'\sin\theta' \end{bmatrix}$$

Από τον νόμο μετασχηματισμού της τετραορμής προκύπτει ότι:

$$P' = \Lambda P \Rightarrow \begin{bmatrix} E' \\ E'\cos\theta' \\ E'\sin\theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ E\cos\theta \\ E\sin\theta \end{bmatrix} \Rightarrow$$

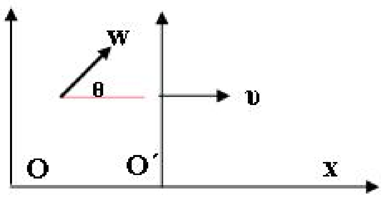
$\mathrm{E}'\sin\theta' = \mathrm{E}\sin\theta$
$\mathrm{E}'\cos\theta' = \gamma\mathrm{E}(-\beta + \cos\theta)$
Διαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη καταλήγουμε στην σχέση:

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta)}$$

Άσκηση 9.3.4 *Αδρανειακός παρατηρητής Ο΄ κινείται με ταχύτητα υ σχετικά με τον Ο. Ένα σωματίδιο Α με μη μηδενική μάζα ηρεμίας κινείται έτσι ώστε η ταχύτητα του ως προς Ο να σχηματίζει γωνία θ με την διεύθυνση της κίνησης.*

(α) Να βρεθεί η γωνία θ΄ στο Ο΄.

(β) Να συγκρίνετε το αποτέλεσμα με το αντίστοιχο αποτέλεσμα στην περίπτωση που το σωματίδιο ήταν φωτόνιο



Λύση

(α) 1ος τρόπος

Έστω $\vec{w}$ η ταχύτητα του σωματιδίου ως προς Ο και $\vec{w}'$ η ταχύτητα του ως προς Ο΄. Από τον νόμο μετασχηματισμού της ταχύτητας προκύπτει ότι:

$$\vec{v}_{A(O')} = \frac{\vec{v}_{A(O)} + \gamma\vec{v}_{O(O')} + \frac{(\gamma-1)(\vec{v}_{\mathrm{A(O)}}\cdot\vec{v}_{\mathrm{O(O')}})}{\vec{v}^2_{\mathrm{O(O')}}}\vec{v}_{\mathrm{O(O')}}}{\gamma(1+\frac{\vec{v}_{A(O)}\cdot\vec{v}_{O(O')}}{c^2})} \Rightarrow \vec{w}' = \frac{\vec{w} - \gamma\vec{v} + \frac{(\gamma-1)(\vec{w}\cdot\vec{v})}{v^2}\vec{v}}{\gamma(1-\frac{\vec{w}\cdot\vec{v}}{c^2})}$$

Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{w}\cdot\vec{v}$ είνια ίσο με $\vec{w}\cdot\vec{v} = wv\cos\theta$
Για την x συνιστώσα της $\vec{w}'$ ισχύει ότι:

$$w'\cos\theta' = \frac{w\cos\theta - \gamma v + \frac{(\gamma-1)(wv\cos\theta)}{v^2}v}{\gamma(1-\frac{vw\cos\theta}{c^2})} = \frac{\gamma(w\cos\theta - v)}{\gamma(1-\frac{vw\cos\theta}{c^2})}$$

Για την y συνιστώσα της $\vec{w}'$ ισχύει ότι:

$$w'\sin\theta' = \frac{w\sin\theta}{\gamma(1-\frac{vw\cos\theta}{c^2})}$$

Διαιρώντας τις δύο παραπάνω σχέσεις κατά μέλη καταλήγουμε στην σχέση:

$$\tan\theta' = \frac{w\ \sin\theta}{\gamma(w\cos\theta - v)}$$

(β) Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση w=c προκύπτει ότι:

$$\tan\theta' = \frac{c\ \sin\theta}{\gamma(c\cos\theta - v)}$$

Η παραπάνω σχέση είναι ίδια με την τελική σχέση της προηγούμενης άσκησης.

Άσκηση 9.3.5 *Θεωρούμε δύο φωτόνια συχνοτήτων f_1 και f_2 που κινούνται στο σύστημα εργαστηρίου σε διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους. Να βρεθεί η ταχύτητα που πρέπει να έχει ένας παρατηρητής O΄ για να βλέπει τα φωτόνια «ίδιου χρώματος» και με αντίθετες κατευθύνσεις κίνησης. Στην συνέχεια να βρείτε τις συχνότητες των φωτονίων στο O΄.*

Λύση

Δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι στο σύστημα εργαστηρίου τα φωτόνια 1 και 2 κινούνται κατά την θετική κατεύθυνση των αξόνων x και y αντιστοίχως. Επειδή στο σύστημα του O΄ τα φωτόνια θα έχουν το ίδιο χρώμα θα έχουν και την ίδια συχνότητα f΄, την ίδια ενέργεια E΄ και επομένως το ίδιο μέτρο ορμής. Επειδή δε κινούνται αντίθετα η χωρική ορμή του συστήματος στο O΄ θα είναι μηδέν. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το σύστημα του O΄ θα είναι το σύστημα κέντρου ορμής των δύο φωτονίων. Η τετραορμή του συστήματος των δύο φωτονίων στο σύστημα εργαστηρίου είναι:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} E_1 + E_2 \\ E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του κέντρου ορμής δίνεται από την σχέση $\vec{v} = \frac{c^2}{E}\vec{p}$ όπου Ε η ενέργεια του συστήματος και $\vec{p}$ η χωρική ορμή του συστήματος. Επομένως στην περίπτωσή μας

$$\vec{v} = \frac{c}{E_1 + E_2}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το μέτρο της ταχύτητας του O΄ είναι

$$v = |\vec{v}| = c\frac{\sqrt{E_1^2 + E_2^2}}{E_1 + E_2} \Rightarrow v = c\frac{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}{f_1 + f_2} < c$$

Από τον νόμο μετασχηματισμού της τετραορμής του πρώτου φωτονίου προκύπτει ότι:

$$P_1' = \Lambda(\vec{v})P_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} E' \\ .. \\ .. \\ .. \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ \mathrm{E}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathrm{E}' = \gamma(1-\beta_1)\mathrm{E}_1 \Rightarrow f' = \gamma(1-\beta_1)f_1$$

Ισχύει ότι

$$\beta = \frac{\sqrt{f_1^2+f_2^2}}{f_1+f_2} \Rightarrow 1-\beta^2 = \frac{2f_1f_2}{(f_1+f_2)^2} \Rightarrow \gamma = \frac{f_1+f_2}{\sqrt{2f_1f_2}}$$

$$\beta_1 = \frac{f_1}{f_1+f_2} \Rightarrow 1-\beta_1 = \frac{f_2}{f_1+f_2}$$

Επομένως $f' = \sqrt{\frac{f_1f_2}{2}}$.

Άσκηση 9.3.6 *Να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των στοιχείων που σημειώνονται με x των φυσικών μεγεθών στα ερωτήματα που ακολουθούν. Γράψτε σε ποια σχέση βασιστήκατε για να υπολογίσετε την εκάστοτε αριθμητική τιμή. Όλα τα δεδομένα είναι σε σύστημα μονάδων όπου c=1.*

(α) Η τετραταχύτητα ενός σωματιδίου είναι

$\begin{bmatrix} \frac{13}{12} & \frac{4}{12} & x & \frac{-3}{12} \end{bmatrix}$

(β) Η τετραεπιτάχυνση του ίδιου σωματιδίου, τη στιγμή που η τετραταχύτητά του είναι η παραπάνω, είναι

$\begin{bmatrix} 4 & 13 & 1 & x \end{bmatrix}$

(γ) Η τετραορμή του σωματιδίου είναι

$\begin{bmatrix} 13 & 4 & 0 & x \end{bmatrix}$

(δ) Η μάζα του σωματιδίου είναι m = x.

(ε) Ένα φωτόνιο έχει τετραορμή

$\begin{bmatrix} x & -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(στ) Η συχνότητα του φωτονίου αυτού είναι x /h.

(ζ) Το φωτόνιο αυτό κινείται αποκλειστικά κατά μήκος του x-άξονα σε ένα σύστημα αναφοράς, που κινείται σε σχέση με το σύστημα αναφοράς των προηγούμενων ερωτημάτων κατά τον άξονα z με ταχύτητα v = x.

(η) Η ενέργεια του φωτονίου σε αυτό το σύστημα είναι E' = x.

(θ) Η μάζα του σωματιδίου σε αυτό το σύστημα είναι m' = x.

Λύση

(α) Ισχύει ότι :

$$u^\mu u_\mu = -1 \Rightarrow -(u^0)^2 + (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 = -1 \Rightarrow$$
$$-(\frac{13}{12})^2 + (\frac{4}{12})^2 + x^2 + (\frac{-3}{12})^2 = -1 \Rightarrow x = 0$$

(β) Παραγωγίζοντας την σχέση $u^\mu u_\mu = -1$ ως προς τον ιδιόχρονο καταλήγουμε στην σχέση $u^\mu \alpha_\mu = 0 \Rightarrow -u^0\alpha^0 + u^1\alpha^1 + u^2\alpha^2 + u^3\alpha^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

(γ) Για την τετραορμή του σωματιδίου ισχύει ότι $p^\mu = mu^\mu \Rightarrow m = \frac{p^0}{u^0} = 12$ Επομένως $x = p^4 = m\, u^4 = -3$.

(δ) m=12

(ε) Για ένα φωτόνιο σε οποιοδήποτε σύστημα ισχύει ότι
$p^\mu p_\mu = 0 \Rightarrow -(p^0)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 = 0 \Rightarrow x = 5$

(στ) Η συχνότητα του φωτονίου είναι $f = \frac{E}{h} = \frac{p^0}{h} = \frac{5}{h} \Rightarrow x = 5$

(ζ) Αναζητούμε σύστημα αναφοράς κινούμενο κατά τον άξονα z του προηγουμένου, στο οποίο η τετραορμή του φωτονίου να έχει μόνο x συνιστώσα.

$$P' = \Lambda P \Rightarrow \begin{bmatrix} E' \\ {p'}_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma v & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Από την 3η συνιστώσα της παραπάνω εξίσωσης προκύπτει ότι
$-5\gamma v + 3\gamma = 0 \Rightarrow v = 3/5 \Rightarrow \gamma = 5/4$

(η) Από την 0 συνιστώσα προκύπτει ότι: $E' = 5\gamma - 3\gamma v = 4$

(θ) Η μάζα είναι αναλλοίωτο μέγεθος. Επομένως x=12.

Άσκηση 9.3.7 *Μια φωτεινή πηγή η οποία βρίσκεται ακίνητη πάνω στη θετική πλευρά του άξονα x στέλνει μονοχρωματική ακτινοβολία συχνότητας f_0 προς την αρχή των αξόνων. Ένας παρατηρητής που διέρχεται από την αρχή των αξόνων κινούμενος με ταχύτητα v υπό γωνία θ σε σχέση με τον άξονα x λαμβάνει την ακτινοβολία αυτή.*

(α) Ποια συχνότητα μετράει ο παρατηρητής;

(β) Για ποια τιμή της θ ο κινούμενος παρατηρητής δεν βλέπει καμία μεταβολή στη συχνότητα της πηγής;

(γ) Ελέγξτε αν υπάρχει μία μόνο τέτοια γωνία ή δύο.

Λύση

Η τετραορμή του φωτονίου στο σύστημα ηρεμίας της πηγής είναι:

$$P = hf_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας του μετασχηματισμού Lorentz που συσχετίζει το σύστημα ηρεμίας της πηγής με το σύστημα του παρατηρητή έχει την μορφή:

$$\Lambda(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v_x & -\gamma v_y & 0 \\ .. & ... & ... & .. \\ .. & ... & ... & .. \\ .. & ... & ... & .. \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, η τετραορμή του φωτονίου στο σύστημα του παρατηρητή είναι:

$$P' = \Lambda(\vec{v})P = hf_0 \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v_x & -\gamma v_y & 0 \\ .. & ... & ... & .. \\ .. & ... & ... & .. \\ .. & ... & ... & .. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = hf_0 \begin{bmatrix} \gamma(1+v_x) \\ ... \\ ... \\ ... \end{bmatrix}$$

Επομένως η συχνότητα του φωτονίου που μετρά ο παρατηρητής είναι:

$$f' = f_0\gamma(1+v_x) = f_0\gamma(1+v\cos\theta)$$

(β) Για να μετρά ο παρατηρητής συχνότητα ίση με f_0 πρέπει:

$$\gamma(1+v\cos\theta) = 1 \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{1-v^2}-1}{v} < 0$$

(γ) Έστω φ η οξεία γωνία με $\cos\varphi = \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v}$. Τότε θ = π-φ ή θ=-(π-φ)

Άσκηση 9.3.8 *Μια ακτίνα μονοχρωματικού φωτός ταξιδεύει στην κατεύθυνση $\hat{n}(\theta)$ (όπου $\hat{n}(\theta)$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, το οποίο σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς). Ένας παρατηρητής, ο οποίος κινείται με ταχύτητα $\vec{v} = v\hat{x}$ ως προς το παραπάνω σύστημα, λαμβάνει αυτή τη φωτεινή ακτίνα.*

(α) Ποια η σχέση των συχνοτήτων f'/f (παρατήρησης / εκπομπής) αυτής της φωτεινής ακτίνας;

(β) Ποια γωνία φαίνεται να σχηματίζει η φωτεινή ακτίνα με τον άξονα x′ για τον κινούμενο παρατηρητή;

(γ) Μια μακρινή φωτεινή πηγή (π.χ. ένας αστέρας) προς την οποία κατευθυνόμαστε παρουσιάζεται να έχει όλες τις χαρακτηριστικές της φασματικές γραμμές εκπομπής σε διπλάσια συχνότητα από αυτήν που μετράμε στο εργαστήριο. Ποια η ταχύτητα προσέγγισης μας στην πηγή και πόσο μεγαλύτερο ή μικρότερο φαίνεται να είναι το άνοιγμα υπό το οποίο παρατηρούμε την πηγή σε σχέση με το άνοιγμα που θα μετρούσαμε αν δεν κινούμασταν ως προς την πηγή;

Λύση

(α) Δίχως βλάβη της γενικότητας η διάδοση της ακτίνας γίνεται στο επίπεδο xy. Επομένως η τετραορμή του φωτονίου στο σύστημα της πηγής είναι

$$P = hf \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

Στο σύστημα του παρατηρητή είναι:

$$P' = \Lambda P = hf \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = hf \begin{bmatrix} \gamma(1 - v\cos\theta) \\ \gamma(\cos\theta - v) \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

Επομένως η συχνότητα παρατήρησης είναι:

$f' = f\gamma(1 - v\cos\theta) \Rightarrow f'/f = \gamma(1 - v\cos\theta)$ (1)

(β) Για την γωνία θ΄ που σχηματίζει η φωτεινή ακτίνα με τον άξονα x΄ για τον κινούμενο παρατηρητή ισχύει ότι: $\tan\theta' = \frac{p'_y}{p'_x} = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - v)}$ (2)

(γ) Έστω w η ταχύτητα προσέγγισης μας στην φωτεινή πηγή. Επομένως v=-w. Σύμφωνα με τα δεδομένα ισχύει ότι $f'/f = 2$. Για μικρές γωνίες θ ισχύει ότι $\cos\theta \simeq 1$, $\sin\theta \simeq \theta$,$\tan\theta' \simeq \theta'$.

Αντικαθιστώντας στην (1)

$$2 = \gamma(1 + w) \Rightarrow 2 = \sqrt{\frac{1 + w}{1 - w}} \Rightarrow w = \frac{3}{5} \Rightarrow \gamma = \frac{5}{4}$$

Βάσει του παραπάνω η (2) γίνεται: $\theta' \simeq \frac{4\theta}{5(1+0.6)} = \frac{\theta}{2}$

Άρα φαίνεται η μισή.

Άσκηση 9.3.9 *Δύο φωτεινές σημειακές πηγές οι οποίες εκπέμπουν φωτόνια με συχνότητες f_1, f_2 (στα αντίστοιχα ιδιοσυστήματα των πηγών) και κινούνται επί του άξονα x ενός συστήματος Σ με σταθερές ταχύτητες $\vec{v}_1 = v_1\hat{x}$ και $\vec{v}_2 = -v_2\hat{x}$ ως προς αυτό, απομακρυνόμενη η μια της άλλης. Θέλουμε να ελέγξουμε αν είναι δυνατό να υπάρχει παρατηρητής ο οποίος κινείται και αυτός επί του άξονα x και ο οποίος παρατηρεί συνεχώς τα φωτόνια που εκπέμπουν οι δύο πηγές να έχουν την ίδια συχνότητα.*

(α) Υπολογίστε τη συχνότητα των φωτονίων από τις δύο πηγές όπως τις μετρά ένας παρατηρητής Α ο οποίος είναι ακίνητος ως προς το Σ και στέκεται ανάμεσα στις δύο πηγές,

(β) Ένας δεύτερος παρατηρητής Β κινείται επί τού άξονα x με ταχύτητα $\vec{v} = v\hat{x}$ ως προς το Σ και βρίσκεται και αυτός ανάμεσα στις πηγές. Να υπολογίσετε τις συχνότητες των φωτεινών πηγών που παρατηρεί αυτός. Βρείτε την ταχύτητα ώστε να βλέπει τις δύο συχνότητες ίδιες.

(γ) Ποιος είναι ο ελάχιστος δυνατός λόγος των συχνοτήτων f_1, f_2 έτσι ώστε ο παρατηρητής που βλέπει τα φωτόνια να έχουν ίδια συχνότητα να τα βλέπει για πάντα έτσι (δηλαδή να μην καταφέρει ποτέ να προσπεράσει τη φωτεινή πηγή 1 και έτσι να βρίσκεται για πάντα ανάμεσα στις 2 πηγές);

Λύση

(α) Το φωτόνιο που φτάνει στον παρατηρητή Α από την 1η πηγή διαδίδεται προς τα αρνητικά και έχει στο Σ συχνότητα f'_1. Η τετραορμή του στο σύστημα ηρεμίας της 1ης πηγής είναι $P_1 = hf_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
Η τετραορμή του στο Σ είναι:

$$P_1' = \Lambda(-v_1)P_1 = hf_1\gamma_1 \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 \\ \beta_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = hf_1\gamma_1(1-\beta_1) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως $f_1' = f_1\gamma_1(1-\beta_1) = \sqrt{\frac{1-\beta_1}{1+\beta_1}} f_1$

Το φωτόνιο που φτάνει στον παρατηρητή Α από την 2η πηγή διαδίδεται προς τα αρνητικά και έχει στο Σ συχνότητα f'_2. Η τετραορμή του στο σύστημα ηρεμίας της 2ης πηγής είναι $P_2 = hf_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Η τετραορμή του στο Σ είναι:

$$P_2' = \Lambda(v_2)P_2 = \gamma_2 hf_2 \begin{bmatrix} 1 & \beta_2 \\ \beta_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = hf_2\gamma_2(1+\beta_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως $f_2' = f_2\gamma_2(1+\beta_2) = \sqrt{\frac{1+\beta_2}{1-\beta_2}} f_2$

(β) Υπολογίζοντας τις τετραορμές στο σύστημα ηρεμίας του Β προκύπτει ότι:

$$P_1'' = \Lambda(v)P_1' = \gamma hf_1' \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = hf_1'\gamma(1+\beta) \Rightarrow$$
$$f_1'' = f_1'\gamma(1+\beta) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} f_1' = \sqrt{\frac{(1+\beta)(1-\beta_1)}{(1-\beta)(1+\beta_1)}} f_1$$
$$P_2'' = \Lambda(v)P_2' = \gamma hf_2' \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = hf_2'\gamma(1-\beta) \Rightarrow$$
$$f_2'' = f_2'\gamma(1-\beta) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f_2' = \sqrt{\frac{(1-\beta)(1-\beta_2)}{(1+\beta)(1+\beta_2)}} f_2$$

Για να είναι ίσες οι δύο συχνότητες που μετρά ο Β, θα πρέπει:

$$\frac{(1+\beta)(1-\beta_1)}{(1-\beta)(1+\beta_1)} f_1^2 = \frac{(1-\beta)(1-\beta_2)}{(1+\beta)(1+\beta_2)} f_2^2 \Leftrightarrow \frac{1-\beta}{1+\beta} = \sqrt{\frac{1-\beta_1}{1+\beta_1}\frac{1+\beta_2}{1-\beta_2}\frac{f_1}{f_2}}$$

Από την σχέση αυτή επιλύουμε ως προς β.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ανεξάρτητα από την τιμή του δεύτερου μέλους η λύση ως προς β είναι στο διάστημα (-1,1). Πράγματι όταν $\beta \to 1$ τότε το κλάσμα $\frac{1-\beta}{1+\beta}$ τείνει στο 0 και όταν $\beta \to -1$ το κλάσμα τείνει στο άπειρο.

(γ) Πρέπει $\beta \leq \beta_1$. Η συνάρτηση f με $f(\beta) = \frac{1-\beta}{1+\beta}$ είναι φθίνουσα στο (-1,1). Επομένως,

$$\beta \leq \beta_1 \Leftrightarrow f(\beta) \geq f(\beta_1) \Leftrightarrow \frac{1-\beta}{1+\beta} \geq \frac{1-\beta_1}{1+\beta_1} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1-\beta_1}{1+\beta_1}\frac{1+\beta_2}{1-\beta_2}}\frac{f_1}{f_2} \geq \frac{1-\beta_1}{1+\beta_1} \Leftrightarrow \frac{f_1}{f_2} \geq \sqrt{\frac{1-\beta_1}{1+\beta_1}\frac{1-\beta_2}{1+\beta_2}}$$

Άσκηση 9.3.10 *(α) Δείξτε ότι το άθροισμα οσονδήποτε χρονοειδών (χρονικών - timelike) τετρανυσμάτων με κατεύθυνση προς το μέλλον (με θετική δηλαδή χρονική συνιστώσα) είναι και πάλι ένα χρονοειδές τετράνυσμα.*

(β) Βάσει του προηγούμενου ερωτήματος δείξτε ότι η συνολική τετραορμή ενός πλήθους σωματιδίων μη μηδενικής μάζας μπορεί να γραφεί ως η τετραορμή ενός μόνο υποθετικού σωματιδίου. Ποια η σχέση της μάζας αυτής με το άθροισμα των μαζών ηρεμίας όλων των σωματιδίων;

(γ) Πώς πρέπει να κινούνται όλα τα σωματίδια ώστε η μάζα του υποθετικού σωματιδίου να είναι η μικρότερη δυνατή;

Λύση

(α) Αρκεί να το αποδείξουμε για δύο τετρανύσματα. Η απόδειξη για περισσότερα είναι απλή εφαρμογή της τελείας επαγωγής.

Έστω $A = \begin{bmatrix} a^0 \\ \vec{a} \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} b^0 \\ \vec{b} \end{bmatrix}$ δύο χρονοειδή διανύσματα με κατεύθυνση προς το μέλλον και C=A+B το άθροισμά τους. Συνεπώς $c^0 = a^0 + b^0$ και $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Επειδή τα A, B έχουν κατεύθυνση προς το μέλλον ισχύει ότι $a^0 > 0$ και $b^0 > 0$. Επομένως $c^0 > 0$.

Επειδή το A είναι χρονοειδές ισχύει ότι: $A^2 < 0 \Leftrightarrow -(a^0)^2 + \vec{a}^2 < 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| < a^0$ Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $|\vec{b}| < b^0$. Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα για το $\vec{c}$ προκύπτει ότι:

$$|\vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| < a^0 + b^0 = c^0 \Rightarrow C^2 < 0$$

Άρα το C είναι χρονοειδές με κατεύθυνση προς το μέλλον.

(β) Η τετραορμή ενός σωματιδίου μη μηδενικής μάζας είναι χρονοειδές τετράνυσμα με κατεύθυνση προς το μέλλον. Επομένως η συνολική τετραορμή ενός πλήθους σωματιδίων μη μηδενικής μάζας είναι ένα χρονοειδές τετράνυσμα $P =$

$\begin{bmatrix} p^0 \\ \vec{p} \end{bmatrix}$ με $p^0 > 0$ και $P^2 < 0$.
Θέτουμε $M^2 = -P^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2$ και $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{p^0}$. Επειδή το P^2 είναι αναλλοίωτο μέγεθος, το ίδιο ισχύει και για την Μ.
Επειδή το P είναι χρονοειδές, ισχύει ότι $|\vec{p}| < p^0 \Rightarrow |\vec{v}| < 1$.
Θεωρούμε ένα σωματίδιο μάζας Μ κινούμενο με ταχύτητα $\vec{v}$. Ισχύει ότι:

$$1 - \vec{v}^2 = 1 - \frac{\vec{p}^2}{(p^0)^2} = \frac{(p^0)^2 - \vec{p}^2}{(p^0)^2} = \frac{M^2}{(p^0)^2} \Rightarrow \gamma = \frac{p^0}{M} \Rightarrow p^0 = M\gamma = E$$

Επιπλέον $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{p^0} \Rightarrow \vec{p} = p^0\vec{v} = M\gamma\vec{v}$.

Άρα η χρονική και η χωρική συνιστώσα της συνολικής τετραορμής είναι ίση με την ενέργεια και την ορμή του σωματιδίου. Επομένως η συνολική τετραορμή ενός πλήθους σωματιδίων μη μηδενικής μάζας μπορεί να γραφεί ως η τετραορμή ενός μόνο υποθετικού σωματιδίου. Στο σύστημα ηρεμίας του υποθετικού σωματιδίου (σύστημα κέντρο ορμής) ισχύει ότι

$$E = \sum_{i=1}^{N} E_i \Rightarrow \mathrm{M} = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i m_i = \sum_{i=1}^{N} (\gamma_i - 1)m_i + \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Επειδή $\gamma_i \geq 1$ συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{M} \geq \sum_{i=1}^{N} m_i$.

(γ) Από την τελευταία ανισότητα συμπεραίνουμε ότι η ελάχιστη τιμή της μάζας του υποθετικού σωματιδίου είναι ίση με το άθροισμα των επιμέρους μαζών. Αυτό συμβαίνει όταν $\gamma_i = 1$, i=1,..N. Συνεπώς όλα τα σωματίδια είναι ακίνητα στο σύστημα κέντρου ορμής. Αυτό σημαίνει ότι όλα τα σωματίδια έχουν την ίδια ταχύτητα στο σύστημα εργαστηρίου. Πράγματι, έστω $\vec{\beta}$ η ταχύτητα του κέντρου ορμής. Ένα σωματίδιο ακίνητο στο σύστημα κέντρου ορμής έχει τετραορμή $\begin{bmatrix} m \\ \vec{0} \end{bmatrix}$.
Η τετραορμή του στο σύστημα εργαστηρίου είναι
$P = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta^{\mathrm{T}} \\ \gamma\beta & \mathrm{I} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta\beta^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ \vec{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma m \\ \gamma\vec{\beta}m \end{bmatrix}$

Επομένως η ταχύτητά του στο σύστημα εργαστηρίου είναι $\vec{\beta}$.

Άσκηση 9.3.11 *Σε κάποιο ΑΣΑ Σ δύο φωτόνια ίδιας συχνότητας f κινούνται κατά μήκος των κατευθύνσεων* $-\hat{x}$ *και* $-\hat{y}$ *αντίστοιχα. Ένας παρατηρητής Σ' κινείται κατά τον τυποποιημένο τρόπο ως προς το Σ κατά μήκος του κοινού άξονα x με ταχύτητα v.*

(α) Υπολογίστε την ενέργεια των δύο φωτονίων στο Σ'.

(β) Υπολογίστε τη γωνία που φαίνονται να σχηματίζουν οι κατευθύνσεις των δύο φωτονίων με τους άξονες στο Σ'.

