Πρόβλημα 1

Ένα μήνυμα ταξιδεύει από το σημείο $(x_1, t_1) \to (x_2, t_2)$ με σταθερή ταχύτητα $u = \Delta x/\Delta t < 1$. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός προώθησης Lorentz,

$$t' = \gamma(t - vx)$$
$$x' = \gamma(x - vt)$$

όπου $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, διατηρεί τη χρονική σειρά των γεγονότων, δηλαδή αν $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$, τότε οπωσδήποτε και $\Delta t' = t'_2 - t'_1 > 0$. *Για γεγονότα που είναι αιτιακά συνδεδεμένα, η σχέση αιτίου και αποτελέσματος (causality) παραμένει αμετάβλητη σε όλα τα αδρανειακά συστήματα, λόγω του ανώτατου ορίου που υπάρχει στην ταχύτητα διάδοσης οποιασδήποτε πληροφορίας.*

– Λύση –

Πρόβλημα 2

Άσκηση 11, Κεφάλαιο 1, Rindler

Να αποδειχθεί ότι οι δύο πρώτες εξισώσεις του *καθιερωμένου* μετασχηματισμού Lorentz

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}$$

μπορούν να γραφούν στην μορφή

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh w & -\sinh w \\ -\sinh w & \cosh w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}$$

όπου $\tanh w = v$. (Υπενθυμίζουμε τις σχέσεις $\cosh w = \cos iw$, $i \sinh w = \sin iw$, οπότε κάθε τριγωνομετρική ταυτότητα μπορεί να μετατραπεί σε ταυτότητα ως προς τις υπερβολικές συναρτήσεις). Τυπολογικά πρόκειται για μία 'στροφή'[1] ως προς x και it, και ως τέτοια διατηρεί την ποσότητα $x^2 + (it)^2$.

Πρόβλημα 3

Τρεις κεραυνοί πέφτουν ταυτόχρονα στο S στις θέσεις $x = -2, 0$ και 2. Βρείτε τις χρονικές στιγμές που θα παρατηρηθούν οι τρεις κεραυνοί στο S', το οποίο έχει ταχύτητα $\vec{u} = 3/5\,\hat{x}$ ως προς το S.

[1] Σημείωση: *Το να μιλάμε για μια στροφή στον χωρόχρονο έχει αρκετή δόση 'υπερβολής', όμως η αλήθεια είναι ότι η χρήση της παραμέτρου $w = artanh(v)$ που ονομάζεται (ωκύτητα, γρηγοράδα, σβελτάδα, γοργότητα ...) ως απόδοση του αγγλικού όρου rapidity είναι 'υπερβολικά' χρήσιμη.*

– Λύση –

Πρόβλημα 4

Άσκηση 10, Κεφάλαιο 1, Rindler Δύο φωτόνια κινούνται κατά μήκος του άξονα x του S, σε σταθερή μεταξύ τους απόσταση L. Να αποδειχθεί ότι στο S' η απόσταση μεταξύ των φωτονίων είναι

$$L\sqrt{\frac{1+v}{1-v}}.$$

Υπόδειξη: γράψτε τις κοσμικές τροχιές των δύο φωτονίων $x_1^\mu(t)$, $x_2^\mu(t)$ στο S και στο S'. Βρείτε το χωρικό κομμάτι του $\Delta x'^\mu = x_2'^\mu - x_1'^\mu$ όταν το χρονικό του είναι μηδέν.