(γ) Ποια η ταχύτητα του κέντρου ορμής των δύο φωτονίων ως προς το Σ ;
(δ) Ποια η ενέργεια των δύο φωτονίων στο σύστημα του κέντρου ορμής;

Λύση
(α) Οι τετραορμές των δύο φωτονίων στο Σ είναι

$$P_1 = hf \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} quad\text{και} \quad P_2 = hf \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Εκτελώντας ένα τυποποιημένο μετασχηματισμό Lorentz στις δύο τετραορμές έχουμε

$$P_1{}' = \Lambda(v) P_1 = hf \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \gamma hf \begin{bmatrix} 1+\beta \\ -(1+\beta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα $E_1' = \gamma(1+\beta)hf = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}hf$

$$P_2{}' = \Lambda(v) P_2 = hf \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = hf \begin{bmatrix} \gamma \\ -\gamma\beta \\ -1 \end{bmatrix}$$

Άρα $E_2' = \gamma hf$

(β) Από τις χωρικές συνιστώσες των τετραορμών μπορούμε να βρούμε τις ορμές των δύο φωτονίων στο Σ΄.
Το πρώτο φωτόνιο διαδίδεται κατά μήκος του $-\hat{x}$ άξονα.
Το δεύτερο διαδίδεται κατά μήκος της διεύθυνσης

$$\hat{n} = -\frac{\gamma\beta\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{\gamma^2\beta^2 + 1}} = -\frac{\gamma\beta\hat{x} + \hat{y}}{\gamma} = -(\beta\hat{x} + \frac{1}{\gamma}\hat{y})$$

Επομένως διαδίδεται σε γωνία φ με τον άξονα τέτοια ώστε $\tan\varphi = \frac{1}{\gamma\beta}$ διαδιδόμενο προς την αρχή των αξόνων.

(γ) Η τετραορμή του συστήματος των δύο φωτονίων στο Σ είναι:

$$P = P_1 + P_2 = hf \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Για την ταχύτητα του κέντρου ορμής του συστήματος ισχύει ότι:

$$\vec{\beta}_{KO} = \frac{\vec{p}}{P^0} = -\frac{\hat{x} + \hat{y}}{2}$$

Επομένως $|\vec{\beta}_{KO}| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \gamma_{KO} = \sqrt{2}$. Ο μετασχηματισμός Lorentz που αντιστοιχεί στον ταχύτητα κέντρου ορμής έχει την μορφή:

$$\Lambda(\vec{\beta}_{KO}) = \begin{bmatrix} \gamma_{\text{KO}} & \frac{1}{2}\gamma_{\text{KO}} & \frac{1}{2}\gamma_{\text{KO}} \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \end{bmatrix}$$

Για τις ενέργειες των δύο φωτονίων στο σύστημα κέντρου ορμής ισχύει ότι:

$$\begin{bmatrix} \text{E}_{1(\text{KO})} \\ ... \\ ... \end{bmatrix} = hf \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow E_{1(KO)} = \frac{\sqrt{2}}{2} hf$$

Στο σύστημα κέντρου ορμής οι ορμές των δύο φωτονίων είναι αντίθετες και οι ενέργειες ίσες. Επομένως $E_{2(KO)} = \frac{\sqrt{2}}{2} hf$.

Άσκηση 9.3.12 *Διαστημικό όχημα εκκινεί από διαστημική πλατφόρμα και ακολουθεί την κοσμική γραμμή που περιγράφεται από την παραμετρική εξίσωση (σε μονάδες όπου c = 1):*

$$\begin{bmatrix} t = b\, sinh\,(\tau/b) & \\ x = \ b\,[cosh\,(\tau/b) - 1] & 0 \ \leq \tau < \ b\kappa \\ t = b\,[sinh(\tau/b \ - \ 2\kappa) \ + \ 2\ sinh(\kappa)] & \\ x = b[-1 - \cosh(\tau/b - 2\kappa) + 2cosh(\kappa)] & b\kappa \leq \tau < \ 3b\kappa \\ t = b\,[sinh(\tau/b \ - \ 4\kappa) \ + \ 4\ sinh\,(\kappa)] & \\ x = b[\cosh(\tau b - 4\kappa) - 1] & 3b\kappa \leq \tau < \ 4b\kappa \end{bmatrix}$$

όπου τ είναι κάποια μεταβλητή και b, κ κάποιες σταθερές παράμετροι.

(α)Αποδείξτε ότι οι 3 κλάδοι της παραπάνω παραμετρικής εξίσωσης αποτελούν μια συνεχή κοσμική γραμμή ελέγχοντας τη συνέχεια των συναρτήσεων $t(\tau)$ και $x(\tau)$ στα σημεία $\tau = b\kappa$ και $\tau = 3b\kappa$.

(β) Αποδείξτε ότι η παράμετρος τ είναι ο ιδιόχρονος του οχήματος.

(γ) Υπολογίστε την τετραταχύτητα και την τετραεπιτάχυνση του οχήματος σε κάθε χρονική στιγμή.

(δ) Περιγράψτε την κίνηση του οχήματος και υπολογίστε το απώτερο σημείο στο οποίο θα φθάσει το όχημα (ως προς την πλατφόρμα) κατά τη διάρκεια του ταξιδιού του.

(ε) Υπολογίστε τη διάρκεια του ταξιδιού για τον παρατηρητή στην πλατφόρμα και συγκρίνετε την με τη διάρκεια στο διαστημόπλοιο.

Λύση

(α) Πράγματι για $\tau = b\kappa$ οι 2 πρώτοι κλάδοι δίνουν $t = bsinh(\kappa)$, $x = b(cosh(\kappa) - 1)$, ενώ για $\tau = 3b\kappa$ οι 2 τελευταίοι κλάδοι δίνουν $t = 3bsinh(\kappa)$, $x = b(cosh(\kappa) - 1)$.

(β) Για κάθε κλάδο εύκολα διαπιστώνεται ότι $dt^2 - dx^2 = d\tau^2$. Επομένως η παράμετρος τ είναι ο ιδιόχρονος του οχήματος.

(γ) Για την τετραταχύτητα ισχύει ότι

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \begin{array}{ll} \begin{bmatrix} \cosh(\tau/b) \\ \sinh(\tau/b) \end{bmatrix} & \text{για } 0 \leq \tau < b\kappa \\ \begin{bmatrix} \cosh(\tau/b - 2\kappa) \\ -\sinh(\tau/b - 2\kappa) \end{bmatrix} & \text{για } b\kappa \leq \tau < 3b\kappa \\ \begin{bmatrix} \cosh(\tau/\alpha - 4\kappa) \\ \sinh(\tau/\alpha - 4\kappa) \end{bmatrix} & \text{για } 3b\kappa \leq \tau < 4b\kappa \end{array}$$

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι και η τετραταχύτητα είναι συνεχής στους 3 κλάδους.

Τέλος η τετραεπιτάχυνση είναι

$$\alpha^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \begin{array}{ll} \begin{bmatrix} (1/b)\sinh(\tau/b) \\ (1/b)cosh(\tau/b) \end{bmatrix} & \text{για } 0 \leq \tau < b\kappa \\ \begin{bmatrix} (1/b)\sinh(\tau/b - 2\kappa) \\ -(1/b)cosh(\tau/b - 2\kappa) \end{bmatrix} & \text{για } b\kappa \leq \tau < 3b\kappa \\ \begin{bmatrix} (1/b)\sinh(\tau/b - 4\kappa) \\ (1/b)cosh(\tau/b - 4\kappa) \end{bmatrix} & \text{για } 3b\kappa \leq \tau < 4b\kappa \end{array}$$

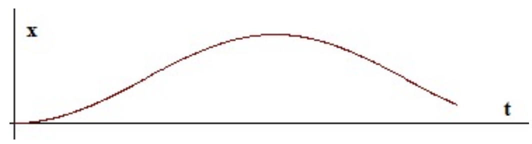
(δ) Το χρονικό μέρος της τετραταχύτητας είναι θετικό για κάθε τιμή του ιδιόχρονου. Επομένως η συνάρτηση $t(\tau)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Για το χωρικό μέρος της τετραταχύτητας η κατάσταση είναι η εξής:

Για $0 < \tau < 2b\kappa$ ισχύει ότι $u^1 > 0$. Συνεπώς η συνάρτηση $x(\tau)$ είναι αύξουσα με αποτέλεσμα και η $x(t)$ να είναι αύξουσα. Άρα το όχημα κινείται απομακρυνόμενο της πλατφόρμας.

Για $\tau > 2b\kappa$ ισχύει ότι u^1<0 και συνεπώς το όχημα πλησιάζει προς την πλατφόρμα.

Η κοσμική γραμμή που διαγράφει το όχημα φαίνεται στην επόμενη γραφική παράσταση.



Το απώτερο σημείο θα βρίσκεται όταν ενδιάμεσα η ταχύτητα μηδενίζεται και αρχίζει η επιστροφή, δηλαδή για $\tau = 2b\kappa$. Η μέγιστη απόσταση από την πλατφόρμα είναι $x_{max} = 2bcosh(\kappa)$.

(ε) Ο συνολικός χρόνος κίνησης στο σύστημα της πλατφόρμας είναι $t(4\kappa b) = 4bsinh(\kappa)$ και στο σύστημα του διαστημοπλοίου είναι ίσος με τον συνολικό ιδιόχρονο $4\kappa b$.

Επομένως $\frac{t_{o\lambda}}{\tau_{o\lambda}} = \frac{4b\sinh(\kappa)}{4\kappa b} = \frac{\sinh(\kappa)}{\kappa}$

Ο αριθμός αυτός είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα και αυξάνεται εκθετικά όσο μεγαλώνει ο αριθμός κ. Επομένως για ένα ταξίδι που θα διαρκέσει πολλές μονάδες χρόνου, ο χρόνος του ταξιδιού για τον ταξιδιώτη θα είναι πολύ μικρότερος από το χρόνο για την πλατφόρμα.

Άσκηση 9.3.13 *Δύο φωτόνια, το ένα με ενέργεια E_1 και το άλλο με ενέργεια E_2 κινούνται επί του επιπέδου x - y ενός αδρανειακού συστήματος Σ σχηματίζοντας ίσες γωνίες φ εκατέρωθεν του άξονα x.*

(α) Υπολογίστε την ταχύτητα του κέντρου ορμής του συστήματος,

(β) Υπολογίστε την ενέργεια του κάθε φωτονίου στο σύστημα του κέντρου ορμής του συστήματος των φωτονίων. Υπάρχει τιμή της γωνίας φ για την οποία η ενέργεια των φωτονίων στο σύστημα αυτό να γίνεται μέγιστη ;

<u>Λύση</u>

(α) Οι τετραορμές των δύο φωτονίων στο Σ είναι:

$$P_{(1)} = E_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P_{(2)} = E_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{bmatrix}$$

Επομένως η τετραορμή του συστήματος είναι:

$$P = P_{(1)} + P_{(2)} = \begin{bmatrix} E_1 + E_2 \\ (E_1 + E_2)\cos\varphi \\ (E_1 - E_2)\sin\varphi \end{bmatrix}$$

Για την ταχύτητα του κέντρου ορμής του συστήματος ισχύει ότι:

$$\vec{v}_{KO} = \frac{\vec{p}_{o\lambda}}{E_{o\lambda}} = \frac{(E_1 + E_2)\cos\varphi\,\hat{x} + (E_1 - E_2)\sin\varphi\,\hat{y}}{E_1 + E_2}$$

(β) Στο σύστημα κέντρου ορμής η συνολική χωρική ορμή είναι μηδέν. Επομένως τα δύο φωτόνια έχουν αντίθετες χωρικές ορμές. Συνεπώς, έχουν ίσες ενέργειες. Δηλαδή ισχύει ότι $E'_1 = E'_2 = E'$. Ένας τρόπος υπολογισμού της ενέργειας των φωτονίων στο σύστημα κέντρου ορμής είναι να εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό Lorentz που ορίζει η $\vec{v}_{KO}$ στις τετραορμές των δύο φωτονίων (στο Σ). Ισχύει ότι:

$$P'_{(1)} = \Lambda(\vec{v}_{KO})P_{(1)} \Rightarrow \begin{bmatrix} E' \\ ... \\ ... \end{bmatrix} = E_1 \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$E' = \gamma E_1(1 - \beta_x\cos\varphi - \beta_y\sin\varphi)$$

Αντικαθιστώντας τις συνιστώσες της ταχύτητας του κέντρου ορμής βρίσκουμε ότι $E' = \sin\varphi\sqrt{E_1 E_2}$.

Ένας κομψότερος τρόπος υπολογισμού της Ε΄ είναι ο εξής:
Το τετράγωνο της τετραορμής του συστήματος είναι αναλλοίωτο μέγεθος. Στο σύστημα Σ ισχύει ότι

$$P^2 = -(E_1+E_2)^2 + (E_1+E_2)^2\cos^2\varphi + (E_1-E_2)^2\sin^2\varphi \Rightarrow$$
$$P^2 = -(E_1+E_2)^2\sin^2\varphi + (E_1-E_2)^2\sin^2\varphi = -4E_1E_2\sin^2\varphi$$

Επειδή στο Σ΄ οι χωρικές ορμές των φωτονίων είναι αντίθετες και οι ενέργειες ίσες, ισχύει ότι $P' = \begin{bmatrix} 2E' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P'^2 = -4E'^2$
Επειδή το τετράγωνο της τετραορμής είναι αναλλοίωτο μέγεθος, προκύπτει ότι:

$$P'^2 = P^2 \Rightarrow 4E'^2 = 4E_1E_2\sin^2\varphi \Rightarrow E' = \sin\varphi\sqrt{E_1E_2}$$

Προφανώς η Ε΄ γίνεται μέγιστη για $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Άσκηση 9.3.14 *Έστω ένα σωματίδιο το οποίο έχει τετραορμή $p^\mu = mc(20,8,6,0)$ σε ένα σύστημα Σ, όπου m είναι κάποια σταθερά με μονάδες μάζας. Ποια είναι η μάζα του σωματιδίου; Ένας παρατηρητής Σ' κινείται με ταχύτητα $\vec{v} = 0.6c\,\hat{x}$. Υπολογίστε την ενέργεια του σωματιδίου που μετράει αυτός, καθώς και τη γωνία που σχηματίζει η τροχιά του σωματιδίου σε σχέση με τον άξονα x' στο Σ'.*

Λύση

Έστω Μ η μάζα του σωματιδίου. Γνωρίζουμε ότι $p^\mu p_\mu = -\mathrm{M}^2c^2$.
Ισχύει ότι $p^\mu = mc(20,8,6,0) \Rightarrow p_\mu = mc(-20,8,6,0)$
Επομένως, $p^\mu p_\mu = m^2c^2(-20^2+8^2+6^2) = -300m^2c^2$
Συνεπώς, $M^2 = 300m^2 \Rightarrow M = 10m\sqrt{3}$
Για τον παρατηρητή Σ΄ ισχύει ότι $\beta = 0.6$ και γ=5/4.
Επομένως ο πίνακας Lorentz που συνδέει τους δύο παρατηρητές είναι

$$\Lambda(v) = \begin{bmatrix} 5/4 & -3/4 & 0 & 0 \\ -3/4 & 5/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Η τετραορμή του σωματιδίου στο Σ΄ είναι

$$P' = \Lambda P = mc = \begin{bmatrix} 5/4 & -3/4 & 0 & 0 \\ -3/4 & 5/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = mc \begin{bmatrix} 19 \\ -5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως η ενέργεια του σωματιδίου στο Σ′ είναι $E' = 10mc^2$.
Η χωρική ορμή του σωματιδίου στο Σ′ είναι $\vec{p}' = mc(-5\hat{x}+6\hat{y}) \Rightarrow |\vec{p}'| = mc\sqrt{61}$
Για την γωνία φ που σχηματίζει η τροχιά του σωματιδίου σε σχέση με τον άξονα x' στο Σ' ισχύει ότι $\cos\varphi = \frac{-5}{\sqrt{61}}$ και $\sin\varphi = \frac{6}{\sqrt{61}}$.

Άσκηση 9.3.15 *Ένα διαστημόπλοιο αναχωρεί από ένα διαστημικό σταθμό κινούμενο κατά μήκος της κοσμικής γραμμής*

$$x = \frac{1}{b}\cosh(bc\tau) \quad , \quad ct = \frac{1}{b}sinh(bc\tau)$$

όπου b μια σταθερά και τ ο ιδιόχρονος του διαστημοπλοίου.

(α) Δείξτε ότι η παραπάνω κοσμική γραμμή είναι σε κάθε σημείο της χρονοειδής (υπολογίστε την τετραταχύτητα).

(β) Η τετραεπιτάχυνση του διαστημοπλοίου, είναι χωροειδές ή χρονοειδές τετρανυσμα;

(γ) Υποθέστε ότι κάθε δευτερόλεπτο από τη στιγμή της εκκίνησης του διαστημοπλοιου τ = t =0 , εκπέμπεται ένα φωτεινό σήμα προς την κατεύθυνση κίνησης του διαστημοπλοίου, από τη βάση εκτόξευσης του διαστημοπλοίου, η οποία βρίσκεται στην θέση $x = 1/b$.
Αποδείξτε ότι το πολύ $1/(b \cdot c \cdot 1sec)$ σήματα θα φθάσουν τελικά στο διαστημόπλοιο.

Λύση

(α) , (β) Για τις συνιστώσες της τετραταχύτητας και τετραεπιτάχυνσης ισχύει ότι:

$$u^0 = \frac{dct}{d\tau} = c\cosh(bc\tau) \quad \text{και} \quad u^1 = \frac{dx}{d\tau} = c\sinh(bc\tau)$$

$$\alpha^0 = \frac{du^0}{d\tau} = bc^2 sinh(bc\tau) \quad \text{και} \quad \alpha^1 = \frac{du^1}{d\tau} = bc^2\cosh(bc\tau)$$

Γιο το τετράγωνο της τετραταχύτητας και τετραεπιτάχυνσης ισχύει ότι:

$$u^\mu u_\mu = -(u^0)^2 + (u^1)^2 = -c^2\text{cosh}^2(bc\tau) + c^2 sinh^2(bc\tau) = -c^2 < 0$$

$$\alpha^\mu \alpha_\mu = -(\alpha^0)^2 + (\alpha^1)^2 = -b^2c^4 sinh^2(bc\tau) + b^2c^4 cosh^2(bc\tau) = b^2c^4 > 0$$

Άρα η τετραταχύτητα είναι χρονοειδές τετράνυσμα και η τετραεπιτάχυνση είναι χωροειδές.

(γ) Απαλείφοντας τον ιδιόχρονο από την εξίσωση της κοσμικής γραμμής του διαστημοπλοίου προκύπτει ότι

$$b^2x^2 - b^2c^2t^2 = 1 \Leftrightarrow x_\delta = \sqrt{b^{-2} + c^2t^2}$$

Το N^{στο} φωτόνιο εκπέμπεται την στιγμή N sec από την θέση x=1/b. Επομένως η εξίσωση κίνησης του N^{στου} φωτονίου είναι

$$x_\varphi = b^{-1} + c(t - N)$$

Το N^{στο} φωτόνιο συναντά το διαστημόπλοιο όταν:

$$x_\varphi = x_\delta \Leftrightarrow x_\varphi^2 = x_\delta^2 \Leftrightarrow \left[b^{-1} + c(t-N)\right]^2 = b^{-2} + c^2t^2$$

Επιλύοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς t βρίσκουμε ότι $t = \frac{N(2-bcN)}{2(1-bcN)}$. Πρέπει

$$t \geq N \Leftrightarrow \frac{2-bcN}{2(1-bcN)} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2-bcN}{2(1-bcN)} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{bcN}{2(1-bcN)} \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$bcN \leq 1 \Leftrightarrow N \leq \frac{1}{bc \cdot 1s}$$

Άσκηση 9.3.16 *Ένα φωτόνιο συχνότητας f στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ διαδίδεται κατά την αρνητική φορά του άξονα y του Σ. Ένας παρατηρητής Σ', ο οποίος κινείται κατά τον τυποποιημένο τρόπο (κατά μήκος του άξονα x) με ταχύτητα v, λαμβάνει το προαναφερθέν φωτόνιο.*

(α) Πόση είναι η συχνότητα του φωτονίου που θα μετρήσει ο Σ';

(β) Σε ποια διεύθυνση στο σύστημα του (του Σ') θα το παρατηρήσει να κινείται;

Λύση

Οι συνιστώσες της τετραορμής του φωτονίου στο Σ είναι:

$$[p^\mu] = \begin{bmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{bmatrix} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} E \\ 0 \\ -E \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{E}{c}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επειδή η τετραορμή είναι τετράνυσμα, ο νόμος μετασχηματισμού της είναι:

$$[p'^\mu] = \Lambda[p^\mu] = \frac{E}{c}\begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{E}{c}\begin{bmatrix} \gamma \\ -\gamma\beta \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως, η ενέργεια του φωτονίου στο Σ΄ είναι E$' = \gamma E \Leftrightarrow f' = \gamma f$.
Η χωρική ορμή του φωτονίου στο Σ΄ είναι $\vec{p}' = -\frac{\gamma E}{c}(\beta\hat{x} + \hat{y})$
Επομένως θα το παρατηρήσει να διαδίδεται κατά την διεύθυνση $\hat{n} = -\frac{\beta\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{\beta^2+1}}$.

Άσκηση 9.3.17 *Τα σωμάτια 1 και 2 με μάζες m_1, m_2 αντίστοιχα, κινούνται στο σύστημα του εργαστηρίου με 3-ορμές $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ αντίστοιχα. Το τετράγωνο της τετραορμής του συστήματος είναι*

$$S = ({p^\mu}_{(1)} + {p^\mu}_{(2)})(p_{(1)\,\mu} + p_{(2)\,\mu}) = -m_1^2c^2 - m_2^2c^2 + 2{p^\mu}_{(1)}p_{(2)\,\mu}$$

Να υπολογίσετε το μέτρο της σχετικής ταχύτητας του σωματιδίου 2 στο σύστημα ηρεμίας του 1, ως συνάρτηση των S, m_1, m_2.

Λύση

Έστω $\vec{v}$ η ταχύτητα του σωματιδίου 2 στο σύστημα Σ που το σωματίδιο 1 ηρεμεί. Για τις τετραορμές των δύο σωματιδίων και του συστήματος στο Σ ισχύει ότι:

$$P_{(1)} = m_1 \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_{(2)} = \gamma m_2 \begin{bmatrix} c \\ \vec{v} \end{bmatrix} \quad P = P_{(1)} + P_{(2)} = \begin{bmatrix} m_1c + \gamma m_2 c \\ \gamma m_2 \vec{v} \end{bmatrix}$$

με γ=γ(v). Επειδή το S είναι το τετράγωνο της τετραορμής του συστήματος ισχύει ότι:

$$S = u^\mu u_\mu = -(m_1c + \gamma m_2 c)^2 + \gamma^2 m_2^2 v^2 \Leftrightarrow \frac{S}{c^2} = -(m_1 + \gamma m_2)^2 + \gamma^2 m_2^2 \beta^2 \qquad (1)$$

Ισχύει ότι $\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \Rightarrow \beta^2 = \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2} \Rightarrow \beta^2\gamma^2 = \gamma^2 - 1$

Η σχέση (1) γίνεται: $\frac{S}{c^2} = -(m_1 + \gamma m_2)^2 + m_2^2(\gamma^2 - 1)$, η οποία είναι μια εξίσωση 2ου βαθμού από την οποία υπολογίζουμε το γ.

Άσκηση 9.3.18 *Παρατηρητές 1 και 2 με τετραταχύτητες $u_{(1)}$ και $u_{(2)}$, αντίστοιχα, παρατηρούν φωτόνιο τετραορμής p^μ.*

(α) Αποδείξτε ότι ο λόγος των συχνοτήτων f_1/f_2 του φωτονίου που παρατηρούν οι παρατηρητές στο ιδιοσύστημά τους είναι ίσος με $\frac{f_1}{f_2} = \frac{u^\mu_{(1)}p_\mu}{u^\mu_{(2)}p_\mu}$.

(β) Εάν η σχετική ταχύτητα του παρατηρητή 1 ως προς τον παρατηρητή 2 είναι $\vec{v}$ αποδείξτε [χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α)] τη σχέση Doppler που συνδέει τις συχνότητες που παρατηρούν οι δύο παρατηρητές για το φωτόνιο θεωρώντας ότι στο ιδιοσύστημα του 2 η γωνία μεταξύ της $\vec{v}$ και της κατεύθυνσης διάδοσης του φωτονίου είναι θ.

Λύση

(α) Επειδή το εσωτερικό γινόμενο $u^\mu p_\mu$ είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz μπορούμε να το υπολογίσουμε σε όποιο σύστημα μας διευκολύνει. Στο σύστημα ηρεμίας του παρατηρητή 1 η τετραταχύτητα $u_{(1)}$ και η τετραορμή του φωτονίου έχουν συνιστώσες $u^\mu_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $p^\mu = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_1 \\ \vec{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hf_1 \\ \vec{p}_1 \end{bmatrix}$. Επομένως για το εσωτερικό τους γινόμενο ισχύει ότι: $u^\mu_{(1)}p_\mu = -hf_1$.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $u^{\mu}_{(2)}p_{\mu} = -hf_2$

Διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο.

(β) Στο σύστημα ηρεμίας του παρατηρητή 2 οι τετραταχύτητες των δύο παρατηρητών και η τετραορμή του φωτονίου είναι:

$$u^{\mu}_{(1)} = \gamma(v)\begin{bmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{bmatrix}, \quad u^{\mu}_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p^{\mu} = \begin{bmatrix} p \\ \vec{p} \end{bmatrix}$$

Επομένως $u^{\mu}_{(1)}p_{\mu} = \gamma(v)(-p + \vec{p}\cdot\vec{v}) = -\gamma(v)p(1 - v\cos\theta)$ και $u^{\mu}_{(2)}p_{\mu} = -p$. Αντικαθιστώντας στο συμπέρασμα του πρώτου ερωτήματος προκύπτει ότι:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{u^{\mu}_{(1)}p_{\mu}}{u^{\mu}_{(2)}p_{\mu}} = \gamma(v)(1 - v\cos\theta)$$

Άσκηση 9.3.19 *Το αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ' κινείται κατά τον τυποποιημένο τρόπο ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ με ταχύτητα w. Μια ράβδος, η οποία έχει την διεύθυνση του άξονα x, κινείται παράλληλα προς τον άξονα x του Σ με σταθερή ταχύτητα v. Εάν L και L΄ είναι τα μήκη της ράβδου που μετρούν οι παρατηρητές των Σ και Σ' αντίστοιχα, αποδείξτε ότι* $L = [1 - \beta(v)\beta(u)]\gamma(w)L'$

Λύση

Έστω v΄ η ταχύτητα της ράβδου στο Σ΄, u και u΄ οι τετραταχύτητα της ράβδου στα Σ και Σ΄ αντιστοίχως και L_0 το μήκος της ράβδου στο σύστημα ηρεμίας της. Λόγω συστολής Lorentz ισχύει ότι $L = \frac{L_0}{\gamma(v)}$ και $L' = \frac{L_0}{\gamma(v')}$.

Διαιρώντας κατά μελή προκύπτει ότι: $L = L'\frac{\gamma(v')}{\gamma(v)}$ (1)

Για τις τετραταχύτητες u και u΄ ισχύει ότι:

$u = \gamma(v)\begin{bmatrix} c \\ v \end{bmatrix}$ και $u' = \gamma(v')\begin{bmatrix} c \\ v' \end{bmatrix}$

Επειδή η τετραταχύτητα είναι τετράνυσμα ισχύει ότι:

$$u' = \Lambda(w)u \Rightarrow \gamma(v')\begin{bmatrix} c \\ v' \end{bmatrix} = \gamma(w)\gamma(v)\begin{bmatrix} 1 & -\beta(w) \\ -\beta(w) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ v \end{bmatrix}$$

Εξισώνοντας τις 0 συνιστώσες των δύο μελών συμπεραίνουμε ότι:

$\gamma(v') = \gamma(w)\gamma(v)\left[1 - \beta(v)\beta(w)\right]$

Αντικαθιστώντας στην (1) καταλήγουμε τελικά στην σχέση:

$L = \gamma(w)\left[1 - \beta(v)\beta(w)\right]L'$

Άσκηση 9.3.20 *Σχετικιστικό υλικό σημείο P κινείται στο αδρανειακό σύστημα Σ έτσι ώστε το τετράνυσμα της θέσης x^{μ} να συνδέεται με την τετραεπιτάχυνση a^{μ} με τη σχέση :* $a^{\mu} = k^2x^{\mu}$

(α) Αποδείξτε ότι το P κινείται έτσι ώστε το τετράνυσμα της θέσης να είναι διαρκώς κάθετο στην τετραταχύτητα.

(β) Αποδείξτε ότι αν η κίνηση του σωματιδίου πραγματοποιείται μόνο στον x-άξονα και οι συναρτήσεις που δίνουν τη χωροχρονική θέση του σωματιδίου συναρτήσει του ιδιόχρονου είναι $ct = \mathrm{a}\cosh(\mathrm{k}\tau) + \mathrm{b}\sinh(\mathrm{k}\tau)$, $x = b\cosh(k\tau) + \mathrm{a}\sinh(\mathrm{k}\tau)$ *τότε* $a^\mu = k^2 x^\mu$.

(γ) Επειδή η παράμετρος τ είναι ο ιδιόχρονος οι σταθερές a, b δεν είναι ανεξάρτητες. Ποιά σχέση τις συνδέει;

(δ) Αν το P εκκινεί από την ηρεμία την στιγμή t=0, από το σημείο x_0 *του άξονα x, υπολογίστε την εξίσωση κίνησης του P και σχεδιάστε την σε διάγραμμα x - t .*

Λύση

(α) Σε κάθε περίπτωση κίνησης υλικού σημείου η τετραεπιτάχυνση είναι κάθετη στην τετραταχύτητα. Στην περίπτωσή μας η τετραεπιτάχυνση είναι συγγραμμική με την χωροχρονική θέση. Επομένως η θέση είναι κάθετη στην τετραταχύτητα.

(β) Για την τετραταχύτητα ισχύει ότι:

$$u^0 = \frac{cdt}{dt} = k\left[\mathrm{a}\sinh(\mathrm{k}\tau) + \mathrm{b}\cosh(\mathrm{k}\tau)\right]$$
$$u^1 = \frac{dx}{d\tau} = k\left[b\sinh(k\tau) + \mathrm{a}\cosh(\mathrm{k}\tau)\right]$$

Παραγωγίζοντας την τετραταχύτητα ως προς τον ιδιόχρονο υπολογίζουμε την τετραεπιτάχυνση.

$$a^0 = \frac{du^0}{dt} = k^2\left[\mathrm{a}\cosh(\mathrm{k}\tau) + \mathrm{b}\sinh(\mathrm{k}\tau)\right] = k^2 x^0$$

$$a^1 = \frac{du^1}{d\tau} = k^2\left[b\cosh(k\tau) + \mathrm{a}\sinh(\mathrm{k}\tau)\right] = k^2 x^1$$

(γ) Σύμφωνα με τα δεδομένα $cdt = [ka\sinh(k\tau) + kb\cosh(k\tau)]\, d\tau$ και $dx = [kb\sinh(k\tau) + ka\cosh(k\tau)]\, d\tau$.

Για το στοιχείο μήκους προκύπτει ότι:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 = -k^2\left[\mathrm{a}\sinh(\mathrm{k}\tau) + \mathrm{b}\cosh(\mathrm{k}\tau)\right] d\tau^2 +$$
$$k^2[b\sinh(k\tau) + \mathrm{a}\cosh(\mathrm{k}\tau)]^2 d\tau^2 \Rightarrow$$
$$ds^2 = -k^2(b^2 - \mathrm{a}^2)d\tau^2 \Rightarrow c^2d\tau^2 = k^2(b^2 - \mathrm{a}^2)d\tau^2 \Rightarrow k^2(b^2 - \mathrm{a}^2) = c^2$$

(δ) Για t=0 είναι $x = x_0$. Επομένως
$\mathrm{a}\cosh(\mathrm{k}\tau) + \mathrm{b}\sinh(\mathrm{k}\tau) = 0 \Rightarrow \tanh(\mathrm{k}\tau) = 0 \Rightarrow \tau = 0$ και $x_0 = b$.
Επίσης πρέπει $u^1 = 0 \Rightarrow k\left[b\sinh(0) + \mathrm{a}\cosh(0)\right] = 0 \Rightarrow \mathrm{a} = 0$.
Από την σχέση των a, b του (γ) ερωτήματος και το γεγονός ότι a=0 προκύπτει ότι

$k^2(b^2 - \mathrm{a}^2) = c^2 \Rightarrow kb = c \Rightarrow kx_0 = c$
Η εξίσωση της χωροχρονικής θέσης γίνεται: $ct = b\sinh(k\tau)$, $x = b\cosh(k\tau)$
Επειδή $\cosh^2(k\tau) - \sinh^2(k\tau) = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{b^2} - \frac{c^2t^2}{b^2} = 1$, η εξίσωση αυτή σε επίπεδο x- ct είναι υπερβολή.

9.4 Τανυστικός λογισμός

Άσκηση 9.4.1 *(α) Κατασκευάστε ένα μη φωτοειδές ανταλλοίωτο τετράνυσμα A^μ με δύο από τις χωρικές συνιστώσες ίσες με μηδέν και βρείτε τι είδους τετράνυσμα είναι αυτό (χωροειδές ή χρονοειδές).*

(β) Κατασκευάστε τώρα το συναλλοίωτο τετράνυσμα A_μ και υπολογίστε την ποσότητα $A^\mu A_\mu$.

(γ) Μπορείτε να βρείτε ένα μετασχηματισμό Lorentz που να καθιστά άλλη μια συνιστώσα του Αμ ίση με μηδέν; Κατασκευάστε τον πίνακα του μετασχηματισμού αυτού.

(δ) Κατασκευάστε τον τανυστή δεύτερης τάξης $C^{\mu\nu} = A^\mu A^\nu$ και υπολογίστε το C^μ_ν.

(ε) Ποια η μορφή του τανυστή C΄μν στο σύστημα αναφοράς που σχετίζεται με τον μετασχηματισμό Lorentz του ερωτήματος (γ);

Λύση

(α) Θεωρούμε το τετράνυσμα $A = [\mathrm{A}^\mu] = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ισχύει ότι $-(\mathrm{A}^0)^2 + (\mathrm{A}^1)^2 + (\mathrm{A}^2)^2 + (\mathrm{A}^3)^2 = -25 + 9 = -16 < 0$. Επομένως το Α είναι χρονοειδές.

(β) Ισχύει ότι $\mathrm{A}_\mu = \eta_{\mu\nu}\mathrm{A}^\nu \Rightarrow [\mathrm{A}_\mu] = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

και $A^\mu A_\mu = 5(-5) + 3 \cdot 3 = -16$.

(γ) Το εσωτερικό γινόμενο $A^\mu A_\mu$ είναι αναλλοίωτο. Επομένως σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα αναφοράς Σ΄ θα ισχύει

$$A'^\mu A'_\mu = -(A'^0)^2 + (A'^1)^2 + (A'^2)^2 + (A'^3)^2 = -16$$

Συνεπώς δεν είναι δυνατόν να μηδενίσουμε το $A'^{\,0}$.

Κάτω από μια προώθηση Lorentz κατά μήκος του x άξονα οι συνιστώσες του Α μετασχηματίζονται όπως οι συντεταγμένες. Επομένως $A'^1 = \gamma(A^1 - vA^0)$.

Για να μηδενίσουμε το A'^1 αρκεί να διαλέξουμε $v = \frac{A^1}{A^0} = \frac{3}{5} \Rightarrow \gamma = \frac{5}{4}$.
Άρα ο πίνακας του μετασχηματισμού Lorentz είναι ο

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 & -0.75 & 0 & 0 \\ -0.75 & 1.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ισχύει ότι

$$A' = \Lambda A = \begin{bmatrix} 1.25 & -0.75 & 0 & 0 \\ -0.75 & 1.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(δ)

$$[C^{\mu\nu}] = AA^T = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 15 & 0 & 0 \\ 15 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^\mu{}_\nu = C^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu} \Rightarrow [C^\mu{}_\nu] = \begin{bmatrix} 25 & 15 & 0 & 0 \\ 15 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 & 15 & 0 & 0 \\ -15 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(ε) Ισχύει ότι

$$C'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta C^{\alpha\beta} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta A^\alpha A^\beta = A'^\mu A'^\nu \Rightarrow$$

$$[C'^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Σχόλιο</u>

Ας υποθέσουμε ότι το αρχικό τετράνυσμα ήταν το $A = [\mathrm{A}^\mu] = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, για το οποίο ισχύει ότι $\mathrm{A}^\mu A_\mu = -(\mathrm{A}^0)^2 + (\mathrm{A}^1)^2 = 16$. Επομένως είναι χωροειδές. Αν θεωρήσουμε μια προώθηση Lorentz κατά μήκος του x άξονα, τότε
$-(\mathrm{A}'^0)^2 + (\mathrm{A}'^1)^2 = \mathrm{A}'^\mu A'_\mu = \mathrm{A}^\mu A_\mu = 16$.
Επομένως δεν είναι δυνατόν να μηδενίσουμε το χωρικό του μέρος. Μπορούμε όμως να μηδενίσουμε το χρονικό. Πράγματι ισχύει ότι $A'^0 = \gamma(A^0 - vA^1)$.
Επιλέγοντας $v = \frac{A^0}{A^1}$ επιτυγχάνουμε $A'^0 = 0$.

Άσκηση 9.4.2 *Στο αδρανειακό σύστημα Σ το τετράνυσμα A^μ έχει συνιστώσες:* $A^\mu = \begin{bmatrix} A^0 \\ \vec{A} \end{bmatrix}$.

(α) Υποθέτοντας ότι το A^μ είναι χρονοειδές υπολογίστε την ταχύτητα ενός συστήματος Σ' στο οποίο το A δεν έχει χωρικές συνιστώσες.

(β) Υπάρχει τέτοια ταχύτητα όταν το A είναι χωροειδές;

Λύση

Επειδή το τετράνυσμα A δεν έχει χωρικές συνιστώσες στο Σ′, η μορφή του στο Σ′ είναι $A'^\mu = \begin{bmatrix} A'^0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
Επειδή το A είναι ανταλλοίωτο τετράνυσμα, οι συνιστώσες του στο Σ′ συνδέονται με τις συνιστώσες του στο Σ σύμφωνα με την σχέση

$$\begin{aligned} &A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A'^0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta^T \\ -\gamma\beta & I + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta\beta^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^0 \\ \vec{A} \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &-\gamma\vec{\beta}A^0 + \vec{A} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{A}) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Από την (1) συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{A}$. Αντικαθιστώντας στην (1) $\vec{\beta} = \lambda\vec{A}$ προκύπτει ότι πρέπει να είναι:

$$-\gamma\lambda A^0\vec{A} + \vec{A} + \frac{\gamma-1}{\lambda^2 A^2}\lambda^2\vec{A}(A^2) = 0 \Rightarrow -\gamma\lambda A^0 + 1 + \gamma - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{A^0}$$

Επομένως $\vec{\beta} = \frac{\vec{A}}{A^0}$.
Επειδή το A είναι χρονοειδές ισχύει ότι:

$$A^\mu A_\mu < 0 \Rightarrow -(A^0)^2 + \vec{A}^2 < 0 \Rightarrow \vec{A}^2 < (A^0)^2 \Rightarrow |\vec{A}| < |A^0| \Rightarrow |\vec{\beta}| < 1$$

(β) Αν το A είναι χωροειδές τότε $A^\mu A_\mu > 0 \Rightarrow |\vec{\beta}| > 1$. Επομένως, δεν υπάρχει ταχύτητα για την οποία να μην έχει χωρικές συνιστώσες.

Άσκηση 9.4.3 *Θεωρήστε ένα τυχαίο ανταλλοίωτο τετράνυσμα. Εκτελέστε πάνω του δύο αλλεπάλληλους τυποποιημένους μετασχηματισμούς Lorentz. Τη μια φορά πρώτα κατά τον x και μετά κατά τον y και τη δεύτερη φορά πρώτα κατά τον y και μετά κατά τον x. Θεωρήστε κοινή ταχύτητα β για όλους τους μετασχηματισμούς. Στο όριο της πολύ μικρής ταχύτητας β τα δύο τελικά τετρανύσματα (μετά τους μετασχηματισμούς) έχουν τίποτε κοινό; Οι χωρικές τους συνιστώσες διαφέρουν; Σε τι;*

Λύση

Έστω ότι ο πίνακας συνιστωσών του τετρανύσματος είναι ο $A = \begin{bmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$.
Κάτω από ένα μετασχηματισμό Lorentz L, το A μετασχηματίζεται ως $A' = LA$.

Την 1η φορά

$$L = L_{(y)}L_{(x)} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$L = \begin{bmatrix} \gamma^2 & -\gamma^2\beta & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ -\gamma^2\beta & \gamma^2\beta^2 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$A' = LA = \begin{bmatrix} \gamma^2 & -\gamma^2\beta & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ -\gamma^2\beta & \gamma^2\beta^2 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^2 a^0 - \gamma^2\beta a^1 - \gamma\beta a^2 \\ -\gamma\beta a^0 + \gamma a^1 \\ -\gamma^2\beta a^0 + \gamma^2\beta^2 a^1 + \gamma a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$$

Την 2η φορά

$$L = L_{(x)}L_{(y)} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$L = \begin{bmatrix} \gamma^2 & -\gamma\beta & -\gamma^2\beta & 0 \\ -\gamma^2\beta & \gamma & \gamma^2\beta^2 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A'' = LA = \begin{bmatrix} \gamma^2 & -\gamma\beta & -\gamma^2\beta & 0 \\ -\gamma^2\beta & \gamma & \gamma^2\beta^2 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^2 a^0 - \gamma\beta a^1 - \gamma^2\beta a^2 \\ -\gamma^2\beta a^0 + \gamma a^1 + \gamma^2\beta^2 a^2 \\ -\gamma\beta a^0 + \gamma a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor ως προς β και κρατώντας όρους μέχρι πρώτης τάξεως, προκύπτει ότι $\gamma \simeq 1$. Επομένως

$$A' \simeq \begin{bmatrix} a^0 - \beta a^1 - \beta a^2 \\ -\beta a^0 + a^1 \\ -\beta a^0 + a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A'' \simeq \begin{bmatrix} a^0 - \beta a^1 - \beta a^2 \\ -\beta a^0 + a^1 \\ -\beta a^0 + a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι τα μετασχηματισμένα διανύσματα είναι διαφορετικά. Διαφέρουν τόσο στο «χρονικό τμήμα τους» όσο και στο χωρικό. Σε πρώτη τάξη ως προς β ο νόμος μετασχηματισμού του χωρικού μέρους είναι ο μετασχηματισμός Γαλιλαίου.

Άσκηση 9.4.4 *Σε ένα αδρανειακό σύστημα Σ με συντεταγμένες (t, x, y, z) ο τελεστής του D' Alembert ορίζεται ως:*

$$\Box^2 = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \quad \textit{όπου} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Θεωρήστε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα Σ' το οποίο συνδέεται με το Σ με ένα μετασχηματισμό προώθησης κατά μήκος του κοινού άξονα xx' με παράγοντα β και αποδείξτε ότι ο τελεστής του D' Alembert είναι συναλλοίωτος, δηλαδή ισχύει: $\Box'^2 = \Box^2$

Λύση

Ο μετασχηματισμός συντεταγμένων είναι:

$t = \gamma(t' + vx')$

$x = \gamma(x' + vt')$

$y = y'$

Για τους διαφορικούς τελεστές ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial t}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} = \gamma v\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \\
\frac{\partial^2}{\partial x'^2} &= \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x'} = \gamma^2\left(v\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(v\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \Rightarrow \\
\frac{\partial^2}{\partial x'^2} &= \gamma^2\left(v^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2v\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t'} &= \frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x} = \gamma\frac{\partial}{\partial t} + \gamma v\frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \\
\frac{\partial^2}{\partial t'^2} &= \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t'} = \gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right) \Rightarrow \\
\frac{\partial^2}{\partial t'^2} &= \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t'} = \gamma^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2v\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z'^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Αντικαθιστώντας στον τελεστή του D' Alembert προκύπτει ότι:

$$\Box'^2 = -\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \nabla'^2 = -\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \Rightarrow$$
$$\Box'^2 = \gamma^2\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + v^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Rightarrow$$
$$\Box'^2 = \gamma^2(1-v^2)\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Rightarrow$$
$$\Box'^2 = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Box^2$$

Άσκηση 9.4.5 *Στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ (txyz) δίνεται το διανυσματικό πεδίο*

$$[C^\mu]^T = \begin{bmatrix} e^{t-x} & e^{t-x} & x & x^2 \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε την απόκλιση του πεδίου $C'^\mu{}_{,\mu} = \frac{\partial C'^\mu}{\partial x'^\mu}$ *στο Σ΄(t'x'y'z΄) όταν το δεύτερο κινείται ως προς το πρώτο κατά τον τυποποιημένο τρόπο με ταχύτητα v = 2c/3.*

Λύση

Ως προς μετασχηματισμούς Lorentz η παράγωγος ένα διανύσματος είναι τανυστής 2ης τάξης. Επομένως η συναίρεση ανταλλοίωτου και συναλλοιώτου δείκτη είναι αναλλοίωτο. Συνεπώς

$$C'^\mu{}_{,\mu} = C^\mu{}_{,\mu} = \frac{\partial C^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial C^0}{\partial t} + \frac{\partial C^1}{\partial x} + \frac{\partial C^2}{\partial y} + \frac{\partial C^3}{\partial z} = e^{t-x} - e^{t-x} = 0$$

Άσκηση 9.4.6 *Θεωρήστε το μετασχηματισμό συντεταγμένων* $(t, x) \to (u, v)$ *μέσω των σχέσεων:*

$$u = \frac{t+x}{\sqrt{2}} \quad , \quad v = \frac{t-x}{\sqrt{2}}$$

(α) Υπολογίστε το στοιχείο μήκους $ds^2 = -dt^2 + dx^2$ *στις νέες συντεταγμένες.*

(β) Ένα διάνυσμα στις συντεταγμένες (t,x) έχει συνιστώσες $A_t = A_x = 2\sqrt{2}$. *Ποιες είναι οι συνιστώσες του διανύσματος στις συντεταγμένες (u, v); Πόσο είναι το Ευκλείδειο μέτρο και πόσο το μέτρο Minkowski του διανύσματος A;*

(γ) Γράψτε την κυματική εξίσωση $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Phi(x,t) = 0$ *στις συντεταγμένες (u, v). Τι συνάγετε όσον αφορά στις λύσεις της εξίσωσης;*

Λύση

(α) Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό (λύνοντας ως προς x, t) προκύπτει ότι: $t = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$ και $x = \frac{u-v}{\sqrt{2}}$
Διαφορίζοντας τις ανωτέρω προκύπτει ότι: $dt = \frac{du+dv}{\sqrt{2}}$ και $dx = \frac{du-dv}{\sqrt{2}}$.
Αντικαθιστούμε στο στοιχείο μήκους:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 = -\frac{(du+dv)^2}{2} + \frac{(du-dv)^2}{2} = -2dudv$$

(β) Το γεγονός ότι άλλαξε μορφή η έκφραση για το στοιχείο μήκους σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός συντεταγμένων δεν είναι Lorentz. Θέτοντας $(t, x) = (x^0, x^1)$ και $(u, v) = (x'^0, x'^1)$ ο νόμος μετασχηματισμού του συναλλοίωτου διανύσματος A_μ είναι: $A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\mathrm{A}_\nu$. Επομένως

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\mathrm{A}_\nu \Rightarrow \mathrm{A}_u = \frac{\partial t}{\partial u}\mathrm{A}_t + \frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{A}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}2\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}2\sqrt{2} = 4$$

και

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\mathrm{A}_\nu \Rightarrow \mathrm{A}_v = \frac{\partial t}{\partial v}\mathrm{A}_t + \frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{A}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}2\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}2\sqrt{2} = 0$$

Το Ευκλείδειο μέτρο του διανύσματος είναι $\sqrt{A_t^2 + A_x^2} = 4$ και το μέτρο Minkowski είναι $\sqrt{-A_t^2 + A_x^2} = 0$.

(γ) Για τους τελεστές παραγώγισης ισχύει ότι

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right) \Rightarrow$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\right)$$

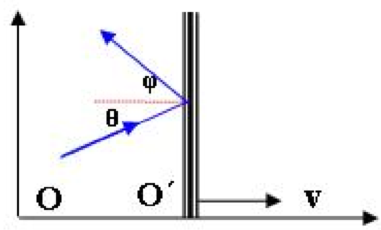
$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right) \Rightarrow$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\right)$$

Η κυματική εξίσωση $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Phi = 0$ γίνεται $2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} = 0$.
Επομένως οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης είναι της μορφής

$\Phi = \Phi_1(u) + \Phi_2(v) = F(t+x) + G(t-x)$

9.5 Διατήρηση ορμής - ενέργειας

Άσκηση 9.5.1 *Ένας καθρέπτης κινείται με ταχύτητα v (στο σύστημα εργαστηρίου) κάθετη στο επίπεδό του. Μια μονοχρωματική δέσμη φωτονίων προσπίπτει στον καθρέπτη με γωνία πρόσπτωσης θ (στο σύστημα εργαστηρίου). Να βρεθούν*
A) Η γωνία ανάκλασης φ
B) Η ενέργεια E΄ του φωτονίου μετά την ανάκλαση



Λύση

Η τετραορμή του φωτονίου στο σύστημα εργαστηρίου πριν την ανάκλαση είναι:

$$P_{\pi\rho\iota\nu} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} E \\ E\cos\theta \\ E\sin\theta \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Lorentz υπολογίζουμε την τετραορμή του φωτονίου πριν την ανάκλαση στο σύστημα ηρεμίας του καθρέπτη:

$$P'_{\pi\rho\iota\nu} = \Lambda(\upsilon)P_{\pi\rho\iota\nu} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E \\ E\cos\theta \\ E\sin\theta \end{bmatrix} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} \gamma E(1-\beta\cos\theta) \\ \gamma E(\cos\theta-\beta) \\ E\sin\theta \end{bmatrix}$$

Στο σύστημα ηρεμίας του καθρέπτη, κατά την ανάκλαση η ενέργεια του φωτονίου δεν μεταβάλλεται, η παράλληλη στον καθρέπτη συνιστώσα της ορμής δεν μεταβάλλεται και η κάθετη σε αυτόν συνιστώσα αντιστρέφεται. Επομένως η τετραορμή του φωτονίου στο σύστημα ηρεμίας του καθρέπτη μετά την ανάκλαση είναι:

$$P'_{\mu\varepsilon\tau\alpha} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} \gamma E(1-\beta\cos\theta) \\ -\gamma E(\cos\theta-\beta) \\ E\sin\theta \end{bmatrix}$$

Επιστρέφοντας στο σύστημα εργαστηρίου

$$P_{\mu\epsilon\tau\alpha} = \Lambda(-\upsilon)P'_{\mu\epsilon\tau\alpha} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma E(1-\beta\cos\theta) \\ -\gamma E(\cos\theta-\beta) \\ E\sin\theta \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{c}\begin{bmatrix} \gamma^2 E(1+\beta^2-2\beta\cos\theta) \\ \gamma^2 E(2\beta-\beta^2\cos\theta-\cos\theta) \\ E\sin\theta \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{c}\begin{bmatrix} \mathrm{E}' \\ \mathrm{E}'\cos\phi \\ \mathrm{E}'\sin\phi \end{bmatrix} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} \gamma^2 E(1+\beta^2-2\beta\cos\theta) \\ \gamma^2 E(2\beta-\beta^2\cos\theta-\cos\theta) \\ E\sin\theta \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathrm{E}' = \frac{E(1+\beta^2-2\beta\cos\theta)}{1-\beta^2} \quad \text{και} \quad \tan\phi = \frac{\sin\theta}{\gamma^2(2\beta-\beta^2\cos\theta-\cos\theta)}$$

Άσκηση 9.5.2 *Ένα φωτόνιο με ενέργεια hf συγκρούεται με ένα διεγερμένο άτομο ακίνητο στο σύστημα εργαστηρίου . Μετά την κρούση το φωτόνιο έχει πάλι ενέργεια hf αλλά διεύθυνση αντίθετη προς την αρχική και το άτομο βρίσκεται στην βασική του κατάσταση. Να βρεθεί η ενέργεια διέγερσης του ατόμου στη διεγερμένη κατάσταση. Δίνεται η ενέργεια ηρεμίας E_0 στην βασική κατάσταση και η συχνότητα f.*

Λύση

Έστω $E_{0\Delta}$ η ενέργεια ηρεμίας της διεγερμένης κατάστασης, E^* η ενέργεια διέγερσης, p και E η ενέργεια και η ορμή του ατόμου μετά την κρούση. Προφανώς η ενέργεια διέγερσης είναι: $E^* = E_{0\Delta} - E_0$. Η αρχική και τελική τετραορμή του συστήματος φωτόνιο- άτομο είναι:

$$P_{\alpha\rho\chi} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E}_{0\Delta}+hf}{c} \\ \frac{hf}{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E}_0+E^*+hf}{c} \\ \frac{hf}{c} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P_{\tau\epsilon\lambda} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E}+hf}{c} \\ \frac{-hf}{c}+p \end{bmatrix}$$

Από την αρχή διατήρησης της τετραορμής συμπεραίνουμε ότι:

$\mathrm{E}_0 + \mathrm{E}^* = \mathrm{E}$ (1)

$2hf = pc$ (2)

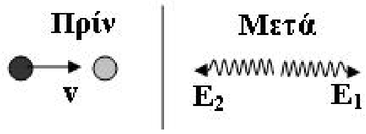
Από την σχέση ενέργειας ορμής για το άτομο μετά την κρούση προκύπτει ότι:

$E^2 = p^2c^2 + E_0^2$ (3)

Αντικαθιστώντας τις (1) και (2) στην (3) βρίσκουμε την E^*.

$E^* = \sqrt{(2hf)^2 + E_0^2} - E_0$

Άσκηση 9.5.3 *Ποζιτρόνιο με ταχύτητα v = 0.8c συγκρούεται και εξαϋλώνεται με ακίνητο ηλεκτρόνιο και παράγονται δύο φωτόνια που κινούνται σε αντίθετες διευθύνσεις πάνω στην ευθεία κίνησης του αρχικού ποζιτρονίου. Να βρεθούν οι ενέργειες των φωτονίων. Δίνεται η ενέργεια ηρεμίας του ηλεκτρονίου* E_0.



Λύση

Το ποζιτρόνιο και το ηλεκτρόνιο έχουν την ίδια ενέργεια ηρεμίας E_0. Έστω E_1 και E_2 οι ενέργειες των δύο φωτονίων που παράγονται.
Υπολογίζουμε τον παράγοντα γ για το ποζιτρόνιο: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}} = \frac{5}{3}$
Η αρχική και τελική τετραορμή του συστήματος είναι:

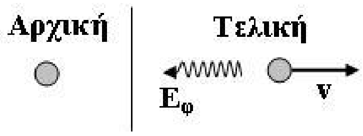
$$P_{\alpha\rho\chi} = \begin{bmatrix} \gamma mc + mc \\ \gamma mv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3}mc \\ \frac{4}{3}mc \end{bmatrix} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} \frac{8}{3}E_0 \\ \frac{4}{3}E_0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} E_1 + E_2 \\ E_1 - E_2 \end{bmatrix}$$

Επειδή η τετραορμή διατηρείται ισχύει ότι:
$E_1 + E_2 = \frac{8}{3}E_0$
$E_1 - E_2 = \frac{4}{3}E_0$
Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι: $E_1 = 2E_0$ και $E_2 = \frac{2}{3}E_0$.

Άσκηση 9.5.4 *Ένας «φωτονικός» πύραυλος χρησιμοποιεί ακτινοβολία σαν προωθητικό μέσο. Εάν η αρχική και η τελική μάζα ηρεμίας είναι* m_i *και* m_f *αντιστοίχως, να αποδειχθεί ότι η τελική ταχύτητα v του πυραύλου ως προς το αρχικό αδρανειακό σύστημα δίδεται από την σχέση :*

$$\frac{m_i}{m_f} = \left[\frac{c+v}{c-v}\right]^{1/2}$$

.
Δίνεται αρχική ταχύτητα ίση με μηδέν



Λύση

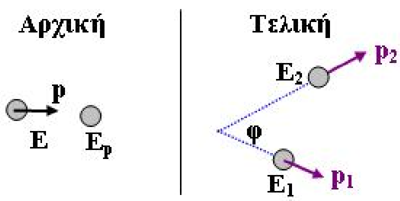
Η αρχική και τελική τετραορμή του συστήματος είναι αντίστοιχα:

$$P_{\alpha\rho\chi} = \begin{bmatrix} m_i c \\ 0 \end{bmatrix} \qquad P_{\tau\epsilon\lambda} = \begin{bmatrix} \gamma m_f c + p_\phi \\ \gamma m_f v - p_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma m_f c + p_\phi \\ \gamma m_f \beta c - p_\phi \end{bmatrix}$$

Επειδή η τετραορμή μένει σταθερή:
$m_i c = \gamma m_f c + p_\phi$
$0 = \gamma m_f \beta c - p_\phi$
Προσθέτοντας τις δύο εξισώσεις κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$m_i = \gamma(1+\beta) m_f \Rightarrow \frac{m_i}{m_f} = \frac{\beta+1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta+1}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \Rightarrow$$
$$\frac{m_i}{m_f} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

Άσκηση 9.5.5 *Ένα πρωτόνιο με κινητική ενέργεια K=437 MeV συγκρούεται ελαστικά με ακίνητο πρωτόνιο. Αν οι ενέργειες των δύο πρωτονίων μετά την κρούση είναι ίσες να βρεθεί η σχετική τους γωνία. Δίνεται η ενέργεια ηρεμίας του πρωτονίου* .