– Λύση –

Πρόβλημα 5

Έστω ότι τα στοιχεία $C^{\mu\nu}$, X_μ και Y^μ είναι τα

$$C = [C^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \quad X = [X_\mu] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad Y = [Y^\mu] = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

A) Χρησιμοποιώντας την αθροιστική σύμβαση Einstein για τους επαναλαμβανόμενους δείκτες, υπολογίστε τα

$$\begin{aligned} CX &= [C^{\mu\nu}X_\nu] \\ C^TX &= [C^{\mu\nu}X_\mu] \\ Y^TX &= [Y^\mu X_\mu] \\ X^TY &= [X_\mu Y^\mu] \\ X \otimes Y &= [X_\mu Y^\nu] \end{aligned}$$

B) Θεωρώντας το στοιχείο

$$\eta = [\eta_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δείξτε ότι $\eta^{-1} = \eta$ όπου $[\eta^{\mu\nu}] \equiv \eta^{-1}$ και υπολογίστε τα παρακάτω:

$$\begin{aligned}
\eta^{-1}X &= [\eta^{\mu\nu}X_\nu] = [X^\mu] \\
\eta Y &= [\eta_{\mu\nu}Y^\nu] = [Y_\mu] \\
\eta C &= [\eta_{\mu\kappa}C^{\kappa\nu}] = [C_\mu{}^\nu] \\
C\eta &= [C^{\mu\kappa}\eta_{\kappa\nu}] = [C^\mu{}_\nu] \\
\eta C\eta &= [\eta_{\mu\sigma}C^{\sigma\kappa}\eta_{\kappa\nu}] = [C_{\mu\nu}]
\end{aligned}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η δράση των η και η^{-1} σε αριθμητικό επίπεδο προκαλούν απλώς την αλλαγή πρόσημου του πρώτου στοιχείου των X και Y και την αλλαγή πρόσημου ολοκλήρης της πρώτης γραμμής (στήλης) του C όταν γίνεται από τα αριστερά ηC (δεξιά $C\eta$).

Υπόδειξη: Συμβουλευτείτε το 1ο κεφάλαιο (Υπενθυμίσεις από την θεωρία πινάκων) από τις σημειώσεις Χριστοδουλάκη & Κορφιάτη.

– Λύση –

– GitHub –

Πρόβλημα 6

α) Δείξτε ότι πρέπει να ισχύει η σχέση $\Lambda^\mu{}_\kappa \Lambda_\mu{}^\nu = \delta^\kappa_\nu$ προκειμένου να διατηρείται το μέτρο $A'^\mu A'_\mu = A^\mu A_\mu$, όπου τα A^μ και A_μ είναι τανυστές πρώτης τάξης, δηλαδή μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον μετασχηματισμό Lorentz, όπως τα Δx^μ και Δx_μ:

$$A^\mu \to A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$$

$$A_\mu \to A'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu$$

β) Δείξτε ότι πρέπει $\Lambda_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\kappa}\Lambda^\kappa{}_\sigma \eta^{\sigma\nu}$, προκειμένου να ισχύουν οι σχέσεις $A'^\mu A'_\mu = A^\mu A_\mu$ και

$$\begin{aligned}
A'_\mu &= \eta_{\mu\nu}A'^\mu \\
A'^\mu &= \eta^{\mu\nu}A'_\mu \\
A_\mu &= \eta_{\mu\nu}A^\mu \\
A^\mu &= \eta^{\mu\nu}A_\mu.
\end{aligned}$$

– Λύση –

Πρόβλημα 7

Έστω $A^\mu = (A^0, A^1, 0, 0)$ ανταλλοίωτος τανυστής πρώτης τάξης[2]. Βρείτε τα:

1) $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$
2) $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$
3) $A'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu$
4) $A^\nu A_\nu$
5) $A'_\mu A'^\mu$

για τον μετασχηματισμό Lorentz σε καθιερωμένη διαμόρφωση:

$$[\Lambda^\mu{}_\nu] = \Lambda(v) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου

$$[\eta_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ο μετρικός τανυστής. Τέλος, γράψτε τις συνιστώσες του $\Lambda_\mu{}^\nu$ σε μορφή πίνακα και συγκρίνετέ τις με αυτές του $\Lambda^\mu{}_\nu$.