Λύση

Έστω p και E η αρχική ορμή και ενέργεια του κινούμενου πρωτονίου, p_1, p_2 , E_1, E_2 οι ορμές και οι ενέργειες των δύο πρωτονίων μετά την κροούση.

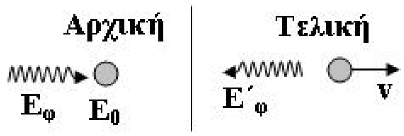
Είναι E=Ep+K

Οι τετραορμή του συστήματος πριν και μετά την κρούση είναι αντίστοιχα:

$$P_{\pi\rho\iota\nu} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}+\mathrm{E}_p \\ \vec{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K+2\mathrm{E}_p \\ \vec{p} \end{bmatrix} \qquad P_{\mu\epsilon\tau\alpha} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_1+\mathrm{E}_2 \\ \vec{p}_1+\vec{p}_2 \end{bmatrix}$$

Από την σχέση ενέργειας ορμής για το αρχικά κινούμενο πρωτόνιο προκύπτει ότι:
$p^2c^2 = E^2 - E_p^2 = (K+E_p)^2 - E_p^2 = K(K+2E_p)$ (1)
Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας προκύπτει ότι:
$E_1 = E_2 = E_p + \frac{K}{2}$
Από την σχέση ενέργειας ορμής για τα πρωτόνια μετά την κρούση έχουμε:
$p_1^2c^2 = p_2^2c^2 = E_1^2 - E_p^2 = (E_p + \frac{K}{2})^2 - E_p^2 = K(\frac{K}{2} + E_p)$ (2)
Από την αρχή διατήρησης της ορμής:
$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\phi \Rightarrow p^2c^2 = 2p_1^2c^2(1+\cos\phi)$ (3)
Αντικαθιστώντας τις (1) και (2) στην (3) συμπεραίνουμε τελικά ότι:
$\cos\phi = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}+4\mathrm{E}_p} = 0.104$

Άσκηση 9.5.6 *Ένα φωτόνιο ενέργειας 100KeV σκεδάζεται από ακίνητο ελεύθερο ηλεκτρόνιο με γωνία* 180^0. *Να βρεθεί η ταχύτητα του ανακρούοντος ηλεκτρονίου. Δίνεται η ενέργεια ηρεμίας του ηλεκτρονίου* $E_0 = 511KeV$.



Λύση

Έστω p και E η ορμή και η ενέργεια του ηλεκτρονίου μετά την κρούση , Eφ και E΄φ η ενέργεια του φωτονίου πριν και μετά την κρούση αντίστοιχα. Η τετραορμή του συστήματος πριν και μετά την κρούση είναι αντίστοιχα:

$$P_{\alpha\rho\chi} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E}_\phi + \mathrm{E}_0}{c} \\ \frac{E_\phi}{c} \end{bmatrix} \qquad P_{\tau\varepsilon\lambda} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{E} + \mathrm{E}'_\phi}{c} \\ p - \frac{\mathrm{E}'_\phi}{c} \end{bmatrix}$$

Από την διατήρηση της τετραορμής προκύπτει:

$\mathrm{E}_\phi + \mathrm{E}_0 = \mathrm{E} + \mathrm{E}'_\phi$

$\mathrm{E}_\phi = pc - \mathrm{E}'_\phi$

Με πρόσθεση κατά μέλη των παραπάνω εξισώσεων καταλήγουμε στην:

$2E_\phi + E_0 = E + pc$ (1)

Θέτουμε $E_1 = 2E_\phi + E_0 = 711KeV$

Α τρόπος

Έχουμε το σύστημα: $\begin{bmatrix} \mathrm{E}_1 = \mathrm{E} + pc \\ E^2 = (pc)^2 + E_0^2 \end{bmatrix}$

Η λύση του παραπάνω συστήματος είναι: $\begin{bmatrix} E = \frac{E_1^2 + E_0^2}{2E_1} \\ pc = \frac{E_1^2 - E_0^2}{2E_1} \end{bmatrix}$

Όμως $\begin{bmatrix} E = \gamma mc^2 \\ pc = \gamma mcv \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{pc}{E} = \beta \Rightarrow \beta = \frac{\mathrm{E}_1^2 - \mathrm{E}_0^2}{\mathrm{E}_1^2 + \mathrm{E}_0^2} = 0.319$

Β Τρόπος

Η εξίσωση (1) γίνεται:

$$E_1 = \gamma mc^2 + \gamma mcv \Rightarrow E_1 = \gamma mc^2 + \gamma mc^2\beta = \gamma\mathrm{E}_0(1+\beta) = \mathrm{E}_0\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow$$

$$\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \Rightarrow \beta = 0.319$$

Άσκηση 9.5.7 *Δύο φωτόνια συχνότητας f το καθένα, τα οποία κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις, απορροφώνται από σωματίδιο μάζας m το οποίο αρχικά ηρεμεί* *στο εργαστήριο. Λόγω της απορρόφησης, το σωματίδιο μεταβαίνει σε μια διεγερμένη κατάσταση και στη συνέχεια αποδιεγείρεται αυθόρμητα εκπέμποντας ένα μόνο φωτόνιο.*

(α) Να υπολογιστεί η μάζα M του διεγερμένου σωματιδίου.

(β) Να υπολογιστεί η συχνότητα του εκπεμπόμενου φωτονίου κατά την αποδιέγερση του σωματιδίου.

(γ) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σωματιδίου στο εργαστήριο μετά την αποδιέγερση.

Λύση

(α) Έστω $P_{\phi 1}$, $P_{\sigma 1}$ οι τετραορμές των δύο φωτονίων και του σωματιδίου αντιστοίχως πριν την απορρόφηση, $P_{\sigma 2}$ η τετραορμή του σωματιδίου μετά την απορρόφηση και $P_{\phi 3}$, $P_{\sigma 3}$ οι τετραορμές φωτονίου και σωματιδίου μετά την αποδιέγερση. Ισχύει ότι $P_{\varphi 1} = \begin{bmatrix} 2hf \\ 0 \end{bmatrix}$ και $P_{\sigma 1} = \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}$.
Επειδή η χωρική ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή, συμπεραίνουμε ότι η χωρική ορμή του σωματιδίου μετά την απορρόφηση θα είναι μηδέν.
Επομένως, $P_{\sigma 2} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix}$.
Από την διατήρηση της ενέργειας συμπεραίνουμε ότι $M = m + 2hf$.

(β) Έστω E΄, p΄ η ενέργεια και η ορμή του σωματιδίου μετά την αποδιέγερση. Ισχύει ότι

$$P_{\varphi 3} = \begin{bmatrix} hf' \\ hf' \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P_{\sigma 3} = \begin{bmatrix} E' \\ p' \end{bmatrix}$$

Επειδή η τετραορμή παραμένει σταθερή προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} &P_{\sigma 2} = P_{\sigma 3} + P_{\varphi 3} \Rightarrow P_{\sigma 2} - P_{\sigma 3} = P_{\varphi 3} \Rightarrow (P_{\sigma 2} - P_{\sigma 3})^2 = P_{\varphi 3}^2 \Rightarrow \\ &P_{\sigma 2}^2 + P_{\sigma 3}^2 - 2P_{\sigma 2}P_{\sigma 3} = 0 \Rightarrow M^2 + m^2 + 2P_{\sigma 2}P_{\sigma 3} = 0 \Rightarrow \\ &M^2 + m^2 - 2ME' = 0 \Rightarrow E' = \frac{M^2 + m^2}{2M} = \frac{(m + 2hf)^2 + m^2}{2(m + 2hf)} \end{aligned}$$

Από την διατήρηση της ενέργειας προκύπτει ότι:

$$M = hf' + E' \Rightarrow hf' = E' - M = \frac{M^2 - m^2}{2M} \Rightarrow f' = 2f\frac{m + hf}{m + 2hf}$$

Από την διατήρηση της χωρικής ορμής προκύπτει ότι p΄=-hf΄.

(γ) Για την ταχύτητα του σωματιδίου μετά την αποδιέγερση ισχύει ότι:

$$v' = \frac{p'}{E'} = \frac{hf'}{E'} = \frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2} = \frac{(m + 2hf)^2 - m^2}{(m + 2hf)^2 + m^2}$$

Άσκηση 9.5.8 *Σωματίδιο Α μάζας m και ενέργειας E (στο σύστημα εργαστηρίου) συγκρούεται ελαστικά με άλλο όμοιο σωματίδιο Β, το οποίο ηρεμεί στο εργαστήριο.*

(α) Υπολογίστε την ταχύτητα του κέντρου ορμής (ΚΟ) των σωματιδίων στο σύστημα του εργαστηρίου.

(β) Υπολογίστε τις τετραορμές των σωματιδίων στο σύστημα ΚΟ.

(γ) Τι αλλάζει στην τετραορμή των σωματιδίων στο σύστημα ΚΟ μετά την κρούση;

(δ) Δείξτε ότι οι συνιστώσες του χωρικού μέρους της τετραορμής κάθε σωματιδίου μετά την κρούση στο εργαστήριο ικανοποιούν την εξίσωση μιας έλλειψης. Δείξτε ότι στο όριο των κλασικών ταχυτήτων η έλλειψη εκφυλίζεται σε κύκλο.

Λύση

Η αλληλεπίδραση των σωματιδίων Α και Β περιγράφεται συνοπτικά από την αντίδραση $1+2 \to 3+4$ όπου τα 1 και 3 αναφέρονται στο σωματίδιο Α και τα 2 και 4 στο σωματίδιο Β.
Δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κίνηση του Α πριν την κρούση γίνεται στην διεύθυνση του άξονα x και η κινήσεις των Α, Β μετά την κρούση στο επίπεδο x-y.

(α) Για την ορμή του σωματιδίου Α πριν την κρούση στο σύστημα του εργαστηρίου ισχύει ότι $p_1 = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - m^2c^4}$.
Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του κέντρου ορμής δίνεται από την σχέση:

$$\vec{v}_{KO} = c^2 \frac{\vec{p}_{\text{ΟΛ}}}{\text{E}_{\text{ΟΛ}}} = c^2 \frac{\vec{p}_1}{E + mc^2} = c^2 \frac{p_1}{E + mc^2}\hat{x} \Rightarrow$$
$$\vec{\beta} = \vec{\beta}_{KO} = \frac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}{E + mc^2}\hat{x} = \sqrt{\frac{E - mc^2}{E + mc^2}}\hat{x}$$

Επομένως

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{KO}^2}} = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}}$$

(β) Η τετραορμή του σωματιδίου Β πριν την κρούση στο σύστημα εργαστηρίου είναι $P_{(2)} = \begin{bmatrix} mc \\ 0 \end{bmatrix}$
Επομένως, στο σύστημα κέντρου ορμής, πριν την κρούση, η τετραορμή του Β είναι

$$P'_{(2)} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mc \\ 0 \end{bmatrix} = \gamma mc \begin{bmatrix} 1 \\ -\beta \end{bmatrix}$$

Στο σύστημα κέντρου ορμής τα σωματίδια Α και Β πριν την κρούση έχουν αντίθετες ορμές. Επειδή δε έχουν και ίσες μάζες θα έχουν και ίσες ενέργειες. Συνεπώς, στο σύστημα κέντρου ορμής, πριν την κρούση η τετραορμή του Α είναι $P'_{(1)} = \gamma mc \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix}$.

(γ) Επειδή η συνολική τριορμή παραμένει σταθερή (ίση με μηδέν) τα σωματίδια και μετά την κρούση θα έχουν αντίθετες ορμές. Επειδή δε έχουν και ίσες μάζες θα έχουν ίσες ενέργειες. Τέλος επειδή η συνολική ενέργεια διατηρείται, η ενέργειες των δύο σωματιδίων μετά την κρούση θα είναι ίσες μεταξύ τους και ίσες με αυτές που είχαν πριν από αυτήν.
Επομένως οι τετραορμές μετά την κρούση είναι (στο σύστημα κέντρου ορμής):
$P'_{(3)} = \begin{bmatrix} \gamma mc \\ \vec{p}'_{(3)} \end{bmatrix}$ και $P'_{(4)} = \begin{bmatrix} \gamma mc \\ \vec{p}'_{(4)} \end{bmatrix}$
με $\vec{p}'_{(4)} = -\vec{p}'_{(3)}$ και $|\vec{p}'_{(4)}| = |\vec{p}'_{(3)}| = \gamma m\beta c = mc\sqrt{\frac{E-mc^2}{2mc^2}}$

Έστω φ η γωνία που σχηματίζει (στο σύστημα κέντρου ορμής) η ταχύτητα του Α μετά την κρούση με τον άξονα x. Επομένως
$\vec{p}'_{(3)} = |\vec{p}'_{(3)}| \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} = m\gamma\beta c \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$
$P'_{(3)} = m\gamma c \begin{bmatrix} 1 \\ \beta\cos\varphi \\ \beta\sin\varphi \end{bmatrix}$ και $P'_{(4)} = m\gamma c \begin{bmatrix} 1 \\ -\beta\cos\varphi \\ -\beta\sin\varphi \end{bmatrix}$

(δ) «Επιστρέφοντας» στο σύστημα εργαστηρίου:

$$P_{(3)} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P'_{(3)} = m\gamma c \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \beta\cos\varphi \\ \beta\sin\varphi \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$p_{3x} = m\gamma^2\beta c(-1+\cos\varphi) \Rightarrow \frac{p_{3x}}{m\gamma^2\beta c} + 1 = \cos\varphi$
$p_{3y} = m\gamma c\beta\sin\varphi \Rightarrow \frac{p_{3y}}{m\gamma c\beta} = \sin\varphi$
Επειδή $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ συμπεραίνουμε ότι:

$$\frac{(p_{3x} + m\gamma^2\beta c)^2}{(m\gamma^2\beta c)^2} + \frac{p_{3y}^2}{(m\gamma\beta c)^2} = 1$$

Η εξίσωση αυτή στο επίπεδο px , py παριστάνει έλλειψη με κέντρο το σημείο $(-m\gamma^2\beta c, 0)$ και ημιάξονες a $=$ m$\gamma^2\beta$c και $b = m\gamma\beta c$. Ο λόγος των δύο ημιαξόνων είναι $\frac{a}{b} = \gamma = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}}$.

Στο όριο των κλασσικών ταχυτήτων ισχύει ότι E $\simeq mc^2$. Επομένως, $\frac{a}{b} \simeq 1$ και η έλλειψη εκφυλίζεται σε κύκλο.

Άσκηση 9.5.9 *Ένα σωματίδιο μάζας ηρεμίας M και κινητικής ενέργειας T διασπάται αυθόρμητα σε δύο σωματίδια με ίδια μάζα ηρεμίας m.*

(α) Να μελετηθεί αν είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί αυτή η διάσπαση όταν 2m > M.

(β) Βρείτε πώς θα κινούνται τα δύο σωματίδια που θα δημιουργηθούν από τη διάσπαση αν M = 2m.

(γ) Αν είναι m = 3M/10 και T = 2M/3 να βρεθεί η μέγιστη γωνία απόκλισης κάποιου από τα δύο καινούργια σωματίδια από την αρχική διεύθυνση κίνησης του αρχικού σωματιδίου.

[Υπόδειξη: Θα μπορούσατε να αναλύσετε τις τετραορμές στο σύστημα κέντρου ορμής των σωματιδίων και μετά να τις μεταφράσετε στο σύστημα του εργαστηρίου.]

<u>Λύση</u>

(α) Στο σύστημα κέντρου ορμής ισχύει ότι
$E = M, E_1 = m + T_1 \geq m, E_2 = m + T_2 \geq m.$
Επειδή η συνολική ενέργεια παραμένει σταθερή προκύπτει ότι
$E = E_1 + E_2 \Rightarrow M \geq 2m.$
Επομένως, όταν $2m > M$ δεν είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί η διάσπαση.

(β) Αν M=2m,τότε στο σύστημα κέντρου ορμής τα παραγόμενα σωματίδια θα έχουν μηδενική κινητική ενέργεια. Επομένως θα είναι ακίνητα. Συνεπώς, στο σύστημα εργαστηρίου θα κινούνται με την ταχύτητα του κέντρου ορμής που είναι η ταχύτητα του αρχικού σωματιδίου.

(γ) Στο σύστημα εργαστηρίου, η ενέργεια και η ορμή του αρχικού σωματιδίου είναι:
$E = M + T = \frac{5M}{3}$ και $p = \sqrt{E^2 - M^2} = \frac{4M}{3}$.
Για την ταχύτητα του σωματιδίου, η οποία είναι και η ταχύτητα του κέντρου ορμής ισχύει ότι: $v = \frac{p}{E} = \frac{4}{5} \Rightarrow \gamma = \frac{5}{3}$

<u>1ος τρόπος</u>

Ο πίνακας μετασχηματισμού από το σύστημα εργαστηρίου στο σύστημα κέντρου ορμής είναι (παραλείπουμε την z συνιστώσα)

$$\Lambda(v) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 & -4/3 & 0 \\ -4/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Στο σύστημα κέντρου ορμής το αρχικό σωματίδιο είναι ακίνητο και διασπάται σε δύο σωματίδια με αντίθετες ορμές. Επειδή έχουν και ίσες μάζες θα έχουν και ίσες ενέργειες. Επειδή η συνολική ενέργεια παραμένει σταθερή προκύπτει ότι
$E = E_1 + E_2 \Rightarrow E_1 = E_2 = \frac{M}{2}$
Για τις ορμές των παραγόμενων σωματιδίων ισχύει ότι:
$p_1 = p_2 = \sqrt{E_1^2 - m^2} = \frac{2M}{5}$
Έστω φ η γωνία που σχηματίζει η κοινή διεύθυνση κίνησης των δύο σωματιδίων με τον άξονα x. Οι τετραορμές των δύο σωματιδίων στο σύστημα κέντρου ορμής είναι:

$$P_{1(KO)} = M \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5}\cos\varphi \\ \frac{2}{5}\sin\varphi \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P_{2(KO)} = M \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5}\cos\varphi \\ -\frac{2}{5}\sin\varphi \end{bmatrix}$$

Στο σύστημα εργαστηρίου

$$P_{1(LAB)} = \Lambda(-v)P_{1(kO)} = M \begin{bmatrix} \frac{5}{6} + \frac{8}{15}\cos\varphi \\ \frac{2}{3}(1+\cos\varphi) \\ \frac{2}{5}\sin\varphi \end{bmatrix}$$
$$P_{2(LAB)} = \Lambda(-v)P_{2(kO)} = M \begin{bmatrix} \frac{5}{6} - \frac{8}{15}\cos\varphi \\ \frac{2}{3}(1-\cos\varphi) \\ -\frac{2}{5}\sin\varphi \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι οι x συνιστώσες των ορμών και των δύο σωματιδίων είναι θετικές. Αυτό σημαίνει ότι και τα δύο σωματίδια «συνεχίζουν προς τα εμπρός».
Για τις γωνίες ϕ_1, ϕ_2 που σχηματίζουν οι κατευθύνσεις κίνησης των δύο σωματιδίων με τον άξονα x ισχύει ότι:

$$\tan\varphi_1 = \frac{p_{1y}}{p_{1x}} = \frac{3}{5}\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} \quad \text{και} \quad \tan\varphi_2 = \frac{p_{2y}}{p_{2x}} = \frac{3}{5}\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}$$

Οι συναρτήσεις f_1, f_2 με $f_1(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$ και $f_2(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}$ είναι αύξουσα και φθίνουσα αντιστοίχως. Επομένως η μέγιστη τιμή της $tan\phi_1$ επιτυγχάνεται για φ=π/2 και η μέγιστη τιμή της $tan\phi_2$ για φ=0.
Συνεπώς $\tan\varphi_{1(\max)} = \frac{3}{5}$ και $\tan\varphi_{2(\max)} = +\infty \Rightarrow \varphi_{2(\max)} = \frac{\pi}{2}$. Επομένως, η μέγιστη γωνία που μπορεί να αποκλίνει κάποιο από τα σωματίδια είναι π/2.

Με φ=0 η τετραορμή του $2^{ου}$ σωματιδίου είναι

$$P_{2(LAB)} = \Lambda(-v)P_{2(kO)} = M \begin{bmatrix} \frac{5}{6} - \frac{8}{15} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αυτό σημαίνει ότι το 2ο σωματίδιο θα παραμείνει ακίνητο. Συνεπώς η τιμή $\phi_2 = \pi/2$ δεν είναι μέγιστη τιμή αλλά supremum.

<u>2ος τρόπος</u>

Θα λύσουμε το πρόβλημα πλήρως στο σύστημα εργαστηρίου. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της τετραορμής, απομονώνουμε μια τετραορμή και υψώνουμε στο τετράγωνο.

$$P = P_1 + P_2 \Rightarrow (P - P_2)^2 = P_1^2 \Rightarrow M^2 + 2PP_1 = 0 \Rightarrow$$
$$M^2 - 2EE_2 + 2\vec{p}\vec{p}_2 = 0 \Rightarrow 2pp_2\cos\varphi_2 = 2EE_2 - M^2$$

Αντικαθιστώντας $E = 5M/3, p = 4M/3, E_2 = \gamma_2 m, p_2 = \sqrt{E_2^2 - m^2} = m\sqrt{\gamma_1^2 - 1}$, η παραπάνω σχέση γίνεται $\cos\varphi_2 = \frac{10}{8}\sqrt{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2+1}}$

Η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ είναι αύξουσα. Η μέγιστη τιμή της ϕ_2 επιτυγχάνεται όταν το $cos\phi_2$ γίνει ελάχιστο. Συνεπώς, η ϕ_2 γίνεται μέγιστη όταν το γ_2 γίνει ελάχιστο. Η ελάχιστη τιμή του γ_2 είναι η τιμή $\gamma_2 = 1$, για την οποία

$cos\phi_2 = 0$. Επομένως η μέγιστη τιμή του ϕ_2 είναι η π/2. Στην περίπτωση αυτή το σωματίδιο είναι ακίνητο. Επομένως η τιμή $\phi_2 = \pi/2$ δεν είναι μέγιστη αλλά supremum τιμή.

Άσκηση 9.5.10 *(α) Να γραφεί η τετραορμή ενός φωτονίου συχνότητας f που κινείται κατά μήκος του άξονα x.*

(β) Ένα ίδιο με το πρώτο φωτόνιο, που κινείται όμως κατά μήκος του άξονα y, αν συγκρουστεί με το πρώτο οδηγεί σε δημιουργία ενός νέου σωματιδίου. Ποια θα είναι η μάζα αυτού του σωματιδίου;

(γ) Πως θα κινείται το σωματίδιο αυτό;

(δ) Στη συνέχεια το σωματίδιο αυτό συγκρούεται με ίδιο ακίνητο σωματίδιο, επέρχεται «εξαΰλωση» και δημιουργούνται δύο νέα φωτόνια ίδιας μεταξύ τους συχνότητας f΄, τα οποία κινούνται στο επίπεδο x - y σχηματίζοντας ίσες γωνίες φ εκατέρωθεν της διεύθυνσης κίνησης του σωματιδίου. Να βρεθεί η f΄ και η γωνία φ.

Λύση

(α) Η τετραορμή του πρώτου φωτονίου είναι (παραλείπεται ο άξονας z)

$P_1 = \begin{bmatrix} E \\ \vec{p} \end{bmatrix} = hf \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(β) Η τετραορμή του δεύτερου φωτονίου είναι: $P_2 = hf \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Επειδή η συνολική τετραορμή παραμένει σταθερή ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} &P = P_1 + P_2 \Rightarrow P^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \Rightarrow \\ &-m^2 = 0 + 0 + 2(-E_1E_2 + \vec{p}_1\vec{p}_2) \Rightarrow \\ &m^2 = 2h^2f^2 \Rightarrow m = hf\sqrt{2} \end{aligned}$$

(γ) Η τετραορμή του σωματιδίου είναι $P = \begin{bmatrix} E \\ p_x \\ p_y \end{bmatrix}$.

Επειδή $P = P_1 + P_2$ συμπεραίνουμε ότι
$E = 2hf, p_x = hf, p_y = hf, p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = hf\sqrt{2}$ και $v = \frac{p}{E} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Η διεύθυνση κίνησης του σωματιδίου σχηματίζει με τον άξονα x γωνία θ τέτοια ώστε $\tan\theta = \frac{p_y}{p_x} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

(δ) Στρίβουμε το σύστημα συντεταγμένων κατά π/4 έτσι ώστε η διεύθυνση κίνησης του σωματιδίου να γίνει ο άξονας x. Επειδή η συνολική τετραορμή παραμένει σταθερή ισχύει ότι:

$$\begin{bmatrix} E \\ p \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_1 \cos\varphi \\ E_1 \sin\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_2 \\ E_2 \cos\varphi \\ E_2 \sin\varphi \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$hf \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} + hf \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = hf' \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} + hf' \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{bmatrix}$$

Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι $f' = \frac{2+\sqrt{2}}{2} f$ και $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

Άσκηση 9.5.11 *(α) Σωματίδιο Α μάζας m_A διασπάται αυθόρμητα στα σωματίδια Β και Γ μάζας m_B και μηδέν αντίστοιχα. Υπολογίστε την ενέργεια του σωματιδίου Γ στο ιδιοσύστημα του σωματιδίου Α. Υπολογίστε επίσης την ενέργεια του σωματιδίου Γ στο ιδιοσύστημα του σωματιδίου Β.*

(β) Φωτόνιο συγκρούεται ελαστικά με σωματίδιο Α μάζας m το οποίο αρχικά ηρεμεί στο εργαστήριο. Εάν η συχνότητα του φωτονίου στο εργαστήριο πριν και μετά την κρούση είναι f_1 και f_2 αντίστοιχα, δείξτε ότι η γωνία σκέδασης θ του φωτονίου (δηλαδή η γωνία εκτροπής του φωτονίου από την αρχική του κατεύθυνση) στο εργαστήριο δίνεται από τη σχέση: $\frac{1}{hf_2} = \frac{1}{hf_1} + \frac{2}{m}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Λύση

α) Επειδή η συνολική τετραορμή παραμένει σταθερή ισχύει ότι:

$$P_A = P_B + P_\Gamma \Rightarrow P_A - P_B = P_\Gamma \Rightarrow (P_A - P_\Gamma)^2 = P_B^2 \Rightarrow$$
$$P_A^2 + P_\Gamma^2 - 2P_A P_\Gamma = P_B^2 \Rightarrow -m_A^2 + 0 - 2P_A P_\Gamma = -m_B^2$$

Στο ιδιοσύστημα του Α ισχύει ότι $\vec{p}_A = 0 \Rightarrow P_A P_\Gamma = -m_A E_\Gamma$.
Η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$m_A^2 - 2m_A E_\Gamma = m_B^2 \Rightarrow E_\Gamma^{(A)} = \frac{m_A^2 - m_B^2}{2m_A}$$

Απομονώνοντας διαφορετικό όρο προκύπτει ότι:

$$P_A = P_B + P_\Gamma \Rightarrow (P_B + P_\Gamma)^2 = P_A^2 \Rightarrow$$
$$P_B^2 + P_\Gamma^2 + 2P_B P_\Gamma = P_A^2 \Rightarrow -m_B^2 + 0 + 2P_B P_\Gamma = -m_A^2$$

Στο ιδιοσύστημα του Β ισχύει ότι $\vec{p}_B = 0 \Rightarrow P_B P_\Gamma = -m_B E_\Gamma$. Η προηγούμενη σχέση γίνεται: $m_B^2 + 2m_B E_\Gamma = m_A^2 \Rightarrow E_\Gamma^{(B)} = \frac{m_A^2 - m_B^2}{2m_B}$

(β) Έστω $P_{\sigma 1}, P_{\gamma 1}, P_{\sigma 2}, P_{\gamma 2}$ οι τετραορμές σωματιδίου και φωτονίων πριν και μετά την κρούση. Ισχύει ότι:

$$P_{\sigma 1} + P_{\gamma 1} = P_{\sigma 2} + P_{\gamma 2} \Rightarrow P_{\sigma 1} + P_{\gamma 1} - P_{\gamma 2} = P_{\sigma 2}$$

Υψώνοντας την παραπάνω σχέση στο τετράγωνο και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι $P_{\gamma 1}^2 = P_{\gamma 2}^2 = 0$ και $P_{\sigma 1}^2 = P_{\sigma 2}^2 = -m^2$ προκύπτει ότι:
$P_{\sigma 1}P_{\gamma 1} - P_{\sigma 1}P_{\gamma 2} - P_{\gamma 1}P_{\gamma 2} = 0$ (1)
Επειδή το σωμάτιο ήταν αρχικά ακίνητο ισχύει ότι $P_{\sigma 1}P_{\gamma 1} = -mhf_1$ και $P_{\sigma 1}P_{\gamma 2} = -mhf_2$.
Επειδή οι ορμές των δύο φωτονίων σχηματίζουν γωνία θ, προκύπτει ότι:

$$P_{\gamma 1}P_{\gamma 2} = -h^2 f_1 f_2 + h^2 f_1 f_2 \cos\theta = -2h^2 f_1 f_2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (1):

$$-mf_1 + mf_2 + 2hf_1 f_2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{hf_2} = \frac{1}{hf_1} + \frac{2}{m}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Άσκηση 9.5.12 *(α) Να υπολογιστεί η ενέργεια κατωφλίου του βλήματος Α το οποίο προσπίπτει πάνω στο ακίνητο σωματίδιο Β προκειμένου να δημιουργηθεί ένα νέο σωματίδιο Γ εκτός από τα Α και Β ($A + B \to A + B + \Gamma$). Δίδονται οι μάζες των τριών σωματιδίων m_A, m_B, m_Γ.*

Λύση
Έστω P_A, P_B οι τετραορμές των Α, Β στο σύστημα εργαστηρίου και P'_A, P'_B, P'_Γ οι τετραορμές των Α, Β , Γ στο σύστημα κέντρου ορμής. Ισχύει ότι:

$$P_A = \begin{bmatrix} E_A \\ \vec{p}_A \end{bmatrix} \; P_B = \begin{bmatrix} m_B \\ \vec{0} \end{bmatrix} \; P'_A = \begin{bmatrix} E'_A \\ \vec{p}'_A \end{bmatrix} \; P'_B = \begin{bmatrix} E'_B \\ \vec{p}'_B \end{bmatrix} \; P'_\Gamma = \begin{bmatrix} E'_\Gamma \\ \vec{p}'_\Gamma \end{bmatrix}$$

Επειδή οι τετραορμές μετά την κρούση υπολογίζονται στο σύστημα κέντρου ορμής, ισχύει ότι $\vec{p}'_A + \vec{p}'_B + \vec{p}'_\Gamma = 0$.
Έστω P_{LAB} η συνολική τετραορμή πριν την κρούση στο σύστημα εργαστηρίου και P'_{LAB}, P'_{KO} η συνολική μετά την κρούση στο σύστημα εργαστηρίου και στο σύστημα κέντρου ορμής αντιστοίχως.
Επειδή η τετραορμή παραμένει σταθερή ισχύει ότι
$P_{LAB} = P'_{LAB} \Rightarrow P_{LAB}^2 = P'^2_{LAB}$.
Επειδή το τετράγωνο της τετραορμής είναι αναλλοίωτο μέγεθος ισχύει ότι
$P'^2_{LAB} = P'^2_{KO}$.
Επομένως
$P_{LAB}^2 = P'^2_{KO}$ (1)
Για τα δύο μέλη της (1) ισχύει ότι:

$$P_{LAB} = P_A + P_B \Rightarrow P_{LAB}^2 = (P_A + P_B)^2 = P_A^2 + P_B^2 + 2P_A P_B \Rightarrow$$
$$P_{LAB}^2 = -m_A^2 - m_B^2 - 2E_A m_B$$

$$P'_{KO} = P'_A + P'_B + P'_\Gamma = \begin{bmatrix} E'_A + E'_B + E'_\Gamma \\ \vec{0} \end{bmatrix} \Rightarrow P'^2_{KO} = -(E'_A + E'_B + E'_\Gamma)^2$$

Αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει ότι:

$$E_A = \frac{(E'_A + E'_B + E'_\Gamma)^2 - m_A^2 - m_B^2}{2m_B} \geq \frac{(m_A + m_B + m_\Gamma)^2 - m_A^2 - m_B^2}{2m_B}$$

Συνεπώς,

$$T_A = E_A - m_A \geq \frac{(m_A + m_B + m_\Gamma)^2 - (m_A + m_B)^2}{2m_B}$$

Επομένως η ενέργεια κατωφλίου ου βλήματος Α είναι

$$T_{A(\min)} = \frac{(m_A + m_B + m_\Gamma)^2 - (m_A + m_B)^2}{2m_B}$$

Αν το βλήμα έχει αυτήν την κινητική ενέργεια, τότε τα σωματίδια Α, Β, Γ έχουν μηδενική ταχύτητα στο σύστημα κέντρου ορμής και συνεπώς την ταχύτητα του κέντρου ορμής στο σύστημα εργαστηρίου.

Άσκηση 9.5.13 *(α) Ένα σωματίδιο Α μάζας m και ένα φωτόνιο συγκρούονται ελαστικά με αποτέλεσμα και μετά την σύγκρουση να έχουμε πάλι το σωματίδιο Α και ένα φωτόνιο. Να συγκρίνετε τις συχνότητες των φωτονίων πριν και μετά την κρούση στο σύστημα κέντρου ορμής.*

(β) Εάν τα δύο προηγούμενα σωματίδια αντιστρέφουν τις φορές κίνησής τους μετά την κρούση στο ΚΟ, συγκρίνετε τις ενέργειες του σωματιδίου Α μετά την κρούση και πριν την κρούση, όπως αυτές μετρώνται σε ένα σύστημα Σ που κινείται με ταχύτητα v σε σχέση με το σύστημα κέντρου στην ίδια κατεύθυνση που κινούνταν αρχικά το φωτόνιο. (Δίδεται η αρχική συχνότητα του φωτονίου στο ΚΟ).

Λύση

(α) Στο σύστημα κάντρου ορμής, οι ορμές του φωτονίου και του σωματιδίου είναι αντίθετες. Έστω p και p΄ τα μέτρα των ορμών των σωματιδίων πριν και μετά την κρούση . Για την συνολική ενέργεια ισχύει ότι
$E = p + \sqrt{p^2 + m^2}$, $E' = p' + \sqrt{p'^2 + m^2}$ και Ε=Ε΄.
Επειδή η συνάρτηση f με $f(x) = x + \sqrt{x^2 + m^2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο [0,+∞) συμπεραίνουμε ότι p=p΄. Επομένως, στο σύστημα κέντρου ορμής, τα δύο φωτόνια έχουν την ίδια (κατά μέτρο) ορμή και συνεπώς την ίδια συχνότητα. (β) Έστω p=hf το μέτρο της ορμής του φωτονίου στο σύστημα κέντρου ορμής. Η τετραορμή του σωματιδίου πριν και μετά την κρούση στο σύστημα κέντρου ορμής είναι : $P_{\pi\rho\iota\nu(KO)} = \begin{bmatrix} \sqrt{p^2 + m^2} \\ -p \end{bmatrix}$ και $P_{\mu\epsilon\tau\alpha(KO)} = \begin{bmatrix} \sqrt{p^2 + m^2} \\ p \end{bmatrix}$

Με χρήση του μετασχηματισμού Lorentz που συνδέει τα δύο συστήματα:

$$P_{\pi\rho\iota\nu(\Sigma)} = \Lambda(v) P_{\pi\rho\iota\nu(KO)} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{p^2+m^2} \\ -p \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} \sqrt{p^2+m^2}+pv \\ \dots \end{bmatrix}$$

$$P_{\mu\epsilon\tau\alpha(\Sigma)} = \Lambda(v) P_{\mu\epsilon\tau\alpha(KO)} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{p^2+m^2} \\ p \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} \sqrt{p^2+m^2}-pv \\ \dots \end{bmatrix}$$

Επομένως ο λόγος των ενεργειών στο Σ είναι:
$\frac{E_{\mu\epsilon\tau\alpha}}{E_{\pi\rho\iota\nu}} = \frac{\sqrt{p^2+m^2}-pv}{\sqrt{p^2+m^2}+pv}$

Άσκηση 9.5.14 *Ένα σωματίδιο μάζας m προσκρούει σε ακίνητο σωματίδιο ίδιας μάζας και συγκρούεται με αυτό ελαστικά.*

(α) Να δειχθεί ότι τα σωματίδια μετά τη σύγκρουση κινούνται σε διευθύνσεις που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία μικρότερη από 90°. [Υποδ.: Προκειμένου να υπολογίσετε τη γωνία υψώστε στο τε¬τράγωνο τη συνολική τετραορμή πριν και μετά την κρούση και λύστε ως προς το cos φ της γωνίας φ που σχηματίζουν μεταξύ τους οι ορμές των σωματιδίων μετά την κρούση. Στη συνέχεια εκφράστε την ενέργεια του ενός σωματιδίου μετά την κρούση ως συνάρτηση της ενέργειας του άλλου.]

(β) Δείξτε ότι η γωνία αυτή γίνεται ακριβώς 90° στην περίπτωση που τα σωματίδια κινούνται με ταχύτητες πολύ μικρότερες της ταχύτητας του φωτός.

Λύση

(α) Οι τετραορμές των δύο σωματιδίων πριν και μετά την κρούση είναι:
$P_1 = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vec{p}_1 \end{bmatrix}, \; P_2 = \begin{bmatrix} m \\ \vec{0} \end{bmatrix}, \; P_1' = \begin{bmatrix} E'_1 \\ \vec{p}_1' \end{bmatrix}, \; P_2' = \begin{bmatrix} E'_2 \\ \vec{p}_2' \end{bmatrix}$
Επειδή η συνολική τετραορμή παραμένει σταθερή, συμπεραίνουμε ότι:

$$\begin{aligned} &P_1 + P_2 = P'_1 + P'_2 \Rightarrow (P_1+P_2)^2 = (P'_1+P'_2)^2 \Rightarrow \\ &P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 = P_1'^2 + P_2'^2 + 2P'_1P'_2 \Rightarrow \\ &-m^2 - m^2 + 2P_1P_2 = -m^2 - m^2 + 2P'_1P'_2 \Rightarrow \\ &P_1P_2 = P'_1P'_2 \Rightarrow -E_1m = -E'_1E'_2 + \vec{p}_1'\vec{p}_2' \Rightarrow \\ &E'_1E'_2 - E_1m = |\vec{p}_1'||\vec{p}_2'|cos\varphi \Rightarrow cos\varphi = \frac{E'_1E'_2 - E_1m}{|\vec{p}_1'||\vec{p}_2'|} \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την διατήρηση της ενέργειας
$E_1 + m = E_1' + E_2' \Rightarrow E_1 = E_1' + E' - m$
ο αριθμητής του παραπάνω κλάσματος γίνεται:

$$\begin{aligned} &E'_1E'_2 - E_1m = E'_1E'_2 - (E'_1 + E'_2 - m)m = \\ &E'_1E'_2 - E'_1m - E'_2m - m^2 = (E'_1 - m)(E'_2 - m) > 0 \end{aligned}$$

Επομένως $\cos\varphi > 0 \Rightarrow 0 < \varphi < 90°$
Στο κλασσικό όριο $E_1' - m \simeq E_2' - m \simeq 0$.
Επομένως $\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 90°$.

Άσκηση 9.5.15 *Υπολογίστε την ενέργεια των σκεδαζόμενων ηλεκτρονίων E_e' κατά την ελαστική σκέδαση ηλεκτρονίου σε ακίνητο πρωτόνιο, συναρτήσει της ενέργειας του προσπίπτοντος σωματιδίου E_e και της γωνίας σκέδασης αυτού, θεωρώντας ότι τα προσπίπτοντα ηλεκτρόνια έχουν πολύ υψηλές ενέργειες και πριν και μετά τη σκέδασή τους ($E_e, E_e' \gg m$). Οι μάζες m, M του ηλεκτρονίου και του πρωτονίου αντίστοιχα θεωρούνται γνωστές και $m \ll M$.*

Λύση

Οι τετραορμές ηλεκτρονίου – πρωτονίου πριν και μετά την σκέδαση είναι:
$P_e = \begin{bmatrix} E_e \\ \vec{p}_e \end{bmatrix}$, $P_p = \begin{bmatrix} M \\ \vec{0} \end{bmatrix}$, $P_e' = \begin{bmatrix} E'_e \\ \vec{p}_e' \end{bmatrix}$, $P_p' = \begin{bmatrix} E'_p \\ \vec{p}_p' \end{bmatrix}$
Επειδή η τετραορμή παραμένει σταθερή
$P_e + P_p = P_e' + P_p' \Rightarrow P_e + P_p - P_e' = P_p' \Rightarrow (P_e + P_p - P_e')^2 = P_p'^2 \Rightarrow$
$P_e^2 + P_p^2 + P_e'^2 + 2P_eP_p - 2P_eP_e' - 2P_pP_e' = P_p'^2 \Rightarrow$
$-m^2 - M^2 - m^2 + 2P_eP_p - 2P_eP_e' - 2P_pP_e' = -M^2 \Rightarrow$
$m^2 - P_eP_p + P_eP_e' + P_pP_e' = 0 \qquad (1)$
Ισχύει ότι
$P_eP_p = -ME_e$, $P_pP_e' = -ME_e'$,
$P_eP_e' = -E_eE_e' + \vec{p}_e \cdot \vec{p}_e' = -E_eE_e' + |\vec{p}_e||\vec{p}_e'| \cos\theta$
Επειδή $E_e, E_e' \gg m$ ισχύει ότι $|\vec{p}_e| \simeq E_e$ και $|\vec{p}_e'| \simeq E_e'$.
Αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει ότι:

$$m^2 + E_eM - E_eE_e' + E_eE_e' \cos\theta - E_e'M = 0 \Rightarrow$$
$$E' = \frac{m^2 + E_eM}{E_e(1 - \cos\theta) + M} \simeq \frac{E_eM}{E_e(1 - \cos\theta) + M}$$

Άσκηση 9.5.16 *Δύο φωτόνια ίδιας συχνότητας f, όταν συγκρούονται κινούμενα σε αντίθετες κατευθύνσεις στο εργαστήριο παράγουν δύο ίδια σωματίδια με μάζα m το καθένα.*

(α) Πώς κινούνται τα σωματίδια αυτά;

(β) Ποια είναι η μέγιστη μάζα m_{max} του καθενός από αυτά και πώς κινούνται όταν έχουν τη μέγιστη δυνατή μάζα;

(γ) Όταν τα φωτόνια συγκρούονται στο εργαστήριο, όχι "μετωπικά" όπως προηγουμένως, αλλά έτσι ώστε οι κατευθύνσεις κίνησης τους να σχηματίζουν γωνία 2θ, ποια είναι η μέγιστη μάζα που μπορούν να έχουν τα δύο δημιουργούμενα σωματίδια και πώς κινούνται αυτά στο εργαστήριο τότε;

(δ) Τα δύο αντίθετα κινούμενα φωτόνια του ερωτήματος (α) τα παρατηρούμε από ένα σύστημα που κινείται στην κατεύθυνση κίνησης του ενός εκ των δύο με

ταχύτητα v=3/5. Στο σύστημα αυτό ποια είναι η μέγιστη μάζα των δύο ίδιων δημιουργούμενων σωματιδίων;

(ε) Συγκρίνατε την απάντηση σας με εκείνη του ερωτήματος (β) και σχολιάστε.

Λύση

(α) Επειδή τα δύο φωτόνια διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις και έχουν την ίδια συχνότητα, έχουν αντίθετες ορμές. Επομένως η συνολική ορμή του συστήματος των δύο φωτονίων είναι μηδέν. Επειδή η συνολική ορμή διατηρείται σταθερή, αντίθετες θα είναι και οι ορμές των δύο σωματιδίων. Επειδή τα σωματίδια έχουν ίδιες μάζες, θα έχουν ταχύτητες ίσου μέτρου και ίσες ενέργειες.

(β) Έστω E η ενέργεια κάθε σωματιδίου και p το μέτρο της ορμής του. Επειδή η συνολική ενέργεια παραμένει σταθερή, προκύπτει ότι:

$$hf + hf = E + E \Rightarrow E = hf \Leftrightarrow \sqrt{p^2 + m^2} = hf \Leftrightarrow m = \sqrt{h^2 f^2 - p^2}$$

Από την σχέση αυτή συμπεραίνουμε ότι η μέγιστη τιμή της μάζας των παραγόμενων σωματιδίων είναι $m_{\max} = hf$. Προφανώς όταν η μάζα είναι μέγιστη η ορμή κάθε σωματιδίου είναι μηδέν.

(γ) Θέτουμε άξονα x την διχοτόμο της γωνίας που σχηματίζουν οι κατευθύνσεις κίνησης των δύο φωτονίων και επίπεδο xy το επίπεδο που σχηματίζουν. Οι τετραορμές των δύο φωτονίων και του συστήματος στο σύστημα εργαστηρίου είναι:

$$P_1 = hf \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, P_2 = hf \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}, P = P_1 + P_2 = 2hf \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως η ταχύτητα του κέντρου ορμής έχει την διεύθυνση του άξονα x και μέτρο:

$$v_{KO} = \frac{p_{o\lambda}}{E_{o\lambda}} = \cos\theta \Rightarrow \gamma_{KO} = \frac{1}{\sin\theta}$$

Ο πίνακας μετασχηματισμού στο κέντρο ορμής είναι $\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Επομένως, οι τετραορμές των δύο φωτονίων στο σύστημα κέντρου ορμής είναι:

$$P_1' = \Lambda P_1 = hf \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = hf \begin{bmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$P_2' = \Lambda P_2 = hf \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix} = hf \begin{bmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \end{bmatrix}$$

Επομένως, στο σύστημα κέντρου ορμής, τα φωτόνια έχουν αντίθετες ορμές και συχνότητες $f' = f\sin\theta$. Δεδομένου ότι η μάζα είναι αναλλοίωτο μέγεθος, εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα του (β) ερωτήματος στο σύστημα κέντρου ορμής. Επομένως η μέγιστη μάζα είναι $m_{\max} = hf' = hf\sin\theta$. Όταν η μάζα των σωματιδίων είναι μέγιστη, τα σωματίδια είναι ακίνητα στο σύστημα κέντρου ορμής. Επομένως στο σύστημα εργαστηρίου κινούνται με την ταχύτητα του συστήματος κέντρου ορμής $v = cos\theta$.

(δ), (ε) Τα αποτελέσματα δεν αλλάζουν αλλάζοντας σύστημα αναφοράς. Τα μέτρα των τετραορμών (μάζες σωματιδίων) είναι αναλλοίωτα σε μετασχηματισμούς Lorentz.

Άσκηση 9.5.17 *Ένα σωματίδιο μάζας M = 28m το οποίο βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία διασπάται αυθόρμητα σε δύο σωματίδια με μάζες $m_1 = 5m$ και $m_2 = 9m$ αντίστοιχα.*

(α) Γράψτε τις τετραορμές των σωματιδίων πριν και μετά τη διάσπαση.

(β) Μπορούν τα σωματίδια που θα δημιουργηθούν να κινηθούν σε κάθετες μεταξύ τους κατευθύνσεις;

(γ) Ποιος ο λόγος των ταχυτήτων των δύο σωματιδίων;

(δ) Πόσα m (αντί των 28) θα έπρεπε να είναι η μάζα του αρχικού σωματιδίου ώστε τα δύο σωματίδια που θα δημιουργηθούν να είναι ακίνητα;

(ε) Στην περίπτωση που το πρώτο σωματίδιο είχε τη μάζα που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα τι θα συνέβαινε μετά τη διάσπαση αν το πρώτο σωματίδιο κινούνταν αρχικά με ταχύτητα V ;

<u>Λύση</u>

(α) Αν E_1, E_2 και $\vec{p_1}$, $\vec{p_2}$ οι ενέργειες και οι ορμές των σωματιδίων τότε για τις τετραορμές τους ισχύει ότι:

$$P = \begin{bmatrix} M \\ \vec{0} \end{bmatrix},\ P_1 = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vec{p_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 m_1 \\ \gamma_1 m_1 \vec{v_1} \end{bmatrix},\ P_2 = \begin{bmatrix} E_2 \\ \vec{p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_2 m_2 \\ \gamma_2 m_2 \vec{v_2} \end{bmatrix}$$

(β) Επειδή η τετραορμή παραμένει σταθερή συμπεραίνουμε ότι $P_1 + P_2 = P \Rightarrow \vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{0}$. Επομένως τα σωματίδια κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις και όχι σε κάθετες.

(γ) Από την διατήρηση της τετραορμής προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
&P_1 + P_2 = P \Rightarrow P_1 = P - P_2 \Rightarrow P_1^2 = (P - P_2)^2 \Rightarrow \\
&P_1^2 = P^2 + P_2^2 - 2PP_2 \Rightarrow -m_1^2 = -M^2 - m_2^2 - 2PP_2 \Rightarrow \\
&m_1^2 = M^2 + m_2^2 - 2ME_2 \Rightarrow E_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M} = 15m \qquad (1)
\end{aligned}$$

Όμως $E_2 = \gamma_2 m_2 \Rightarrow \gamma_2 = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \Rightarrow v_2 = \frac{4}{5}$.

Επειδή η συνολική ενέργεια παραμένει σταθερή

$$M = E_1 + E_2 \Rightarrow E_1 = 13m \Rightarrow m_1\gamma_1 = 13m \Rightarrow \gamma_1 = \frac{13}{5} \Rightarrow v_1 = \frac{12}{13}$$

(δ) Αν τα σωματίδια μετά την κρούση ήταν ακίνητα, τότε οι τετραορμές τους θα ήταν $P_1 = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vec{0} \end{bmatrix}$ και $P_2 = \begin{bmatrix} m_2 \\ \vec{0} \end{bmatrix}$.

Από την διατήρηση της τετραορμής προκύπτει ότι $M = m_1 + m_2 = 14m$.

(ε) Υποθέτουμε ότι $M = m_1 + m_2$ και ότι αρχικά το σωματίδιο μάζας Μ είχε ταχύτητα V. Τότε και μετά την διάσπαση τα παραγόμενα σωματίδια θα κινούνται με V. Πράγματι, θεωρούμε το κέντρο ορμής το οποίο κινείται με ταχύτητα V. Στο σύστημα κέντρου ορμής το αρχικό σωματίδιο είναι ακίνητο. Επομένως ισχύει η (1) . Αντικαθιστώντας στην (1) $M = m_1 + m_2$, προκύπτει ότι $E_2 = m_2$. Άρα το 2^o σωματίδιο είναι ακίνητο στο κέντρο ορμής. Επειδή τα παραγόμενα σωματίδια έχουν αντίθετες ορμές, είναι ακίνητο και το πρώτο. Συνεπώς στο σύστημα εργαστηρίου έχουν ταχύτητα V.

Άσκηση 9.5.18 *Ένα ακίνητο σωματίδιο μάζας Μ διασπάται αυθόρμητα σε δύο γνωστά σωματίδια με μάζες m_1, m_2.*

(α) Ποια ποσότητα είναι μεγαλύτερη η Μ ή η $m_1 + m_2$; Αν υπάρχει υπόνοια ότι δημιουργείται και ένα τρίτο σωματίδιο, μηδενικής μάζας, το οποίο όμως δεν είναι ανιχνεύσιμο, εξακολουθεί να ισχύει η παραπάνω συσχέτιση των μαζών Μ, m_1, m_2.;

(β) Πώς κινούνται τα δύο σωματίδια (αν είναι μόνο δύο) μετά τη διάσπαση; Αν δημιουργείται και τρίτο σωματίδιο αλλάζουν τα πράγματα όσον αφορά στην κίνηση των δύο πρώτων;

(γ) Τι κινητική ενέργεια θα περιμένατε να έχει το σωματίδιο m_1 (αν δημιουργούνταν τα 2 μόνο σωματίδια); Εκτελώντας πολλά τέτοια πειράματα αυθόρμητης διάσπασης του Μ παρατηρούμε το σωματίδιο 1 να εμφανίζεται με ένα εύρος κινητικών ενεργειών και όχι με μια συγκεκριμένη κινητική ενέργεια. Τι θα συμπεραίνατε σχετικά με το αν δημιουργούνται μόνο δύο σωματίδια;

(δ) Δείξτε ότι στην περίπτωση που δημιουργούνται τα 3 προαναφερθέντα σωματίδια και το m_1 δημιουργείται με μηδενική κινητική ενέργεια, τότε το τρίτο σωματίδιο θα έχει ενέργεια $E_3 = \frac{(M-m_1)^2 - m_2^2}{2(M-m_1)}$.

Λύση

(α) Επειδή η συνολική ενέργεια παραμένει σταθερή, πρέπει $E = E_1 + E_2$.
Το σωματίδιο μάζας Μ ήταν ακίνητο. Επομένως Ε=Μ.
Για το σωματίδιο μάζας m_1 ισχύει ότι $E_1 = \gamma_1 m_1 \geq m_1$. Ομοίως $E_2 \geq m_2$.
Επομένως $M = E = E_1 + E_2 \geq m_1 + m_2$

Αν υπάρχει και τρίτο σωματίδιο τότε
$M = E = E_1 + E_2 + E_3 > E_1 + E_2 \geq m_1 + m_2$

(β) Επειδή η χωρική ορμή παραμένει σταθερή και αρχικά ήταν μηδέν, θα πρέπει να παραμείνει μηδέν. Επομένως, αν τα παραγόμενα σωματίδια είναι δύο τότε κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις με ορμές ίσου μέτρου. Αν τα σωματίδια είναι τρία, τότε κινούνται προς τυχαίες κατευθύνσεις και οι ορμές τους ικανοποιούν την σχέση $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$.

(γ) Επειδή η συνολική τετραορμή παραμένει σταθερή, προκύπτει ότι: $P = P_1 + P_2 \Rightarrow P - P_1 = P_2 \Rightarrow P^2 + P_1^2 - 2PP_1 = P_2^2 \Rightarrow$
$M^2 + m_1^2 + 2PP_1 = m_2^2$ (1)
Ισχύει ότι $P = \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix}$ και $P_1 = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vec{p}_1 \end{bmatrix}$.
Επομένως $PP_1 = -ME_1$. Αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει ότι:

$$M^2 + m_1^2 - 2ME_1 = m_2^2 \Rightarrow E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}$$

Η κινητική ενέργεια του σωματιδίου υπολογίζεται άμεσα.

$$T_1 = E_1 - m_1 = \frac{(M - m_1)^2 - m_2^2}{2M}$$

(δ) Και πάλι από την αρχή διατήρηση της τετραορμής προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} &P = P_1 + P_2 + P_3 \Rightarrow P - P_1 - P_3 = P_2 \Rightarrow \\ &P^2 + P_1^2 + P_3^2 - 2PP_1 - 2PP_3 + 2P_1P_3 = P_2^2 \Rightarrow \\ &M^2 + m_1^2 + 0 + 2PP_1 + 2PP_3 - 2P_1P_3 = m_2^2 \qquad (2) \end{aligned}$$

Ισχύει ότι: $P = \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix}$, $P_1 = \begin{bmatrix} m_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $P_3 = \begin{bmatrix} E_3 \\ \vec{p}_3 \end{bmatrix}$
Επομένως $PP_1 = -ME_1$, $PP_3 = -ME_3$, $P_1P_3 = -m_1E_3$.
Αντικαθιστώντας στην (2) προκύπτει ότι

$$M^2 + m_1^2 - 2Mm_1 - 2ME_3 + 2m_1E_3 = m_2^2 \Rightarrow E_3 = \frac{(M - m_1)^2 - m_2^2}{2(M - m_1)}$$

Άσκηση 9.5.19 *Σώμα μάζας M κινείται με ταχύτητα $\vec{v} = v\hat{x}$ με $v > 0$. Μπροστά του (προς την κατεύθυνση της κίνησης του) βρίσκεται ένα τοίχωμα κάθετο στον άξονα x το οποίο κινείται και αυτό με ταχύτητα $\vec{w} = w\hat{x}$.*

(α) Ποια η ταχύτητα ανάκρουσης του σώματος (μετά την ελαστική του κρούση στο τοίχωμα) σύμφωνα με τη νευτώνεια μηχανική ;

(β) Ποια η ταχύτητα ανάκρουσης του σώματος (μετά την ελαστική του κρούση στο τοίχωμα) σύμφωνα με τη θεωρία της σχετικότητας;

(γ) Ποια είναι η συνθήκη έτσι ώστε το ανακρουσμένο σωματίδιο να αλλάξει φορά κίνησης, κατά Νεύτωνα;

(δ) Ποια είναι η συνθήκη έτσι ώστε το ανακρουόμενο σωματίδιο να αλλάξει φορά κίνησης, θεωρώντας σχετικιστική την κρούση;

(ε) Δείξτε ότι οι απαντήσεις στα ερωτήματα (β) και (δ) συμπίπτουν με εκείνες των ερωτημάτων (α) και (γ) αντίστοιχα στο όριο των κλασικών μη σχετικιστικών ταχυτήτων.