– Λύση –

Πρόβλημα 8

Έστω ο γενικός μετασχηματισμός Lorentz που προκύπτει ύστερα από δύο διαδοχικές προωθήσεις σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις

$$L = \Lambda(\vec{v_2})\Lambda(\vec{v_1})$$

με $\vec{v_1} = 4/5\hat{x}$, $\vec{v_2} = 4/5\hat{y}$. Επαληθεύστε αριθμητικά την σχέση $L = \tilde{R}_z(\theta)\Lambda(\vec{v_3})$ με $\vec{v_3} = \vec{v_1} + \vec{v_2}/\gamma_2$ και ότι ο μετασχηματισμός $\tilde{R}_z$[3] αντιστοιχεί σε μια στροφή στο επίπεδο x, y κατά την αρνητική φορά (αριστερόστροφα) με γωνία θ η οποία έχει $\cos\theta = 45/51$ και $\sin\theta = -72/153$.

[2] Θεωρούμε τις συνιστώσες A^0 και A^1 γνωστές.

[3] $\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$

Δίνεται η γενική μορφή του πίνακα προώθησης Lorentz:

$$\Lambda(\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v_x & -\gamma v_y & -\gamma v_z \\ -\gamma v_x & 1+(\gamma-1)\frac{v_x^2}{v^2} & (\gamma-1)\frac{v_x v_y}{v^2} & (\gamma-1)\frac{v_x v_z}{v^2} \\ -\gamma v_y & (\gamma-1)\frac{v_x v_y}{v^2} & 1+(\gamma-1)\frac{v_y^2}{v^2} & (\gamma-1)\frac{v_y v_z}{v^2} \\ -\gamma v_z & (\gamma-1)\frac{v_x v_z}{v^2} & (\gamma-1)\frac{v_y v_z}{v^2} & 1+(\gamma-1)\frac{v_z^2}{v^2} \end{bmatrix}$$

με $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.

Σημείωση: Βρείτε υλοποίηση των σχετικών πινάκων σε Η/Υ, στο github *του μαθήματος της υπολογιστικής φυσικής.*

Υπόδειξη: υπολογίστε πρώτα τους L, L^{-1} και $\Lambda(\vec{v_3})$ και λύστε ως προς τον $\tilde{R}_z$. Σημειώστε ότι εν γένει $L \neq L^T$ για τον γενικό μετασχηματισμό Lorentz, παρότι ισχύει ότι $\Lambda = \Lambda^T$ και $\Lambda^{-1}(\vec{v}) = \Lambda(-\vec{v})$ για τον γενικό μετασχηματισμό προώθησης.

Πρόβλημα 9

Για τον πίνακα L του προηγούμενου προβλήματος δείξτε ότι

1. $L^T \eta L = \eta$
2. $\eta L^T \eta = L^{-1}$
3. $\eta L \eta = (L^{-1})^T$

και ότι η ορίζουσα του L είναι $\det(L) = \pm 1$.

Σημείωση: Το πρόβλημα αυτό είναι τετριμμένο αν θυμηθούμε ότι $\eta = \eta^T = \eta^{-1}$ και $\eta^2 = I$. Βρείτε υλοποίηση των σχετικών πινάκων σε Η/Υ, στο github *του μαθήματος της υπολογιστικής φυσικής.*

Πρόβλημα 10

Εάν $\mathbf{X} = [X^\mu]$ πίνακας στήλη 4×1 που αναπαριστά τις συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου τετραδιάνυσματος και $\mathbf{Y} = [X_\mu] = \eta\mathbf{X}$ η αναπαράσταση ως πίνακα στήλη του συναλλοίωτου τετραδιάνυσματος, δείξτε ότι αν το $\mathbf{X}$ μετασχηματίζεται ως $\mathbf{X}' = L\mathbf{X}$ τότε πρέπει το $\mathbf{Y}' = (L^{-1})^T\mathbf{Y}$ προκειμένου το εσωτερικό γινόμενο των δύο να παραμένει αναλλοίωτο $\mathbf{Y}^T\mathbf{X} = \mathbf{Y}'^T\mathbf{X}'$.