Λύση

Έστω Σ το σύστημα εργαστηρίου και Σ΄ το σύστημα ηρεμίας του τοιχώματος. Επειδή το τοίχωμα έχει άπειρη μάζα, η ταχύτητα του σώματος στο Σ΄ μετά την κρούση είναι αντίθετη της ταχύτητας πριν από αυτήν.

(α),(γ) Η ταχύτητα του σώματος στο Σ΄ πριν την κρούση είναι $v'_b = v - w$. Επομένως, μετά την κρούση, η ταχύτητα του σώματος στο Σ΄ είναι $v'_a = -v'_b = -v + w$. Μετά την κρούση η ταχύτητα του σώματος στο Σ είναι

$$v_a = v'_a + w = 2w - v \quad (1)$$

Για να αλλάξει φορά κίνησης το ανακρουόμενο σωματίδιο πρέπει

$$v_a < 0 \Leftrightarrow v > 2w \quad (2)$$

(β), (δ): Η τετραταχύτητα του σώματος στο Σ πριν την κρούση είναι:

$$U_b = \gamma_v \begin{bmatrix} 1 \\ v \end{bmatrix}$$

Η τετραταχύτητα του σώματος στο Σ΄ πριν την κρούση είναι:

$$U'_b = \Lambda(w)U_b = \gamma_w\gamma_v \begin{bmatrix} 1 & -w \\ -w & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ v \end{bmatrix} = \gamma_w\gamma_v \begin{bmatrix} 1 - vw \\ -w + v \end{bmatrix}$$

Η τετραταχύτητα του σώματος στο Σ΄ μετά την κρούση είναι:

$$U'_a = \gamma_w\gamma_v \begin{bmatrix} 1 - vw \\ w - v \end{bmatrix}$$

Η τετραταχύτητα του σώματος στο Σ μετά την κρούση είναι:

$$U_a = \Lambda(-w)U'_a = \gamma_w^2\gamma_v \begin{bmatrix} 1 & w \\ w & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - vw \\ w - v \end{bmatrix} = \gamma_w^2\gamma_v \begin{bmatrix} 1 + w^2 - 2vw \\ 2w - vw^2 - v \end{bmatrix}$$

Η ταχύτητα του σώματος στο Σ μετά την κρούση είναι:

$$v_a = \frac{u_a^1}{u_a^0} = \frac{2w - vw^2 - v}{1 + w^2 - 2vw}$$

Αποκαθιστώντας τις μονάδες

$$v_a = \frac{2w - v - v\frac{w^2}{c^2}}{1 + \frac{w^2}{c^2} - 2v\frac{w}{c}} \quad (3)$$

Για να αλλάξει φορά κίνησης το ανακρουόμενο σωματίδιο πρέπει

$$v_a < 0 \Leftrightarrow v > \frac{2w}{1 + \frac{w^2}{c^2}} \quad (4)$$

(ε) Στο όριο μη σχετικιστικής κίνησης του τοιχώματος $\frac{w}{c} \simeq 0$. Οι σχέσεις (3) και (4) γίνονται $v_a \simeq 2w - v$ και $v > 2w$ ανακτώντας προσεγγιστικά τις (1) και (2).

Άσκηση 9.5.20 *Κατά την σύγκρουση δύο σωματιδίων με μάζα ηρεμίας m το κα-*

θένα παράγονται δύο νέα σωματίδια με μάζα ηρεμίας 2m το καθένα. Μελετάμε την κρούση στο σύστημα κέντρου ορμής. Ποια η ταχύτητα των προϊόντων σωματιδίων ως συνάρτηση του s όπου s ένας αριθμητικός παράγοντας που καθορίζει πόσο μεγάλη είναι η κινητική ενέργεια του καθενός από τα δύο αντιδρώντα σωματίδια σύμφωνα με τη σχέση T = sm; Ποια η ελάχιστη τιμή του s για την οποία μπορεί να επιτευχθεί η αντίδραση;

Λύση

Στο σύστημα κέντρου ορμής, οι ορμές των δύο σωματιδίων είναι αντίθετες. Επειδή τα σωματίδια έχουν ίσες μάζες θα έχουν και ίσες ενέργειες. Έστω Ε, Ε΄ η ενέργεια κάθε σωματιδίου πριν και μετά την κρούση.
Ισχύει ότι $E = m + T = m(s + 1)$.
Επειδή η συνολική ενέργεια μένει σταθερή πρέπει
$2E = 2E' \Rightarrow E' = m(s + 1)$
Για να μπορεί να επιτευχθεί η αντίδραση πρέπει και αρκεί
$E' > 2m \Leftrightarrow s + 1 > 2 \Leftrightarrow s > 1$
Στην περίπτωση που s>1 η ορμή κάθε σωματιδίου έχει μέτρο
$p' = \sqrt{E'^2 - (2m)^2} = m\sqrt{(s + 1)^2 - 4}$
Η ταχύτητα κάθε σωματιδίου έχει μέτρο $v' = \frac{p'}{E'} = \frac{\sqrt{(s+1)^2-4}}{s+1} < 1$

Άσκηση 9.5.21 *Ακίνητο σωματίδιο μάζας M διασπάται αυθόρμητα σε δύο σωματίδια με μάζες m_1 και m_2 αντστοιχα.*

(α) Ελέγξτε εάν είναι δυνατόν το άθροισμα των μαζών ηρεμίας των προϊόντων $m_1 + m_2$ να είναι μεγαλύτερο από τη μάζα M.

(β) Υπολογίστε την κινητική ενέργεια του σωματιδίου μάζας m_1 συναρτήσει των M, m_1, m_2.

(γ) Εάν οι μάζες των σωματιδίων είναι $m_1 = m_2 = M/k$, πόσο χρόνο χρειάζεται το σωματίδιο 2, σύμφωνα με το σωματίδιο 1, για να απομακρυνθεί σε απόσταση L από το 1;

(δ) Δικαιολογήστε το προηγούμενο αποτέλεσμα στις περιπτώσεις $k \to 2$ και $k \to +\infty$

Λύση

(α) Έστω E, E_1, E_2 οι ενέργειες των τριών σωματιδίων και T_1, T_2 οι κινητικές ενέργειες των παραγόμενων σωματιδίων.
Ισχύει ότι: $E = E_1 + E_2 \Rightarrow M = m_1 + m_2 + T_1 + T_2$
Επειδή η κινητική ενέργεια είναι μη αρνητική συμπεραίνουμε ότι $M \geq m_1 + m_2$

(β) Έστω P, P_1, P_2 οι τετραορμές των τριών σωματιδίων. Ισχύει ότι
$P = P_1 + P_2 \Rightarrow P - P_1 = P_2 \Rightarrow P^2 + P_1^2 - 2PP_1 = P_2^2 \Rightarrow$
$$-M^2 - m_1^2 - 2PP_1 = -m_2^2 \tag{1}$$

Επειδή $P = \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix}$ και $P_1 = \begin{bmatrix} E_1 \\ p_1 \end{bmatrix}$ συμπεραίνουμε ότι $PP_1 = -ME_1$.
Αντικαθιστώντας στην (1)

$$-M^2 - m_1^2 + 2ME_1 = -m_2^2 \Rightarrow E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}$$

Η κινητική ενέργεια του σωματιδίου μάζας m_1 είναι:

$$T_1 = E_1 - m_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2 - 2Mm_1}{2M} = \frac{(M - m_1)^2 - m_2^2}{2M} \qquad (2)$$

(γ) Από την αρχή διατήρησης της ορμής προκύπτει ότι τα παραγόμενα σωματίδια έχουν αντίθετες ορμές. Επειδή έχουν και ίσες μάζες θα έχουν αντίθετες ταχύτητες, ίσες ενέργειες και ίσες κινητικές ενέργειες.
Αντικαθιστώντας στην σχέση (2) $m_1 = m_2 = M/k$ και $T_1 = m_1(\gamma - 1)$ προκύπτει ότι:

$$\frac{\mathrm{M}}{k}(\gamma - 1) = M\frac{k-2}{2k} \Rightarrow \gamma = \frac{k}{2} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{k^2 - 4}}{k}$$

Το ένα σωματίδιο κινείται με ταχύτητα $v_1 = -v$ και το άλλο με ταχύτητα $v_2 = v$.
Η σχετική ταχύτητα του σωματιδίου 2 σε σχέση με το σωματίδιο 1 είναι:

$$v_{\sigma\chi} = \frac{v_2 - v_1}{1 - v_2 v_1} = \frac{2v}{1 + v^2} = \frac{k\sqrt{k^2 - 4}}{k^2 - 2}$$

Ο χρόνος που απαιτείται (στο σύστημα ηρεμίας του 1) για να απομακρυνθεί το 2 κατά L είναι

$$\Delta t = \frac{L}{v_{\sigma\chi}} = L\frac{k^2 - 2}{k\sqrt{k^2 - 4}} = L\frac{1 - \frac{2}{k^2}}{\sqrt{1 - \frac{4}{k^2}}}$$

(δ) Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{k \to 2} \Delta t = \infty$ και $\lim\limits_{k \to \infty} \Delta t = \frac{L}{c}$.
Τα αποτελέσματα αυτά ήταν αναμενόμενα:

Όταν k=2, τότε $m_1 + m_2 = M$. Αυτό σημαίνει ότι τα παραγόμενα σωματίδια είναι ακίνητα. Επομένως ο χρόνος για να απομακρυνθεί το ένα σε σχέση με το άλλο σε απόσταση L είναι άπειρος.

Όταν $k \to \infty$, τότε $m_1 = m_2 \simeq 0$. Πρόκειται επομένως για σωματίδια που κινούνται περίπου με την ταχύτητα του φωτός. Συνεπώς το ένα βλέπει το άλλο σαν φωτόνιο. Άρα η σχετική ταχύτητα του ενός ως προς το άλλο είναι περίπου c. Επομένως ο χρόνος που απαιτείται για να απομακρυνθεί το ένα από το άλλο κατά L είναι L/c.

Άσκηση 9.5.22 *Σε ένα εργαστήριο επιχειρείται η δημιουργία σωματιδίων μεγάλης μάζας με σύγκρουση πολλών ισχυρών δεσμών λέιζερ. Συγκεκριμένα, N λέιζερ που* *παράγουν φωτόνια συχνότητας f, είναι τοποθετημένα στις κορυφές ενός κανονικού N-γώνου και είναι στραμμένα με τέτοιο τρόπο ώστε όλες οι δέσμες να συγκλίνουν στο κέντρο του N-γώνου.*

(α) Να βρεθεί η μάζα M του προκύπτοντος σωματιδίου, όταν παράγεται ένα μόνο σωματίδιο.

(β) Έστω, ότι ένα από τα λέιζερ βγαίνει εκτός λειτουργίας. Ποιο ποσοστό της μάζας M θα έχει το παραγόμενο σωματίδιο (με την προϋπόθεση ότι παράγεται και πάλι μόνον ένα σωματίδιο), και ποια η ταχύτητα του στο εργαστήριο;

(γ) Μπορούμε από τη διεύθυνση κίνησης του σωματιδίου να καταλάβουμε ποιο λέιζερ βγήκε εκτός λειτουργίας;

Λύση

(α) Έστω $P_{(i)} = \begin{bmatrix} hf \\ \vec{p}_{(i)} \end{bmatrix}$ η τετραορμή του φωτονίου του i-οστού λέιζερ. Λόγω συμμετρίας το άθροισμα των χωρικών συνιστωσών των τετραορμών των φωτονίων είναι μηδέν.

Επομένως για την τετραορμή των φωτονίων ισχύει ότι $P_\varphi = \sum_{i=1}^{N} P_{(i)} = \begin{bmatrix} Nhf \\ 0 \end{bmatrix}$.

Από διατήρηση τετραορμής συμπεραίνουμε ότι $\begin{bmatrix} Nhf \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix}$.

Επομένως η μάζα του προκύπτοντος σωματιδίου είναι $M = Nhf$.

(β) Θεωρούμε ότι το N-οστό λέιζερ τίθεται εκτός λειτουργίας. Θέτουμε $\hat{n}$ το διάνυσμα με κατεύθυνση από το N-στο λέιζερ προς το κέντρο του N-γώνου. Για την τετραορμή του συστήματος των φωτονίων ισχύει ότι:

$$P'_\varphi = \sum_{i=1}^{N-1} P_{(i)} = \sum_{i=1}^{N} P_{(i)} - P_{(N)} = \begin{bmatrix} Nhf \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} hf \\ hf\hat{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N-1)hf \\ -hf\hat{n} \end{bmatrix}$$

Έστω M′, E′, $\vec{p}'$ η μάζα η ενέργεια και η ορμή του προκύπτοντος σωματιδίου. Επειδή η τετραορμή παραμένει σταθερή συμπεραίνουμε ότι
$P'_\sigma = P_\varphi \Rightarrow P'^2_\sigma = P'^2_\varphi \Rightarrow -\mathrm{M}'^2 = -(\mathrm{N}-1)^2 h^2 f^2 + h^2 f^2 \Rightarrow$
$M' = hf\sqrt{N(N-2)} \Rightarrow \frac{M'}{M} = \frac{\sqrt{N(N-2)}}{N} = \sqrt{\frac{N-2}{N}}$

Για την ταχύτητα του σωματιδίου ισχύει ότι

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{P^0} = \frac{-hf\hat{n}}{(N-1)hf} = -\frac{1}{N-1}\hat{n}$$

(γ) Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα του σωματιδίου έχει κατεύθυνση από το κέντρο του N- γώνου προς το N-στο λέιζερ. Συνεπώς το παραχθέν σωματίδιο θα κατευθυνθεί προς το χαλασμένο λέιζερ.

Άσκηση 9.5.23 *Ως προς κάποιο παρατηρητή Σ, ένα φωτόνιο κινείται στην κατεύθυνση* $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \hat{y})$ *και προσκρούει σε ένα κάτοπτρο, το οποίο είναι παράλληλο στο επίπεδο y- z και κινείται κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητα* $\vec{v} = v\hat{x}$. *Υπολογίστε τη διεύθυνση κίνησης του φωτονίου στο σύστημα Σ μετά την ανάκλαση του στο κάτοπτρο.*

Λύση

Έστω p το μέτρο της ορμής του φωτονίου πριν την «κρούση» του με το κάτοπτρο. Επομένως η χωρική ορμή του φωτονίου πριν την κρούση είναι στο Σ $\vec{p_b} = \frac{p}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \hat{y}) = p(cos\varphi\hat{x} + \sin\varphi\hat{y})$ με φ=π/4.

Η τετραορμή του στο Σ είναι: $P_b = \begin{bmatrix} p \\ p\cos\varphi \\ p\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$.

Στο σύστημα ηρεμίας του κατόπτρου η τετραορμή του φωτονίου πριν την κρούση είναι:

$$P_b' = \Lambda(v)P_b = p\begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = p\begin{bmatrix} \gamma - \gamma\beta\cos\varphi \\ -\gamma\beta + \gamma\cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Στο σύστημα ηρεμίας του κατόπτρου, κατά την ανάκλαση του φωτονίου, οι συνιστώσες της ορμής που είναι παράλληλες στο κάτοπτρο δεν μεταβάλλονται και οι συνιστώσα που είναι κάθετη σε αυτό αντιστρέφεται. Επομένως η τετραορμή του φωτονίου στο σύστημα ηρεμίας του κατόπτρου μετά την «κρούση» είναι:

$$P_a' = p\begin{bmatrix} \gamma - \gamma\beta\cos\varphi \\ \gamma\beta - \gamma\cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Για την τετραορμή στο σύστημα Σ μετά την κρούση ισχύει ότι:

$$P_a = \Lambda(-v)P_a' = p\begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma - \gamma\beta\cos\varphi \\ \gamma\beta - \gamma\cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$p_{a(x)} = p\gamma^2(2\beta - \beta^2\cos\varphi - \cos\varphi)$
$p_{a(y)} = p\sin\varphi$

Η διεύθυνση διάδοσης του ανακλώμενου φωτονίου είναι:

$$\hat{n}_a = \frac{1}{\sqrt{\gamma^4(2\beta - \beta^2\cos\varphi - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}}\left[\gamma^2(2\beta - \beta^2\cos\varphi - \cos\varphi)\hat{x} + sin\varphi y\right]$$

Άσκηση 9.5.24 *Φωτόνιο ενέργειας E_1 στο εργαστήριο σκεδάζεται ελαστικά σε ηλεκτρόνιο, το οποίο αρχικά ηρεμεί στο εργαστήριο.*

(α) Υπολογίστε την ενέργεια του σκεδαζόμενου φωτονίου συναρτήσει της γωνίας σκέδασης του φωτονίου ϕ_γ. Δίδεται η μάζα του ηλεκτρονίου m.

(β) Υπολογίστε, δεδομένης της γωνίας σκέδασης του φωτονίου ϕ_γ, τη γωνία ανάδρασης ϕ_e του ηλεκτρονίου μετά τη σκέδαση.

Λύση

(α) Έστω $(E_1, \vec{p}_1)$, $(E_2, \vec{p}_2)$ οι τετραορμές των φωτονίων πριν και μετά την σκέδαση και $(E_3, \vec{p}_3)$ η τετραορμή του ηλεκτρονίου μετά από αυτήν.
Επειδή η συνολική τετραορμή παραμένει σταθερή, ισχύει ότι: $E_1 + mc^2 = E_2 + E_3 \Rightarrow E_3 = E_1 - E_2 + mc^2$ (1)
$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_3$ (2)
Από την (2) προκύπτει ότι:
$(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 = \vec{p}_3^2 \Rightarrow p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\varphi_\gamma = p_3^2 \Rightarrow$
$\mathrm{E}_1^2 + \mathrm{E}_2^2 - 2\mathrm{E}_1\mathrm{E}_2\cos\varphi_\gamma = p_3^2c^2 = E_3^2 - m^2c^4$ (3)
Αντικαθιστώντας την E_3 από την (1), η (3) μετατρέπεται στην:
$E_2 = \frac{E_1mc^2}{mc^2 + E_1(1-\cos\varphi_\gamma)}$

(β) Από την (2) προκύπτει ότι:
$(\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2 = \vec{p}_2^2 \Rightarrow p_1^2 + p_3^2 - 2p_1p_3\cos\varphi_e = p_2^2 \Rightarrow$
$E_1^2 + p_3^2c^2 - 2E_1p_3c\cos\varphi_e = \mathrm{E}_2^2$ (4)
Δεδομένης της E_2 μπορούμε από την (1) να υπολογίσουμε την E_3. Από την σχέση ενέργειας –ορμής για το ηλεκτρόνιο υπολογίζουμε την p_3. Από την (4) υπολογίζουμε το $cos\phi_e$.

Άσκηση 9.5.25 *Ένα σωματίδιο μάζας m και κινητικής ενέργειας T στο σύστημα εργαστηρίου προσκρούει σε δεύτερο ακίνητο ίδιο σωματίδιο και τα δύο σωματίδια συνενώνονται σε ένα.*

(α) Αποδείξτε ότι το συσσωμάτωμα έχει μάζα μεγαλύτερη από 2m.

(β) Πόση είναι η ταχύτητα του νέου σωματιδίου;

(γ) Το νέο σωματίδιο διασπάται αυθόρμητα σε δύο σωματίδια ίσης μάζας. Ποια είναι η μέγιστη δυνατή αυτή μάζα;

Λύση

(α) Έστω M η μάζα του συσσωματώματος και P_1, P_2, P οι τετραορμές των δύο σωματιδίων και του συσσωματώματος. Ισχύει ότι(c=1):
$P_1 + P_2 = P \Rightarrow P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 = P^2 \Rightarrow -m^2 - m^2 + 2P_1P_2 = -M^2$ (1)
Για τις τετραορμές των δύο σωματιδίων πριν την κρούση ισχύει ότι:
$P_1 = \begin{bmatrix} m+T \\ p \end{bmatrix}$ και $P_2 = \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}$
Επομένως $P_1P_2 = -m^2 - mT$

Αντικαθιστούμε στην σχέση (1):
$4m^2 + 2mT = M^2 \Rightarrow M^2 > 4m^2 \Rightarrow M > 2m.$

(β) Επειδή η συνολική τετραορμή παραμένει σταθερή, προκύπτει ότι:

$$P_1 + P_2 = P \Rightarrow \begin{bmatrix} 2m+T \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma M \\ \gamma M v \end{bmatrix} \Rightarrow v = \frac{p}{2m+T}$$

Η ορμή του 1ου σωματιδίου μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση ενέργειας ορμής:
$E_1^2 = p^2 + m^2 \Rightarrow (m+T)^2 = p^2 + m^2 \Rightarrow p = \sqrt{T(2m+T)}$
Η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι τελικά:

$$v = \frac{\sqrt{T(2m+T)}}{2m+T} = \sqrt{\frac{T}{2m+T}}$$

(γ) Θεωρούμε το σύστημα κέντρου ορμής, η ταχύτητα του οποίου είναι:
$\frac{p}{E} = \frac{p}{2m+T} = v$
Στο σύστημα αυτό η συνολική χωρική ορμή είναι μηδέν. Έστω ότι το συσσωμάτωμα διασπάται σε δύο σωματίδια μαζών ίσων με m΄ ορμών μέτρου p΄ και ενεργειών E΄.
Από την διατήρηση της τετραορμής προκύπτει ότι:

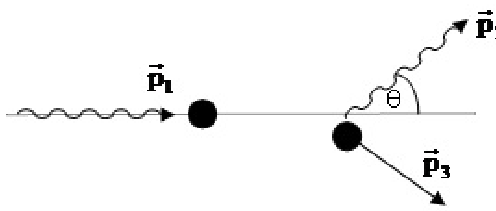
$$\begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ p' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E' \\ -p' \end{bmatrix} \Rightarrow M = 2E' \Rightarrow$$

$$M = 2\sqrt{m'^2 + p'^2} \Rightarrow 4m'^2 = M^2 - 4p'^2$$

Επομένως η μέγιστη τιμή της m΄ αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή της p΄, η οποία είναι μηδέν. Στην περίπτωση αυτή το συσσωμάτωμα στο σύστημα εργαστηρίου δεν διασπάται αλλά χωρίζεται σε δύο ίσα τμήματα μάζας M/2 και ταχύτητας v.

Άσκηση 9.5.26 *Φωτόνιο συχνότητας f απορροφάται από ακίνητο ηλεκτρόνιο μάζας m. Εάν το ηλεκτρόνιο επανεκπέμπει το φωτόνιο σε γωνία θ ως προς την αρχική διεύθυνση του φωτονίου, υπολογίστε τη συχνότητα f΄ του εκπεμπόμενου φωτονίου.*

Λύση



Έστω $\vec{p}_1$ και $\vec{p}_2$ ορμές των φωτονίων πριν και μετά την κρούση και $\vec{p}_3$ η ορμή του σωματιδίου μετά την κρούση.
Επειδή η συνολική ορμή παραμένει σταθερή συμπεραίνουμε ότι:

$$\begin{aligned}&\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \Rightarrow \vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \vec{p}_3 \Rightarrow (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 = \vec{p}_3^{\,2} \Rightarrow \\ &p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\theta = p_3^2\end{aligned} \tag{1}$$

Για τις ορμές των φωτονίων ισχύει ότι $p_1 = \frac{E_1}{c}$ και $p_2 = \frac{E_2}{c}$.
Η ανωτέρω σχέση (1) γίνεται:

$$E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\theta = p_3^2c^2 \tag{2}$$

Από την σχέση ενέργειας ορμής για το σωματίδιο μετά την κρούση προκύπτει ότι:
$p_3^2c^2 = E_3^2 - m^2c^4$
Αντικαθιστώντας στην σχέση (2) προκύπτει ότι:

$$E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\theta = E_3^2 - m^2c^4 \tag{3}$$

Επειδή η συνολική ενέργεια παραμένει σταθερή:
$E_1 + mc^2 = E_2 + E_3 \Rightarrow E_3 = E_1 + mc^2 - E_2$
Με αντικατάσταση στην (3) καταλήγουμε στην σχέση:

$$E_2(E_1 - E_1\cos\theta + mc^2) = E_1mc^2 \Rightarrow E_2 = \frac{E_1mc^2}{E_1 - E_1\cos\theta + mc^2} \Rightarrow$$

$$f' = \frac{f\,mc^2}{hf - hf\cos\theta + mc^2}$$

Άσκηση 9.5.27 *Σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m, ακίνητο στο σύστημα αναφοράς Σ, διασπάται αυθόρμητα σε τρία φωτόνια.*

(α) Εξηγήστε γιατί οι τροχιές των φωτονίων θα βρίσκονται σε ένα επίπεδο,

(β) Υπολογίστε τις ενέργειες των τριών φωτονίων δεδομένου ότι οι τροχιές τους σχηματίζουν ίσες γωνίες,

(γ) Ένας παρατηρητής Σ', κινούμενος αντίθετα με ένα από τα φωτόνια, μετρά την ενέργεια του εν λόγω φωτονίου και τη βρίσκει ίση με mc^2. Ποια η ταχύτητα v του παρατηρητή σε σχέση με τον Σ και πόση είναι η ενέργεια των άλλων δύο φωτονίων ως προς τον Σ';

(δ)Ένας άλλος παρατηρητής Σ" κινείται με την ίδια ταχύτητα v ως προς τον Σ αλλά με αντίθετη κατεύθυνση απ' αυτήν του Σ'. Ποια η ενέργεια του κάθε φωτονίου ως προς αυτόν;

(ε) Αναμένατε να είναι τόση η διαφορά της συνολικής ενέργειας των φωτονίων για τον Σ' και τον Σ" ;

Λύση

(α) Το άθροισμα των 3-ορμών στο σύστημα του Σ πρέπει να είναι όση η 3-ορμή του σωματιδίου, δηλαδή, 0. Συνεπώς
$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0 \Rightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 - \vec{p}_3$
Η τροχιά λοιπόν του 1 πρέπει να είναι συνεπίπεδη με τις τροχιές των 2,3.

(β) Από τη στιγμή που οι τρεις 3-ορμές που έχουν άθροισμα 0 και σχηματίζουν μεταξύ τους ίσες γωνίες το τρίγωνο των 3-ορμών είναι ισόπλευρο και επομένως οι τρεις 3-ορμές έχουν ίσα μέτρα. Συνεπώς τα φωτόνια θα έχουν και ίσες ενέργειες. Προκειμένου το άθροισμα των τριών ενεργειών να ισούται με την ενέργεια mc^2, που είναι η αρχική ενέργεια του σωματιδίου, θα πρέπει οι τρεις ενέργειες να είναι $E_1 = E_2 = E_3 = \frac{mc^2}{3}$.

(γ) Δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το 1^o φωτόνιο κινείται κατά την θετική κατεύθυνση του άξονα x. Επομένως ο παρατηρητής Σ΄ κινείται με ταχύτητα v κατά την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x.