Σημείωση: Σε μορφή συνιστωσών, $X'^\mu = L^\mu{}_\nu X^\nu$, $X'_\mu = L_\mu{}^\nu X_\nu$, συνεπώς $[L^\mu{}_\nu] = L$ και $[L_\mu{}^\nu] = (L^{-1})^T$. Στην σύμβαση των τονισμένων δεικτών τα παραπάνω γράφονται $X^{\mu'} = L^{\mu'}{}_\mu X^\mu$, $X_{\mu'} = L_{\mu'}{}^\mu X_\mu$, συνεπώς $[L^{\mu'}{}_\mu] = L$ και $[L_{\mu'}{}^\mu] = (L^{-1})^T$

– Λύση –

Πρόβλημα 11

Ο TOI 700 d είναι ένας εξωπλανήτης που βρίσκεται σε απόσταση περίπου 100 έτη φωτός από τη Γη. Ο εξωπλανήτης αυτός έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον γιατί βρίσκεται εντός της κατοικήσιμης ζώνης του άστρου του. Διαστημόπλοιο στέλνεται από την Γη για να τον εξερευνήσει, το οποίο κινείται με ταχύτητα που προσεγγίζει αυτή του φωτός $u = 1 - \epsilon$, με $\epsilon = 0.5 \times 10^{-8}$ ως προς την Γη.

α) Βρείτε πόσος χρόνος (Δt) θα περάσει στη Γη, μέχρις ότου το διαστημόπλοιο φτάσει στον εξωπλανήτη.

β) Βρείτε πόσος χρόνος ($\Delta\tau$) θα περάσει για τον αστροναύτη μέσα στο διαστημόπλοιο.

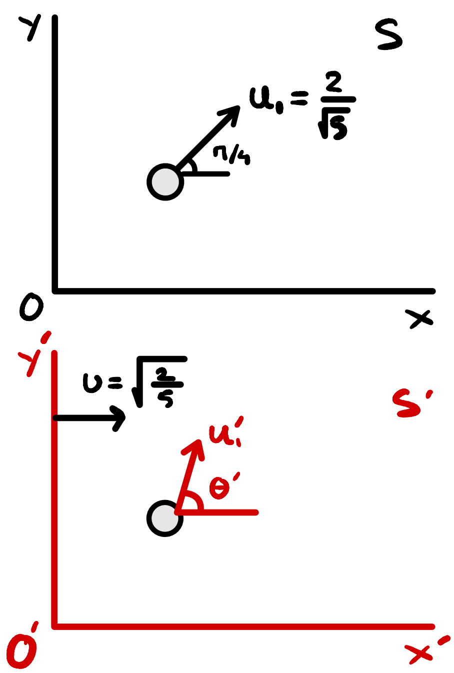
Απάντηση: $\Delta t \approx 100$ έτη, $\Delta\tau \approx 3.65$ ημέρες.

– Λύση –

Πρόβλημα 12

Άσκηση 10.23, Griffiths

Σωματίδιο έχει ταχύτητα μέτρου $|\vec{u_1}| = 2/\sqrt{5}$ και κινείται στο S κατά μήκος της διχοτόμου της γωνίας που σχηματίζεται από τους άξονες Ox και Oy. Βρείτε την ταχύτητα και την γωνία (θ') που σχηματίζει η $\vec{u_1}'$ με τους άξονες $O'x'$ και $O'y'$ στο S', το όποιο είναι σε καθιερωμένη διαμόρφωση και έχει ταχύτητα $\vec{v} = \sqrt{2/5}\,\hat{x}$ ως προς το S.



Υπόδειξη: Βολεύει να φανταστούμε ένα υποθετικό σωματίδιο '2' το οποίο ηρεμεί στην αρχή των αξόνων του S' και κινείται με ταχύτητα $\vec{u_2} = \sqrt{2/5}\,\hat{x}$ στο S. Η ζητούμενη ταχύτητα θα είναι η σχετική ταχύτητα μεταξύ των δύο σωματιδίων, δηλαδή η ταχύτητα του '1' στο σύστημα ηρεμίας του '2'.

– Λύση –

Πρόβλημα 13

Ένα διαστημόπλοιο αναχωρεί από τη Γη με προορισμό τον εξωπλανήτη TOI 700d, ο οποίος βρίσκεται 100 έτη φωτός μακριά. Η κοσμική τροχιά του διαστημοπλοίου είναι υπερβολική και περιγράφεται από τη σχέση:

$$x(t) = \sqrt{\frac{c^4}{a_0^2} + (ct)^2} - \frac{c^2}{a_0},$$

όπου:

$$c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s} \quad \text{και} \quad a_0 = 9.81\,\mathrm{m/s^2}.$$

(α) Δείξτε ότι το διαστημόπλοιο θα φτάσει στον εξωπλανήτη TOI 700d σε περίπου 101 χρόνια, όπως αυτά μετριούνται στο σύστημα αναφοράς της Γης.

(β) Δείξτε ότι ο αστροναύτης, σύμφωνα με το δικό του σύστημα ηρεμίας, θα περάσει περίπου 5.2 χρόνια μέσα στο διαστημόπλοιο μέχρι να φτάσει στον TOI 700d, και συνεπώς το ταξίδι είναι πρακτικά εφικτό από την άποψη του χρόνου παραμονής στο διαστημόπλοιο και της επιτάχυνσης που θα δεχτεί το σώμα του.

(γ) Υπολογίστε την τετραπιτάχυνση $a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}$ του διαστημοπλοίου και δείξτε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$a^\mu a_\mu = a_0^2$$
$$a^\mu v_\mu = 0$$

για κάθε χρονική στιγμή της κίνησης.

(δ) Δείξτε ότι η χρονική μεταβολή της ορμής δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a_0},$$

όπου $\vec{p} = \gamma m v\,\hat{x}$ είναι η ορμή και $\vec{a_0} = a_0\hat{x}$ η ιδιόεπιτάχυνση του διαστημοπλοίου στο σύστημα αναφοράς της Γης.

(ε) Σχεδιάστε στο desmos.com καμπύλες που περιγράφονται από εξισώσεις της μορφής:

$$(x + x_0)^2 - t^2 = x_0^2,$$

για διάφορες τιμές της παραμέτρου x_0 που επιλέγετε αυθαίρετα. Εξετάστε την επίδραση της παραμέτρου $x_0 > 0$ στην καμπυλότητα της τροχιάς και μελετήστε πώς σχετίζεται η επιτάχυνση που θα υποστεί ένα σώμα με την τιμή της παραμέτρου x_0.

– Λύση –

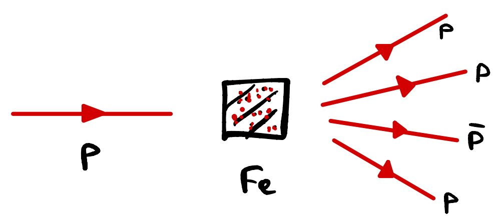
Πρόβλημα 14

Να βρείτε την ενέργεια του m_2 στο σύστημα ηρεμίας του m_1 κατά την διάσπαση $M \to m_1 m_2$.

– Λύση –

Πρόβλημα 15

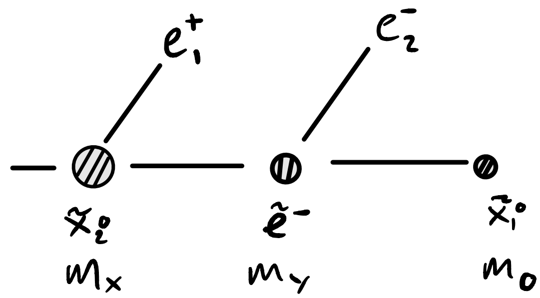
Βρείτε την ελάχιστη ενεργεία που πρέπει να έχει μια δέσμη πρωτονίων που πέφτει σε έναν ακίνητο στόχο ώστε να παραχθούν αντιπρωτόνια $pp \to ppp\bar{p}$.