Η τετραορμή του 1ου φωτονίου στο Σ είναι $P_1 = \frac{E_1}{c}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{mc}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ο πίνακας του μετασχηματισμού Lorentz που συνδέει τον Σ΄ με τον Σ είναι:
$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{bmatrix}$
Η τετραορμή του 1ου φωτονίου στο Σ΄ είναι
$P_1' = \Lambda P_1 = \frac{\gamma mc}{3}\begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\gamma(\beta+1)mc}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Επομένως για την ενέργεια του 1ου φωτονίου στο Σ΄ ισχύει ότι :
$\frac{E'{}_1}{c} = \frac{\gamma(\beta+1)mc}{3} \Rightarrow E_1' = \frac{\gamma(\beta+1)mc^2}{3} \Rightarrow mc^2 = \frac{\gamma(\beta+1)mc^2}{3} \Rightarrow \gamma(\beta+1) = 3 \Rightarrow$
$\frac{\beta+1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 3 \Rightarrow \sqrt{\frac{(1+\beta)^2}{(1-\beta)(1+\beta)}} = 3 \Rightarrow \frac{1+\beta}{1-\beta} = 9 \Rightarrow \beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \gamma = \frac{5}{3}$

Η τετραορμή του 2ου φωτονίου στον Σ είναι:

$$P_2 = \frac{E_2}{c}\begin{bmatrix} 1 \\ \cos 120^\circ \\ \sin 120^\circ \end{bmatrix} = \frac{mc}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$
$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 & 4/3 & 0 \\ 4/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$P_2' = \Lambda P_2 = \frac{mc}{3}\begin{bmatrix} 5/3 & 4/3 & 0 \\ 4/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

Επομένως $E_2' = \frac{mc^2}{3}\left(\frac{5}{3} - \frac{4}{3}\frac{1}{2}\right) = \frac{mc^2}{3}$
Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε για την E_3'.
Παρατηρούμε ότι η συνολική ενέργεια των φωτονίων είναι

$$E' = E_1' + E_2' + E_3' = mc^2 + \frac{mc^2}{3} + \frac{mc^2}{3} = \frac{5}{3}mc^2 = \gamma mc^2$$

Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο: Κατά τον Σ΄ το αρχικό σωματίδιο κινείται με ταχύτητα v. Επομένως έχει συνολική ενέργεια γmc^2, η οποία μοιράζεται στα τρια φωτόνια.

(δ) Ο πίνακας του μετασχηματισμού Lorentz που συνδέει τον Σ´´ με τον Σ είναι:

$$\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 & -4/3 & 0 \\ -4/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_1'' = \tilde{\Lambda} P_1 = \frac{mc}{3} \begin{bmatrix} 5/3 & -4/3 & 0 \\ -4/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{E}_1'' = \frac{1}{9} mc^2$$

$$P_2'' = \tilde{\Lambda} P_2 = \frac{mc}{3} \begin{bmatrix} 5/3 & -4/3 & 0 \\ -4/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \Rightarrow E_2'' = \frac{7}{9} mc^2$$

$$P_3'' = \tilde{\Lambda} P_3 = \frac{mc}{3} \begin{bmatrix} 5/3 & -4/3 & 0 \\ -4/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \Rightarrow E_3'' = \frac{7}{9} mc^2$$

(ε) $E'' = (\frac{1}{9} + \frac{7}{9} + \frac{7}{9}) mc^2 = \frac{5}{3} mc^2 = \gamma mc^2$
Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο: Κατά τον Σ´´ το αρχικό σωματίδιο κινείται με ταχύτητα -v. Επομένως έχει συνολική ενέργεια γmc^2, η οποία μοιράζεται στα τρία φωτόνια.

Άσκηση 9.5.28 *Σωματίδιο συγκρούεται με άλλο ακίνητο σωματίδιο ίσης μάζας, οπότε τα δύο σωματίδια «εξαϋλώνονται». Μετά τη σύγκρουση παράγονται δύο φωτόνια ίσης συχνότητας f τα οποία, κινούνται στο επίπεδο x- y, εκατέρωθεν του άξονα x, σχηματίζοντα με αυτόν ίσες γωνίες φ τέτοιες ώστε cosφ=1/3.*

(α) Προσδιορίστε την ταχύτητα του κέντρου ορμής των φωτονίων (διάνυσμα)

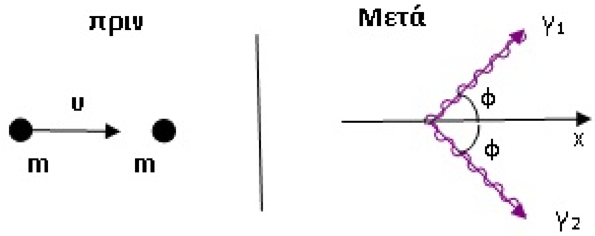
(β) Προσδιορίστε την ταχύτητα του κέντρου ορμής των σωματιδίων (διάνυσμα)

(γ) Προσδιορίστε την ταχύτητα και την ορμή του σωματιδίου βλήματος

(δ) Υπολογίστε τη συχνότητα ενός φωτονίου στο σύστημα κέντρου ορμής

(ε) Μπορείτε να εκτιμήσετε τη συχνότητα του άλλου φωτονίου (στο ίδιο σύστημα);
Δίνονται: Η μάζα m κάθε σωματιδίου, η σταθερά του Planck και η ταχύτητα του φωτός στο κενό.

Λύση



(α) Οι τετραορμές των δύο σωματιδίων πριν την κρούση και των δυο φωτονίων μετά είναι:

$$P_{(1)} = \gamma m \begin{bmatrix} c \\ \upsilon \\ 0 \end{bmatrix}, P_{(2)} = m \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_{(3)} = \frac{hf}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}, P_{(4)} = \frac{hf}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{bmatrix}$$

όπου γ=γ(υ).
Η τετραορμή του συστήματος των δύο φωτονίων μετά την κρούση είναι:
$P = P_{(3)} + P_{(4)} = \frac{2hf}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$
Για την παράμετρο $\vec{\beta}_{KO}$ του συτήματος κέντρου ορμής ισχύει ότι:
$\vec{\beta}_{KO} = \frac{\vec{p}}{E/c} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\hat{x}$

(β) Επειδή η συνολική τετραορμή παραμένει σταθερή το σύστημα κέντρου ορμής των δύο σωματιδίων συμπίπτει με το σύστημα κέντρου ορμής των δύο φωτονίων.

(γ) Επειδή η συνολική τετραορμή παραμένει σταθερή ισχύουν οι σχέσεις:
$\gamma mc + mc = \frac{2hf}{c}$ (1)
$\gamma m\upsilon = \frac{2hf}{c}\cos\varphi \Rightarrow \gamma m\upsilon = \frac{2hf}{c}\frac{1}{3}$ (2)
Διαιρώντας τις δύο σχέσεις κατά μέλη προκύπτει ότι:
$\frac{\gamma\beta}{\gamma+1} = \frac{1}{3}$ (3)
Ισχύει ότι

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \Rightarrow \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \gamma^2\beta^2 = \gamma^2 - 1$$

Συνεπώς, η (3) γίνεται:

$$\frac{\gamma^2\beta^2}{(\gamma+1)^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{\gamma^2-1}{(\gamma+1)^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{1}{9} \Rightarrow \gamma = \frac{5}{4} \Rightarrow \beta = \frac{3}{5}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ταχύτητα υ και η ορμή p του βλήματος είναι ίσες με $\upsilon = \frac{3}{5}c$ και $p = \gamma m\upsilon = \frac{5}{4}m\frac{3}{5}c = \frac{3}{4}mc$ αντιστοίχως.

Από την (1) υπολογίζουμε την συχνότητα των φωτονίων στο σύστημα εργαστηρίου:
$\gamma mc + mc = \frac{2hf}{c} \Rightarrow \frac{9}{4}mc = \frac{2hf}{c} \Rightarrow f = \frac{9mc^2}{8h}$

Η τετραορμή του 1ου φωτονίου στο σύστημα εργαστηρίου είναι:
$P_{(3)} = \frac{hf}{c}\begin{bmatrix} 1 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$

Ο μετασχηματισμός Lorentz που συνδέει το σύστημα κέντρου ορμής με το σύστημα εργαστηρίου είναι:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma_{KO} & -\gamma_{KO}\beta_{KO} & 0 \\ -\gamma_{KO}\beta_{KO} & \gamma_{KO} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{3\sqrt{2}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Η τετραορμή του πρώτου φωτονίου στο σύστημα κέντρου ορμής είναι:

$$P'_{(3)} = \Lambda P_{(3)} = \frac{hf}{c}\begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{3\sqrt{2}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$$

Επομένως για την συχνότητα του 1ου φωτονίου στο σύστημα κέντρου ορμής ισχύει ότι:

$$f'_1 = f\frac{3\sqrt{2}}{4}(1 - \frac{1}{3}\cos\varphi) = \frac{9mc^2}{8h}\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{1}{3}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\frac{mc^2}{h}$$

Στο σύστημα κέντρου ορμής, η συνολική (χωρική) ορμή είναι μηδέν. Επομένως τα δύο φωτόνια έχουν αντίθετες ορμές. Ως εκ τούτου έχουν ίσες ενέργειες και συνεπώς ίσες συχνότητες.

9.6 Ηλεκτρομαγνητισμός

Στα προβλήματα που ακολουθούν θεωρήστε δεδομένες τις σχέσεις μετασχηματισμού των πεδίων

$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}$	$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}$
$\vec{\mathrm{E}}'_{\perp} = \gamma(\vec{\mathrm{E}}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B})$	$\vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E})$

και τον ανταλλοίωτο ηλεκτρομαγνητικό τανυστή

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ -E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ -E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{bmatrix}$$

Δίνονται επίσης οι διανυσματικές ταυτότητες

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \text{και} \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

Άσκηση 9.6.1 *(α) Να γραφεί ο τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου για ένα πεδίο που σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς έχει τη μορφή* $\vec{E} = E\hat{x}$, $\vec{B} = B\hat{z}$.

(β) Υπολογίστε τα δύο αναλλοίωτα του πεδίου αυτού.

(γ) Σε ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με ταχύτητα $\vec{v} = v\hat{y}$ *να υπολογιστούν οι τιμές του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου.*

(δ) Δείξτε ότι τα αναλλοίωτα που υπολογίσατε πιο πριν είναι πράγματι αναλλοίωτες ποσότητες, ανεξάρτητες του συστήματος αναφοράς στο οποίο αυτές υπολογίζονται.

Λύση

(α) Ο τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε μορφή πίνακα είναι ο:

$$[F^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & B & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(β) Τα δύο αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι:
$s_1 = \vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ και $s_2 = \vec{E}^2 - \vec{B}^2 = E^2 - B^2$.

(γ) Ισχύει ότι $\vec{E}_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} = 0$. Συνεπώς $\vec{E}'_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel} = 0$

Επομένως

$\vec{E}' = \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \gamma(E\hat{x} + vB\hat{y} \times \hat{z}) = \gamma(E + vB)\hat{x}$

$\vec{B}' = \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}) = \gamma(B\hat{z} - vE\hat{y} \times \hat{x}) = \gamma(B + vE)\hat{z}$

(δ) Ισχύει ότι $s'_1 = \vec{E}' \cdot \vec{B}' = 0 = s_1$

$s'_2 = \vec{E}'^2 - \vec{B}'^2 = \gamma^2(E + vB)^2 - \gamma^2(B + vE)^2 =$

$\gamma^2(E^2 + v^2B^2 - B^2 - v^2E^2) = \gamma^2(1 - v^2)(E^2 - B^2) = s_2$

Άσκηση 9.6.2 *Στο σύστημα Σ το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο είναι* $\vec{E} = A\hat{x}$ *και* $\vec{B} = \frac{A}{2}\hat{y}$ *με* $A \neq 0$.

(α) Υπολογίστε τη συναλλοίωτη μορφή του τανυστή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $F_{\mu\nu}$.

(β) Βρείτε κατάλληλο πίνακα μετασχηματισμού Lorentz που μετασχηματίζει τον τανυστή ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $F^{\mu\nu}$ *από τη μορφή*

$$\begin{bmatrix} 0 & A & 0 & 0 \\ -A & 0 & 0 & -A/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{στη μορφή} \quad \begin{bmatrix} 0 & A' & 0 & 0 \\ -A' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

όπου A, A΄ θετικές σταθερές.

(γ) Το συγκεκριμένο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι ηλεκτρικού, ή μαγνητικού τύπου;

(δ) Υπολογίστε τον λόγο A΄/ A.

<u>Λύση</u>

(α) Ισχύει ότι $[F^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & E^T \\ -E & F_B \end{bmatrix}$

Επομένως

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha} F^{\alpha\beta} \eta_{\nu\beta} \Rightarrow [F_{\mu\nu}] = \eta [F^{\alpha\beta}] \eta^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E^T \\ -E & F_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[F_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & -E^T \\ -E & F_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -E^T \\ E & F_B \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[F_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & -A & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & -A/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(β) Από την σχέση μετασχηματισμού της παράλληλης συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου προκύπτει ότι $\vec{B}' = 0 \Rightarrow \vec{B}'_{\|} = 0 \Rightarrow \vec{B}_{\|} = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{B}$.
Δοκιμάζουμε πίνακα προώθησης Lorentz στην διεύθυνση του άξονα z.

$$F' = \Lambda F \Lambda^T = \frac{A}{2} \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma v & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Lambda^T =$$

$$\frac{A}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2\gamma - \gamma v & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\gamma v + \gamma & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma v & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} =$$

$$\frac{A}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2\gamma - \gamma v & 0 & 0 \\ -2\gamma + \gamma v & 0 & 0 & 2\gamma v - \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\gamma v + \gamma & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Για να είναι $\vec{B}' = 0$ πρέπει $v = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \gamma v = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(γ) Επειδή υπάρχει σύστημα αναφοράς, στο οποίο να μην υπάρχει μαγνητικό πεδίο, είναι ηλεκτρικού τύπου.

(δ) Αντικαθιστώντας $v = \frac{1}{2}$ στον F΄ προκύπτει ότι

$$F' = \frac{A\sqrt{3}}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως $\frac{A'}{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Άσκηση 9.6.3 *Στο σύστημα Σ το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο είναι $\vec{E} = A\hat{x}$ και $\vec{B} = \frac{A}{2}(\hat{x} + \hat{y})$ με $A \neq 0$.*

(α) Με χρήση των αναλλοιώτων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου ελέγξτε:

(α$_1$) αν υπάρχει άλλο σύστημα αναφοράς στο οποίο το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο να γίνουν κάθετα,

(α$_2$) αν υπάρχει άλλο σύστημα αναφοράς στο οποίο είτε το ηλεκτρικό πεδίο είτε το μαγνητικό πεδίο να μηδενίζεται,

(α$_3$) αν υπάρχει άλλο σύστημα αναφοράς στο οποίο το ηλεκτρικό πεδίο και το μαγνητικό πεδίο να είναι αντιπαράλληλα.

(β) Δεδομένου ότι υπάρχει σύστημα στο οποίο το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο γίνονται ομοπαράλληλα, να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου στο σύστημα αυτό.

(γ) Υπολογίστε τα στοιχεία του τανυστή $F^{\mu}{}_{\nu}$ του εν λόγω πεδίου στο σύστημα Σ.

Λύση

(α) Τα αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι
$s_1 = \vec{E} \cdot \vec{B} = \frac{A^2}{2} > 0$ και $s_2 = E^2 - B^2 = A^2 - \frac{A^2}{2} = \frac{A^2}{2} > 0$

(α$_1$) Αν υπήρχε σύστημα αναφοράς στο οποίο τα δύο πεδία να είναι αμοιβαία κάθετα, τότε σε αυτό το σύστημα θα ήταν $s_1 = 0$. Αυτό είναι άτοπο διότι $s_1 > 0$.

(α$_2$) Αν υπήρχε σύστημα αναφοράς στο οποίο να μηδενίζεται κάποιο από τα πεδία τότε σε αυτό το σύστημα θα ήταν $s_1 = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο.

(α$_3$) Αν υπήρχε σύστημα στο οποίο τα πεδία να είναι αντιπαράλληλα τότε $s_1 < 0$. Άρα δεν υπάρχει.

(β) Στο σύστημα Σ΄ που τα πεδία είναι ομοπαράλληλα ισχύει ότι $\vec{E} = E'\hat{n}$ και $\vec{B} = B'\hat{n}$, όπου $\hat{n}$ η κοινή κατεύθυνση και E΄, B΄>0. Πρέπει $\vec{E}' \cdot \vec{B}' = \vec{E} \cdot \vec{B} \Rightarrow E'B' = \frac{A^2}{2}$ και $E'^2 - B'^2 = E^2 - B^2 = \frac{A^2}{2}$

Η λύση του παραπάνω συστήματος είναι: $E' = \frac{A}{2}\sqrt{\sqrt{5}+1}$ και $B' = \frac{A}{2}\sqrt{\sqrt{5}-1}$

(γ) $$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} = \frac{A}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F^{\mu}{}_{\nu} = F^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu} = \frac{A}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Σχόλιο

Μπορούμε να γράψουμε τον ανταλλοίωτο τανυστή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου ως:$[F^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & E^T \\ -E & F_B \end{bmatrix}$ με E ένα 3x1 πίνακα στήλη, E^T έναν 1x3 πίνακα γραμμή και F_B έναν 3x3 πίνακα.

Ομοίως ο μετρικός τανυστής η γράφεται ως $[\eta_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$

Ισχύει ότι

$$F^{\mu}{}_{\nu} = F^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu} \Rightarrow [F^{\mu}{}_{\nu}] = [F^{\mu\alpha}][\eta_{\alpha\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & E^T \\ -E & F_B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E^T \\ E & F_B \end{bmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}F^{\alpha}{}_{\nu} \Rightarrow [F_{\mu\nu}] = [\eta_{\mu\alpha}][F^{\alpha}{}_{\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & E^T \\ E & F_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -E^T \\ E & F_B \end{bmatrix}$$

Άσκηση 9.6.4 *Έστω ότι σε μια περιοχή του χώρου υπάρχει μόνο ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο της μορφής $\vec{E} = E\hat{y}$.*

(α) Υπολογίστε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο που μετρά ένας παρατηρητής που κινείται με ταχύτητα $\vec{v} = v\hat{x}$. Τι αλλάζει στα καινούργια αυτά πεδία (που μετρά ο κινούμενος παρατηρητής) αν αλλάξει φορά η ταχύτητα του παρατηρητή ($\vec{v} \to -\vec{v}$);

(β) Υπολογίστε την τιμή των ποσοτήτων $\vec{E} \cdot \vec{B}$ και $\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2$ και αποδείξτε ότι είτε αυτές υπολογιστούν στο αρχικό σύστημα είτε στο σύστημα του κινούμενου παρατηρητή δεν αλλάζουν τιμή. Γνωρίζοντας ότι οι δύο αυτές ποσότητες παραμένουν αναλλοίωτες στους μετασχηματισμούς Lorentz εξετάστε αν υπάρχει
(i) σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο να υπάρχει μόνο μαγνητικό και καθόλου ηλεκτρικό πεδίο.
(ii) σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο να υπάρχει και ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο και μάλιστα συγγραμικά μεταξύ τους.

(γ) Βρείτε ένα σύστημα αναφοράς διαφορετικό από το αρχικό ως προς το οποίο να υπάρχει το ίδιο ηλεκτρικό πεδίο με το αρχικό και καθόλου μαγνητικό.

Λύση

(α) Ισχύει ότι $\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B}_{\parallel} = \vec{B}_{\perp} = 0$ και $\vec{E}_{\parallel} = 0$.
Επομένως $\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} = 0$ και $\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} = 0$.
Για τις κάθετες στην ταχύτητα συνιστώσες ισχύει ότι:
$\vec{E}' = \vec{\mathrm{E}}'_{\perp} = \gamma(\vec{\mathrm{E}}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}) = \gamma\vec{\mathrm{E}} = \gamma E\hat{y}$
$\vec{B}' = \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E}) = -\frac{\gamma}{c^2}vE\hat{x} \times \hat{y} = -\frac{\gamma}{c^2}vE\hat{z}$ Αν αλλάξει φορά η ταχύτητα του παρατηρητή, τότε η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου δεν μεταβάλλεται και η ένταση του μαγνητικού πεδίου αλλάζει φορά.

(β) Ισχύει ότι $\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ και $\vec{B}' \perp \vec{E}' \Rightarrow \vec{E}' \cdot \vec{B}' = 0$.
Επομένως, $\vec{E}' \cdot \vec{B}' = \vec{E} \cdot \vec{B}$
Για το δεύτερο αναλλοίωτο ισχύει ότι
$\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2 = E^2$ και $\vec{E}'^2 - c^2\vec{B}'^2 = \gamma^2 E^2 - c^2\frac{\gamma^2}{c^4}v^2E^2 = \gamma^2(1-\frac{v^2}{c^2})E^2 = E^2$
Επομένως $\vec{E}'^2 - c^2\vec{B}'^2 = \vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2$.

i) Έστω ότι υπάρχει σύστημα αναφοράς Σ´´ ως προς το οποίο να υπάρχει μόνο μαγνητικό και καθόλου ηλεκτρικό πεδίο. Τότε $\vec{E}''^2 - c^2\vec{B}''^2 = \vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2$, $\vec{E}''^2 - c^2\vec{B}''^2 = -c^2\vec{B}''^2 < 0$ και $\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2 = E^2 > 0$.
Οι τρεις αυτές σχέσεις είναι σε αντίφαση. Επομένως δεν υπάρχει τέτοιο σύστημα.

ii) Έστω ότι υπάρχει σύστημα αναφοράς $\tilde{\Sigma}$ στο οποίο να υπάρχει και ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο και μάλιστα συγγραμικά μεταξύ τους.
Τότε $\tilde{\vec{E}} \cdot \tilde{\vec{B}} \neq 0$, $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ και $\tilde{\vec{E}} \cdot \tilde{\vec{B}} = \vec{E} \cdot \vec{B}$.
Επομένως ούτε τέτοιο σύστημα υπάρχει.

(γ) Ισχύει ότι $\vec{B}'_\perp = \gamma(\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E}) = -\frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E}$ και $\vec{B}'_\perp = 0$.
Επομένως $\vec{v} \times \vec{E} = 0$ και συνεπώς $\vec{v} \parallel \vec{E}$.
Για οποιαδήποτε ταχύτητα $\vec{v} \parallel \vec{E}$ ισχύει ότι:
$\vec{E}'_\parallel = \vec{E}_\parallel = \vec{E}$
$\vec{B}'_\parallel = \vec{B}_\parallel = 0$
$\vec{\mathrm{E}}'_\perp = \gamma(\vec{\mathrm{E}}_\perp + \vec{v}\,x\,\vec{B}) = 0$
$\vec{B}'_\perp = \gamma(\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2}\vec{v}\,x\vec{E}) = 0$

Άσκηση 9.6.5 *Σε ένα ΑΣΑ Σ μετριέται το ηλεκτρικό πεδίο τη χρονική στιγμή t = 1 στη θέση (x = 2, y = 3, z = 4) και βρίσκεται να είναι* $\vec{E} = (0, E, 0)$ *, ενώ το μαγνητικό πεδίο είναι μηδενικό. Ένα δεύτερο ΑΣΑ Σ', το οποίο κινείται κατά τον τυποποιημένο τρόπο ως προς το πρώτο κατά μήκος του κοινού άξονα x, μετράει τις ακόλουθες συντεταγμένες για το ίδιο γεγονός καταμέτρησης των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων: (t´=-1/4, x´=7/4, y´=3, z´=4).*

(α) Υπολογίστε την ταχύτητα κίνησης του Σ' ως προς το Σ.

(β) Υπολογίστε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο που μετρά ο Σ´ στο εν λόγω γεγονός.

(γ) Επιβεβαιώστε ότι τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία που μετρά ο Σ' είναι συμβατά με αυτά του Σ, στηριζόμενοι στις αναλλοίωτες ποσότητες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Λύση
(α) Ισχύει ότι $\frac{x'}{t'} = \frac{\gamma(x-vt)}{\gamma(t-vx)} \Rightarrow -7 = \frac{2-v}{1-2v} \Rightarrow v = \frac{3}{5} \Rightarrow \gamma = \frac{5}{4}$
(β)Από τις σχέσεις μετασχηματισμού των πεδίων ισχύει ότι:
$\vec{E}'_\parallel = \vec{E}_\parallel \Rightarrow E'_x = E_x = 0$
$\vec{\mathrm{E}}'_\perp = \gamma\vec{\mathrm{E}}_\perp = \frac{5}{4}E\hat{y}$
Επομένως $\vec{E}' = \frac{5}{4}(0, E, 0)$

$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \Rightarrow B'_x = 0$
$\vec{B}'_{\perp} = -\gamma\vec{v} \times \vec{E} = -\frac{5}{4}\frac{3}{5}E\hat{x} \times \hat{y} = -\frac{3}{4}E\hat{z}$
Επομένως $\vec{B}' = -\frac{3}{4}(0, 0, E)$

(γ) Ισχύει ότι $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ και $\vec{E}' \cdot \vec{B}' = 0 = \vec{E} \cdot \vec{B}$.
$\vec{E}^2 - \vec{B}^2 = E^2$ και $\vec{E}'^2 - \vec{B}'^2 = \frac{25}{16}E^2 - \frac{9}{16}E^2 = E^2 = \vec{E}^2 - \vec{B}^2$

Άσκηση 9.6.6 *Το ηλεκτρικό $\vec{E}$ και το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ σε κάποιο σημείο του χώρου είναι κάθετα το ένα στο άλλο.*

(α) Διαλέξτε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων x-y-z και κατασκευάστε τον ταυστή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που αναφέρεται στο σημείο αυτό.

(β) Ένας παρατηρητής κινείται με ταχύτητα v=0.6 (c=1) με κατεύθυνση κάθετη στα δύο πεδία. Ποια μορφή έχει τώρα ο τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου για τον παρατηρητή αυτό για το ίδιο πάλι σημείο του πεδίου;

(γ) Είναι τα δύο πεδία κάθετα μεταξύ τους και για το σύστημα του παρατηρητή αυτού;

(δ) Αν το ένα από τα δύο πεδία είναι μεγαλύτερο στο αρχικό σύστημα αναφοράς (π.χ. $|\vec{E}| > |\vec{B}|$), ισχύει το ίδιο και για το σύστημα του παρατηρητή;

(ε) Θα μπορούσατε να δικαιολογήσετε την απάντηση σας στα ερωτήματα (γ) και (δ) χωρίς να έχετε εκτελέσει τις πράξεις των προηγούμενων ερωτημάτων για τον μετασχηματισμό των πεδίων;

Λύση

(α) Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε ο άξονας x να έχει την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου και ο άξονας y του μαγνητικού. Επομένως ο παρατηρητής κινείται στην διεύθυνση του άξονα z. Συνεπώς, $\vec{E} = (E, 0, 0)$ και $\vec{B} = (0, B, 0)$.
Ο τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου γίνεται:

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ -E & 0 & 0 & -B \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(β) Με v=0.6 ισχύει ότι γ=5/4=1.25 Ο πίνακας προώθησης Lorentz κατά μήκος του z άξονα είναι:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma v & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 & 0 & 0 & -0.75 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.75 & 0 & 0 & 1.25 \end{bmatrix}$$

Ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής στο νέο σύστημα συντεταγμένων δίνεται από την σχέση $F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}F^{\alpha\beta}$ ή σε μορφή πινάκων $F' = \Lambda F \Lambda^T$.
Εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό πινάκων καταλήγουμε στην :

$$F'^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 1.25E - 0.75B & 0 & 0 \\ -1.25E + 0.75B & 0 & 0 & 0.75E - 1.25B \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.25B - 0.75E & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως για τα πεδία στο νέο σύστημα συντεταγμένων ισχύει ότι:
$\vec{E}' = \frac{1}{4}(5E - 3B, 0, 0)$ και $\vec{B}' = \frac{1}{4}(0, 5B - 3E, 0)$.

(γ) Συνεπώς και στο νέο σύστημα τα πεδία είναι κάθετα μεταξύ τους.

(δ) Θα αποδείξουμε ότι αν $|\vec{E}| > |\vec{B}|$ τότε $|\vec{E}'| > |\vec{B}'|$.

Πράγματι
$|\vec{E}'| > |\vec{B}'| \Rightarrow |5E - 3B| > |5B - 3E| \Leftrightarrow |5E - 3B|^2 > |5B - 3E|^2 \Leftrightarrow$
$25E^2 + 9B^2 - 30BE > 25B^2 + 9E^2 - 30BE \Leftrightarrow E^2 > B^2 \Leftrightarrow |E| > |B|$

(ε) Γνωρίζουμε ότι οι ποσότητες $\vec{E} \cdot \vec{B}$ και $\vec{E}^2 - \vec{B}^2$ είναι αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Δηλαδή έχουν την ίδια τιμή σε όλα τα συστήματα αναφοράς. Συνεπώς, επειδή τα πεδία είναι κάθετα στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων ισχύει ότι $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$. Στο «κινούμενο» σύστημα αναφοράς ισχύει ότι $\vec{E}' \cdot \vec{B}' = \vec{E} \cdot \vec{B} = 0$.