– Λύση –

Πρόβλημα 16*

Όταν ένα βαρύ σωματίδιο ($\tilde{\chi}_2^0$) εκκινεί μια αλληλουχία διαδοχικών διασπάσεων δύο σωμάτων, η οποία καταλήγει σε ένα αόρατο σωματίδιο ($\tilde{\chi}_1^0$) που διαφεύγει του ανιχνευτή, οι μάζες των εμπλεκομένων σωματιδίων στην αλυσίδα ($m_{\tilde{\chi}_2^0} > m_{\tilde{\ell}^-} > m_{\tilde{\chi}_2^0}$) δεν είναι προσδιορίσιμες ακόμη και αν οι ορμές των δύο ορατών σωματιδίων (ℓ_1^+ και ℓ_2^-) μετρηθούν με μεγάλη ακρίβεια από τον ανιχνευτή.

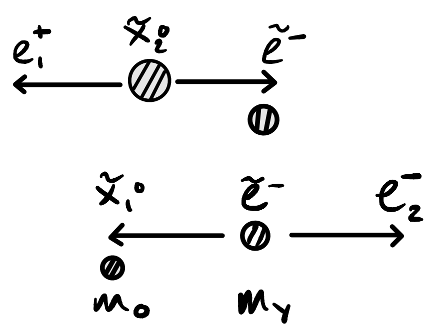


Παρ' όλα αυτά, μπορούν να εξαχθούν περιορισμοί στις μάζες των συμμετεχόντων καταστάσεων, μέσω του κινηματικού ορίου της αναλλοίωτης μάζας m_{12} των ℓ_1^+ και ℓ_2^-. Θέτοντας για ευκολία ($m_{\tilde{\chi}_2^0} = m_X, m_{\tilde{\ell}^-} = m_Y, m_{\tilde{\chi}_1^0} = m_0$), δείξτε ότι το άνω όριο είναι:

$$(m_{12}^{\max})^2 = \frac{(m_x^2 - m_y^2)(m_y^2 - m_0^2)}{m_y^2}$$

όταν τα φορτισμένα λεπτόνια ℓ_1^+ και ℓ_2^- έχουν αμελητέα[4] μάζα σε σχέση με τα υπόλοιπα της αλυσίδας, δηλαδή στην προσέγγιση $m_1 = m_2 = 0$.

Υπόδειξη: Η κατανομή m_{12} παρουσιάζει μέγιστο όταν στο σύστημα ηρεμίας του $\tilde{\chi}_2^0$ τα $1, 2$ είναι πλάτη-με-πλάτη (back-to-back) σχηματίζοντας γωνία π. Υπολογίστε για την περίπτωση αυτή το m_{12}.



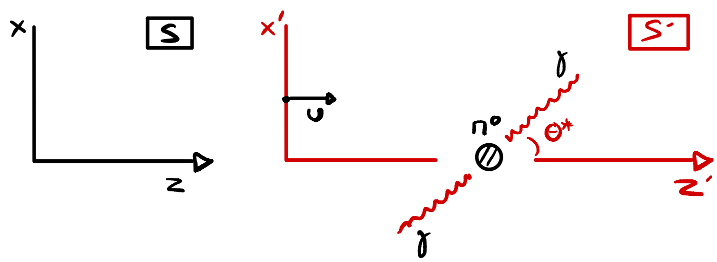
[4] Στην πράξη $m_e = 511$ keV και $m_\mu = 105$ MeV για $\ell = e, \mu$ ενώ $m_0 \sim 100$ GeV.