Επίσης $\vec{E}'^2 - \vec{B}'^2 = \vec{E}^2 - \vec{B}^2$. Επομένως αν $|\vec{E}| > |\vec{B}|$ τότε $|\vec{E}'| > |\vec{B}'|$.

Άσκηση 9.6.7 *Τα δύο αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε κάποιο σημείο του χώρου κάποια χρονική στιγμή είναι* $E^2 - B^2 = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 1$ *και* $\vec{E} \cdot \vec{B} = \frac{1}{8}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta} = 0$.

Σε κάποιο σύστημα αναφοράς Σ η x συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου είναι $E_x = 1$ *ενώ οι y και z συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου είναι* $B_y = B_z = 0$.

(α) Να υπολογιστούν όλες οι συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου.

(β) Υπάρχει σύστημα αναφοράς στο οποίο να μηδενίζεται το ηλεκτρικό πεδίο;

(γ) Υπάρχει σύστημα αναφοράς στο οποίο το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\vec{E} = (0, 0.5, 0)$*;*

(δ) Υπολογίστε την ταχύτητα με την οποία θα πρέπει να κινείται ένα σύστημα αναφοράς Σ' σε σχέση με το Σ ώστε το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου να είναι $|\vec{E}'| = 5/3$*. Είναι το διάνυσμα της ταχύτητας αυτής μονοσήμαντα ορισμένο;*

Λύση

(α) Επειδή $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ και $B_y = B_z = 0$ συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{E}_x B_x = 0 \Rightarrow B_x = 0$. Επομένως $\vec{B} = 0$.

Ισχύει ότι : $E^2 - B^2 = 1 \Rightarrow E^2 = 1 \Rightarrow 1 + E_y^2 + E_z^2 = 1 \Rightarrow E_y = E_z = 0$

Άρα $\vec{E} = (1, 0, 0)$

(β) Όχι. Αν υπήρχε σύστημα αναφοράς στο οποίο να μηδενίζεται το ηλεκτρικό πεδίο τότε σε αυτό το σύστημα θα ίσχυε ότι $1 = E'^2 - B'^2 = -B'^2 < 0$, που είναι άτοπο.

(γ) Όχι. Αν υπήρχε σύστημα αναφοράς στο οποίο $\vec{E} = (0, 0.5, 0)$, τότε σε αυτό το σύστημα $1 = E'^2 - B'^2 = \frac{1}{4} - B'^2 < \frac{1}{4}$.

(δ) Έστω $\hat{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση της ταχύτητας. Δηλαδή $\vec{v} = v\hat{n}$. Ισχύει ότι
$\vec{E}_{\|} = (\vec{E} \cdot \hat{n})\hat{n} = n_x\hat{n} \Rightarrow \vec{E}_{\|}^2 = n_x^2$
$\vec{E}_{\perp} = \vec{E} - \vec{E}_{\|} = \hat{x} - n_x\hat{n} \Rightarrow \vec{E}_{\perp}^2 = 1 + n_x^2 - 2n_x\hat{x} \cdot \hat{n} = 1 + n_x^2 - 2n_x^2 = 1 - n_x^2$
Από τον νόμο μετασχηματισμού των πεδίων προκύπτει ότι:
$\vec{E}'_{\|} = \vec{E}_{\|} \Rightarrow \vec{E}'^2_{\|} = \vec{E}^2_{\|}$
$\vec{\mathrm{E}}'_{\perp} = \gamma(\vec{\mathrm{E}}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}) = \gamma\vec{\mathrm{E}}_{\perp} \Rightarrow \vec{\mathrm{E}}'^2_{\perp} = \gamma^2\vec{E}^2_{\perp}$
$\vec{E}'^2 = \vec{\mathrm{E}}'^2_{\|} + \vec{\mathrm{E}}'^2_{\perp} = n_x^2 + \gamma^2(1 - n_x^2)$
Για να είναι $|\vec{E}'| = 5/3$ πρέπει $n_x^2 + \gamma^2(1 - n_x^2) = \frac{25}{9}$
Η εξίσωση αυτή σε συνδυασμό με την $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ αποτελούν ένα σύστημα 2 εξισώσεων με 4 αγνώστους, το οποίο έχει άπειρες λύσεις.
Από την πρώτη προκύπτει ότι $n_x^2 = \frac{\gamma^2 - \frac{25}{9}}{\gamma^2 - 1}$.
Πρέπει $n_x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \gamma^2 \geq \frac{25}{9} \Leftrightarrow \beta \geq \frac{4}{5}$. Τότε $\frac{\gamma^2 - \frac{25}{9}}{\gamma^2 - 1} < 1$.
Επομένως για κάθε τιμή του β με $\frac{4}{5} \leq \beta < 1$, υπάρχουν κατάλληλα n_x, n_y, n_z.

Άσκηση 9.6.8 *Στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ ο τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου δίνεται από τον πίνακα* $F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ -E & 0 & 0 & -cB \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cB & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(α)Υπολογίστε τα αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

(β)Υπολογίστε τη σχέση μεταξύ των ποσοτήτων Ε, Β ώστε να υπάρχει σύστημα αναφοράς Σ' στο οποίο το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο θα έχει μόνο ηλεκτρικό πεδίο.

(γ) Υπολογίστε ταχύτητα $\vec{v}$ με την οποία θα πρέπει να κινείται το Σ' του ερωτήματος (β) ως προς το Σ, καθώς και το ηλεκτρικό πεδίο στο Σ'.

Λύση

(α) Από την μορφή του ηλεκτρομαγνητικού τανυστή συμπεραίνουμε ότι: $\vec{E} = (E, 0, 0)$ και $\vec{B} = (0, B, 0)$.

Τα αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι $s_1 = \vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ και $s_2 = \vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2 = E^2 - c^2B^2$

(β) Επειδή το s_2 είναι αναλλοίωτο ισχύει ότι :
$s_2 = s'_2 \Rightarrow E^2 - c^2B^2 = \vec{E}'^2 > 0 \Rightarrow |E| > c|B|$
Η συνθήκη |E|>c|B| είναι αναγκαία συνθήκη ώστε να υπάρχει σύστημα συντεταγμένων στο οποίο το ηλεκτρο¬μαγνητικό πεδίο να έχει μόνο ηλεκτρικό πεδίο. Θα αποδείξουμε ότι είναι και ικανή.

(γ) Αναζητούμε ταχύτητα $\vec{v}$ τέτοια ώστε $\vec{B}' = 0$.
Ισχύει ότι $\vec{B}_{\|} = \vec{B}'_{\|} = 0$. Επομένως $\vec{v} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{v} = v_x\hat{x} + v_z\hat{z}$.
Πρέπει

$$\vec{B}'_{\perp} = 0 \Leftrightarrow \vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E} = 0 \Leftrightarrow$$
$$B\hat{y} - \frac{E}{c^2}(v_x\hat{x} + v_z\hat{z}) \times \hat{x} = 0 \Leftrightarrow B\hat{y} - \frac{E}{c^2}v_z\hat{y} = 0 \Leftrightarrow v_z = \frac{Bc^2}{E} < c$$

Η v_x μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή τέτοια ώστε
$v_x^2 + v_z^2 < c^2 \Leftrightarrow v_x^2 + (\frac{Bc^2}{E})^2 < c^2$

Επειδή ζητάμε τουλάχιστον ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο να μηδενίζεται το μαγνητικό πεδίο επιλέγουμε $v_x = 0$. Συνεπώς $\vec{v} = v_z\hat{z}$. Για την παράλληλη και την κάθετη στην ταχύτητα συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου ισχύει ότι $\vec{E}_{\parallel} = 0$ και $\vec{E}_{\perp} = \vec{E}$.
Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο «κινούμενο» σύστημα συντεταγμένων είναι:
$\vec{E}' = \vec{E}'_{\parallel} + \vec{\mathrm{E}}'_{\perp} = \vec{E}_{\parallel} + \gamma(\vec{\mathrm{E}}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}) = \gamma(\vec{\mathrm{E}} + \vec{v} \times \vec{B}) \Rightarrow$
$\vec{\mathrm{E}}' = \gamma E\hat{x} + \gamma\frac{B^2c^2}{E}\hat{z} \times \hat{y} = \gamma(E - \frac{B^2c^2}{E})\hat{x} = \sqrt{E^2 - B^2c^2}\hat{x}$

Άσκηση 9.6.9 *Έστω ένα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα που στο αδρανειακό σύστημα Σ έχει τη μορφή* $\vec{\mathrm{E}} = cB_0 \cos\left[\omega(t - \frac{z}{c})\right]\hat{x}$, $\vec{B} = B_0 \cos\left[\omega(t - \frac{z}{c})\right]\hat{y}$.

(α) Υπολογίστε τη μορφή του πεδίου σε ένα σύστημα Σ΄ που κινείται σε σχέση με το Σ κατά τον τυποποιημένο τρόπο με ταχύτητα βc κατά μήκος του άξονα z.

(β) Εκφράστε τις συνιστώσες του πεδίου σε συντεταγμένες του νέου συστήματος t΄, x΄, y΄, z΄. Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στο νέο σύστημα περιγράφει και πάλι ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα; (έχει την ίδια μορφή με παραπάνω ;) Ποια η συχνότητα του κύματος αυτού ;

(γ) Συμφωνεί το αποτέλεσμα σας με την αναμενόμενη για ένα φωτόνιο μετατόπιση Doppler;

(δ) Κλασικά η ροή ενέργειας που μεταφέρει ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι ανάλογη του $\vec{E} \times \vec{B}$. Υπολογίστε τη μεταβολή της ροής ενέργειας από το Σ στο Σ΄ και προσπαθήστε να δικαιολογήσετε την αλλαγή αυτή αναλογιζόμενοι πόσα φωτόνια και με πόση ενέργεια περνούν στη μονάδα του χρόνου μια επιφάνεια z = σταθ, z΄= σταθ στα δύο συστήματα.

Λύση

(α) Επειδή η ταχύτητα του νέου συστήματος συντεταγμένων έχει την διεύθυνση του άξονα z ισχύει ότι $\vec{E}\perp\vec{v}$ και $\vec{B}\perp\vec{v}$. Επομένως $\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} = 0$ και $\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} = 0$.
$\vec{\mathrm{E}}' = \vec{\mathrm{E}}'_{\perp} = \gamma(\vec{\mathrm{E}} + \vec{v} \times \vec{B}) = \gamma(E\hat{x} + vB\hat{z} \times \hat{y}) \Rightarrow$
$\vec{\mathrm{E}}' = \gamma cB_0(1 - \beta)\cos\left[\omega(t - \frac{z}{c})\right]\hat{x}$ (1)
$\vec{B}' = \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E}) = \gamma(B\hat{y} - \frac{vE}{c^2}\hat{z} \times \hat{x}) \Rightarrow$
$\vec{B}' = \gamma B(1 - \beta)\hat{y} = \gamma B_0(1 - \beta)\cos\left[\omega(t - \frac{z}{c})\right]\hat{y}$ (2)

(β) Θέτουμε $B'_0 = \gamma B_0(1 - \beta) = B_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$.

Ισχύει ότι $z = \gamma(z' + \beta ct')$ και $t = \gamma(t' + \beta\frac{z'}{c})$. Επομένως
$\omega(t - \frac{z}{c}) = \omega\gamma\left(t' + \beta\frac{z'}{c} - \frac{z'}{c} - \beta t'\right) = \omega\gamma(1-\beta)(t' - \frac{z'}{c}) \Rightarrow$
$\omega(t - \frac{z}{c}) = \omega\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}(t' - \frac{z'}{c}) = \omega'(t' - \frac{z'}{c})$ με $\omega' = \omega\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$

Οι σχέσεις (1) και (2) γίνονται:
$\vec{\mathrm{E}}' = cB_0'\cos\left[\omega'(t' - \frac{z'}{c})\right]\hat{x}$ και $\vec{B}' = B_0')\cos\left[\omega'(t' - \frac{z'}{c})\right]\hat{y}$

Επομένως, το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και στο νέο σύστημα περιγράφει και πάλι ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα συχνότητας $\omega' = \omega\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$.

(γ) Η τετραορμή του φωτονίου στο αρχικό σύστημα είναι $P = \frac{hf}{c}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$.

Για την τετραορμή του φωτονίου στο Σ΄ ισχύει ότι:

$$P' = \Lambda(\beta)P = \frac{hf}{c}\begin{bmatrix}\gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \frac{hf}{c}\begin{bmatrix}\gamma(1-\beta)\\0\\0\\\gamma(1-\beta)\end{bmatrix}$$

Επομένως $f' = f\gamma(1-\beta) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}f$.
Συνεπώς,το αποτέλεσμα του (β) ερωτήματος συμφωνεί με την αναμενόμενη για ένα φωτόνιο μετατόπιση Doppler.

(δ) Σύμφωνα με την κυματική θεώρηση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος η ενέργεια που διέρχεται από την μονάδα επιφάνειας στην μονάδα του χρόνου είναι ανάλογη με την μέση τιμή του διανύσματος Pointing
$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{B} = cB_0^2\cos^2\left[\omega(t - \frac{z}{c})\right]\hat{z}$
Επομένως $<\vec{S}>= \frac{1}{2}cB_0^2\,\hat{z}$.
Στο κινούμενο σύστημα συντεταγμένων ισχύει ότι $B_0' = B_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$.
Επομένως ο λόγος των ενεργειών που διέρχονται από την μονάδα επιφάνειας στην μονάδα του χρόνου είναι $\frac{1-\beta}{1+\beta}$.
Σύμφωνα με την σωματιδιακή θεώρηση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος, η ενέργεια που διέρχεται από την μονάδα επιφάνειας στην μονάδα του χρόνου είναι ίση με την ενέργεια του ενός φωτονίου επί τον αριθμό των φωτονίων που διέρχονται από την μονάδα επιφάνειας στην μονάδα του χρόνου. Όμως τόσο η ενέργεια ενός φωτονίου όσο και ο αριθμός των φωτονίων που διέρχονται από την μονάδα επιφάνειας στην μονάδα του χρόνου είναι ανάλογα της συχνότητας του φωτονίου. Επομένως ο λόγος των ενεργειών που διέρχονται από την μονάδα επιφάνειας στην μονάδα του χρόνου είναι $\frac{f'^2}{f^2} = \frac{1-\beta}{1+\beta}$.

Άσκηση 9.6.10 *Σε αδρανειακό σύστημα Σ το ηλεκτρικό πεδίο εκατέρωθεν μιας* *άπειρης φορτισμένης πλάκας, η οποία ηρεμεί στο επίπεδο y-z, είναι της μορφής* $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x}{|x|}, 0, 0\right)$

Παρατηρητές Σ_1 και Σ_2 με παράλληλους άξονες κινούνται ως προς το Σ με ταχύτητα ίδιου μέτρου.
Ο μεν Σ_1 σε μια περιοχή της αρχής του συστήματος συντεταγμένων του μετράει πεδία: $\vec{E}_{(1)} = (E, 0, 0)$, $\vec{B}_{(1)} = (0, 0, 0)$ ο δε Σ_2 πεδία: $\vec{E}_{(2)} = (-\frac{5}{4}E, 0, 0)$, $c\vec{B}_{(2)} = (0, -\frac{3}{4}E, 0)$.

(α) Να αποδείξετε ότι τα αποτελέσματα των δύο παρατηρητών είναι συμβατά με τα αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

(β) Υπολογίστε την επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου της πλάκας σ στο Σ συναρτήσει του Ε.

(γ) Υπολογίστε την ταχύτητα κίνησης των δύο παρατηρητών σε σχέση με την πλάκα (μέτρο και διεύθυνση).

(δ) Εάν σ > 0, Ε < 0 σε ποια μεριά της πλάκας (x > 0 ή x < 0) κινούνται οι δύο παρατηρητές; Δίδονται οι τύποι μετασχηματισμού των πεδίων.

Λύση

(α) Τα αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στα τρία συστήματα αναφοράς είναι:
Στο Σ: $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ και $E^2 - B^2 = \frac{\sigma^2}{4\varepsilon_0^2}$.
Στο Σ_1: $\vec{E}_{(1)} \cdot \vec{B}_{(1)} = 0$ και $E_{(1)}^2 - B_{(1)}^2 = \mathrm{E}^2 - 0 = \mathrm{E}^2$.
Στο Σ_2: $\vec{E}_{(2)} \cdot \vec{B}_{(2)} = 0 = \vec{E}_{(1)} \cdot \vec{B}_{(1)}$ και $E_{(2)}^2 - B_{(2)}^2 = \frac{25}{16}\mathrm{E}^2 - \frac{9}{16}\mathrm{E}^2 = \mathrm{E}^2 = E_{(1)}^2 - B_{(1)}^2$.
Επομένως τα αποτελέσματα των δύο παρατηρητών είναι συμβατά με τα αναλλοίωτα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

(β) Πρέπει $E^2 - B^2 = E_{(1)}^2 - B_{(1)}^2 \Rightarrow \frac{\sigma^2}{4\varepsilon_0^2} = \mathrm{E}^2 \Rightarrow |\sigma| = 2\varepsilon_0|\mathrm{E}|$

(γ) Το ηλεκτρικό πεδίο στο Σ έχει την μορφή $\vec{E} = E_0\hat{x}$ με $E_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x}{|x|}$

Για τον παρατηρητή Σ_1.
Ισχύει ότι $\vec{B}'_{(1)\perp} = \gamma(\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2}\vec{v}_1 \times \vec{E}) \Rightarrow \vec{v}_1 \times \vec{E} = 0$.
Επομένως η $\vec{v}_1$ είναι συγγραμμική της $\vec{E}$. Άρα $\vec{v}_1 = v_1\,\hat{x}$.
Επιβεβαιώνουμε τις συνιστώσες των δύο πεδίων.
$\vec{E}_{(1)\parallel} = \vec{E}_\parallel \Rightarrow E_{(1)x} = E_x \Rightarrow \mathrm{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x_{(1)}}{|x_{(1)}|}$
$\vec{\mathrm{E}}_{(1)\perp} = \gamma\vec{\mathrm{E}}_\perp = 0 \Rightarrow E_{(1)y} = E_{(1)z} = 0$
$\vec{B}_{(1)\parallel} = \vec{B}_\parallel \Rightarrow B_{(1)x} = B_x = 0$
$\vec{B}_{(1)\perp} = -\gamma\vec{v}_1 \times \vec{E} = -\gamma v_1\hat{x} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow B_{(1)y} = B_{(1)z} = 0$

Για τον παρατηρητή Σ_2:
Έστω $\hat{n} = n_x\hat{x} + n_y\hat{y} + n_z\hat{z}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την κατεύθυνση κίνησης

του Σ_2 . Για το μαγνητικό πεδίο που μετρά ο Σ_2 ισχύει ότι:
$\vec{B}_{(2)} = \vec{B}_{(2)\parallel} + \vec{B}_{(2)\perp} = -\frac{\gamma}{c^2}\vec{v} \times \vec{E} \Rightarrow \frac{3\mathrm{E}}{4}\hat{y} = \gamma\frac{v}{c}E_0\hat{n} \times \hat{x} \Rightarrow$
$\frac{3\mathrm{E}}{4}\hat{y} = \gamma\beta E_0(n_y\hat{y} + n_z\hat{z}) \times \hat{x} \Rightarrow \frac{3\mathrm{E}}{4}\hat{y} = \gamma\beta E_0(-n_y\hat{z} + n_z\hat{y})$ (1)
Επομένως $n_y = 0$ και $n_z = \frac{3E}{4} \neq 0$.
Για το ηλεκτρικό πεδίο ισχύει ότι:
$\vec{E}_{\parallel} \parallel \hat{n} \Rightarrow \vec{E}_{\parallel} = \lambda\hat{n}$ και $\vec{E}_{\perp} = \vec{E} - \vec{E}_{\parallel} = E_0\hat{x} - \lambda\hat{n}$
$\vec{E}_{\perp} \perp \hat{n} \Rightarrow \vec{E}_{\perp} \cdot \hat{n} = 0 \Rightarrow E_0\hat{x} \cdot \hat{n} = \lambda \Rightarrow \lambda = E_0 n_x$
Επομένως, $\vec{E}_{\parallel} = E_0 n_x\hat{n}$ και $\vec{E}_{\perp} = \vec{E} - \vec{E}_{\parallel} = E_0(\hat{x} - n_x\hat{n})$.
$\vec{E}_{(2)} = \vec{E}'_{\parallel} + \vec{E}'_{\perp} = \vec{E}_{\parallel} + \gamma\vec{\mathrm{E}}_{\perp} = E_0\left[n_x(1-\gamma)\hat{n} + \gamma\hat{x}\right] \Rightarrow$
$-\frac{5\mathrm{E}}{4}\hat{x} = E_0\left[n_x^2(1-\gamma)\hat{x} + n_x n_z(1-\gamma)\hat{z} + \gamma\hat{x}\right] \Rightarrow$
$n_x n_z = 0$ και $-\frac{5\mathrm{E}}{4} = E_0\left[n_x^2(1-\gamma) + \gamma\right]$
Επειδή $n_z \neq 0$ πρέπει $n_x = 0$.
Επομένως $-\frac{5\mathrm{E}}{4} = \gamma E_0$
Η σχέση (1) γίνεται: $\frac{3\mathrm{E}}{4}\hat{y} = \gamma\beta E_0 n_z\hat{y} \Rightarrow 3E = -5E\beta \Rightarrow \beta = -\frac{3}{5}$
Επομένως $\vec{v}_2 = -\frac{3}{5}c\hat{z} \Rightarrow \gamma = \frac{5}{4}$
Η σχέση $-\frac{5\mathrm{E}}{4} = \gamma E_0$ είναι ισοδύναμη με την $-E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x_{(2)}}{|x_{(2)}|}$.

Από τις σχέσεις $\sigma > 0$, $E < 0$ και την $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x_{(1)}}{|x_{(1)}|}$ συμπεραίνουμε ότι $x_{(1)} < 0$, που σημαίνει ότι ο Σ_1 βρίσκεται στον αρνητικό x ημιάξονα.

Από τις σχέσεις $\sigma > 0$, $E < 0$ και $-E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x_{(2)}}{|x_{(2)}|}$ συμπεραίνουμε ότι $x_{(2)} > 0$, που σημαίνει ότι ο Σ_2 βρίσκεται στον θετικό x ημιάξονα.

Άσκηση 9.6.11 *Σωματίδιο κινείται μέσα σε ένα αμιγώς ηλεκτρικό πεδίο της μορφής $\vec{E} = E\hat{x}$ και η ταχύτητα του αρχικά είναι $\vec{v}(0) = v_0\hat{y}$. Θυμίζουμε ότι η εξίσωση κίνησης ενός σωματιδίου μάζας m και φορτίου q μέσα σε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι:*

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_\nu$$

όπου $F^{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής του ηλ/κού πεδίου και u_μ η τετραταχύτητα του σωματιδίου.

(α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης συνιστώσα-συνιστώσα χρησιμοποιώντας την μορφή της τετραορμής για ένα σωματίδιο με μάζα.

(β) Δείξτε ότι η κίνηση περιορίζεται στο επίπεδο x-y.

(γ) Η y-συνιστώσα της ταχύτητας του σωματιδίου είναι σταθερή; Τι είναι σταθερό αντί αυτής;

(δ) Επεξεργαστείτε κατάλληλα τις δύο διαφορικές εξισώσεις που διέπουν την 0 και την 1 συνιστώσα της τετραορμής ώστε να κατασκευάσετε μια διαφορική εξίσωση 2ης τάξης για την εξέλιξη του παράγοντα γ(τ) για το σωματίδιο. Λύστε την και μέσω αυτής υπολογίστε την εξέλιξη της u_y (από το ερώτημα (γ)).

(ε) Υπάρχει κάποια διαφορά όσον αφορά στην εξέλιξη της u_y από το αντίστοιχο πρόβλημα στη Νευτώνεια μηχανική;

(στ) Να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου στο επίπεδο xy, αν αρχικά ήταν στο σημείο (0,0,0)

Λύση

Θέτουμε $\gamma_0 = \gamma(v_0)$ Έστω u^0, u^1, u^2, u^3 οι ανταλλοίωτες συνιστώσες της τετραταχύτητας Η εξίσωση κίνησης στο πεδίο είναι:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_\nu \Leftrightarrow \frac{d}{d\tau}\begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix} = \frac{q}{mc}F^{\mu\nu}u_\nu = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix}$$

Θέτοντας $\lambda = \frac{Eq}{mc}$ η παραπάνω εξίσωση είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$\frac{du^0}{d\tau} = \lambda u^1$ (0)

$\frac{du^1}{d\tau} = \lambda u^0$ (1)

$\frac{du^2}{d\tau} = 0$ (2)

$\frac{du^3}{d\tau} = 0$ (3)

Με αρχικές συνθήκες $\begin{bmatrix} u^0(0) \\ u^1(0) \\ u^2(0) \\ u^3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 c \\ 0 \\ \gamma_0 v_0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Από την (3) συμπεραίνουμε ότι η u^3 είναι σταθερή. Επειδή αρχικά ήταν μηδέν παραμένει μηδέν. Άρα $v_z = 0$. Επομένως η κίνηση γίνεται στο επίπεδο xy.

Από την (2) συμπεραίνουμε ότι η u^2 παραμένει σταθερή. Αρχικά ήταν ίση με $\gamma_0\, v_0$. Επομένως $u^2(\tau) = \gamma_0 v_0$ (4)

Επειδή $u^2 = \gamma v_y$ συμπεραίνουμε ότι η v_y δεν παραμένει σταθερή αλλά το γινόμενο γv_y.

Επιλύοντας την (0) ως προς u^1 και αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει η ΔΕ 2ης τάξης $\frac{d^2u^0}{d\tau^2} = \lambda^2 u^0$ με γενική λύση

$u^0 = c_1 e^{\lambda\tau} + c_2 e^{-\lambda\tau}$ (5)

Από την (0) βρίσκουμε την u^1. $u^1 = c_1 e^{\lambda\tau} - c_2 e^{-\lambda\tau}$ (6)

Ισχύει ότι

$$\begin{bmatrix} u^0(0) \\ u^1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 c \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 c \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = \frac{\gamma_0 c}{2}$$

Αντικαθιστώντας στις (5), (6) και (4) προκύπτει ότι

$u^0(\tau) = \gamma_0\, c\, \frac{e^{\lambda\tau}+e^{-\lambda\tau}}{2} = \gamma_0\, c\, \cosh(\lambda\tau) \Rightarrow \gamma(\tau) = \gamma_0 \cosh(\lambda\tau)$

$u^1(\tau) = \gamma_0\, c\, \frac{e^{\lambda\tau}-e^{-\lambda\tau}}{2} = \gamma_0\, c\, \sinh(\lambda\tau) \Rightarrow \gamma(\tau)v_x(\tau) = \gamma_0\, c\, sinh(\lambda\tau) \Rightarrow$

$v_x(\tau) = c\, tanh(\lambda\tau)$

$u^2(\tau) = \gamma_0 v_0 \Rightarrow \gamma(\tau)v_y = \gamma_0 v_0 \Rightarrow v_y(\tau) = \frac{v_0}{\cosh(\lambda\tau)}$

Ισχύει ότι
$\lim_{\tau\to\infty} v_x(\tau) = c$ και $\lim_{\tau\to\infty} v_y(\tau) = 0$

(ε) Στο νευτώνειο αντίστοιχο πρόβλημα η y συνιστώσα της ταχύτητας δεν μεταβάλλεται, ενώ εδώ μηδενίζεται με την πάροδο του χρόνου παραμονής στο ηλεκτρικό πεδίο.

(στ) Θα ολοκληρώσουμε ακόμη μια φορά για να βρούμε τις χωρικές συντεταγμένες του σωματιδίου συναρτήσει του ιδιόχρονου.
$u^2(\tau) = \gamma_0 v_0 \Rightarrow x^2(\tau) = \gamma_0 v_0 \tau \Rightarrow \tau = \frac{y}{\gamma_0 v_0}$
$u^1(\tau) = \gamma_0 c \sinh(\lambda\tau) \Rightarrow x^1(\tau) = \frac{\gamma_0 c}{\lambda}\left[\cosh(\lambda\tau) - 1\right]$
Απαλείφοντας τον ιδιόχρονο προκύπτει η εξίσωση τροχιάς. $x = \frac{\gamma_0 c}{\lambda}\left[\cosh(\frac{\lambda y}{\gamma_0 v_0}) - 1\right]$