Πειραματικά η εύρεση ενός τέτοιου κινηματικού ορίου στην αναλλοίωτη μάζα φορτισμένων λεπτονίων $\ell^+\ell^-$ με $\ell = e, \mu$ στα δεδομένα του μεγάλου επιταχυντή αδρονίων LHC, θα σηματοδοτούσε ένδειξη φυσικής πέρας του καθιερωμένου προτύπου, όπως για παράδειγμα η χαρακτηριστική πειραματική υπογραφή $\tilde{\chi}^0_2 \to \ell^\pm \tilde{\ell}^\mp \to \ell^\pm \ell^\mp \tilde{\chi}^0_1$ με τα $\tilde{\chi}^0_2, \tilde{\chi}^0_1, \tilde{\ell}$ να είναι τα υπερυμμετρίκα αδερφάκια των gauge μποζονίων και λεπτονίων. Το $\tilde{\chi}^0_1$ να είναι ίσως το πιο διάσημο 'καταζητούμενο' σωματίδιο σκοτεινής ύλης την ύπαρξη του οποίου ακόμα δεν έχουμε επαληθεύσει.

– Λύση –

Πρόβλημα 17

Θεωρήστε τη διάσπαση $\pi^0 \to \gamma\gamma$ στο σύστημα ηρεμίας του πιονίου (S') η οποία λαμβάνει χώρα εξολοκλήρου επί του επιπέδου $y' = 0$, όπως στο σχήμα.



Αν θ^* η γωνία διάσπασης σε σχέση με τον άξονα z' και f' η συχνότητα του φωτονίου που διαδίδεται στο επίπεδο ($x' > 0, z' > 0$) στο S', δείξτε ότι:

(α) $f' = \frac{m}{2h}$, όπου m η μάζα του πιονίου και h η σταθερά του Πλανςκ.

(β) Για $\theta^* = 0$ η συχνότητα του φωτονίου στο S θα είναι ίση με

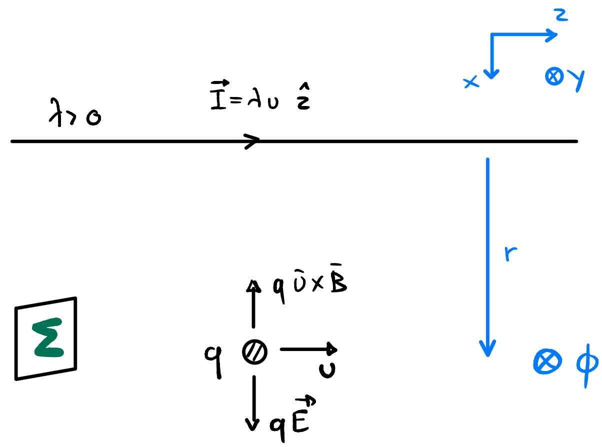
$$f = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} f' \quad \text{(διάμηκες φαινόμενο Doppler).}$$

(γ) Για $\theta^* = \pi/2$ η συχνότητα του φωτονίου στο S θα είναι ίση με $f = \frac{f'}{\gamma}$ (εγκάρσιο φαινόμενο Δοππλερ περίπτωση 1), ενώ για $\theta = \pi/2$ η συχνότητα του φωτονίου στο S θα είναι ίση με $f = \frac{f'}{\gamma}$ (εγκάρσιο φαινόμενο Doppler περίπτωση 2).

(δ) Αντικαταστήστε το πιόνιο από μια σημειακή πηγή φωτός που εκπέμπει ομοιόμορφα και προς όλες τις κατευθύνσεις στο S'. Δείξτε το φαινόμενο του προβολέα (head light effect), ότι δηλαδή στο S η μισή ακτινοβολία θα βρίσκεται εντός κώνου με γωνία $\tan\theta = \frac{1}{\gamma v}$ και άξονα τον Oz.

Η λύση του προβλήματος βρίσκεται στο https://youtu.be/oqZd0hloE-M.

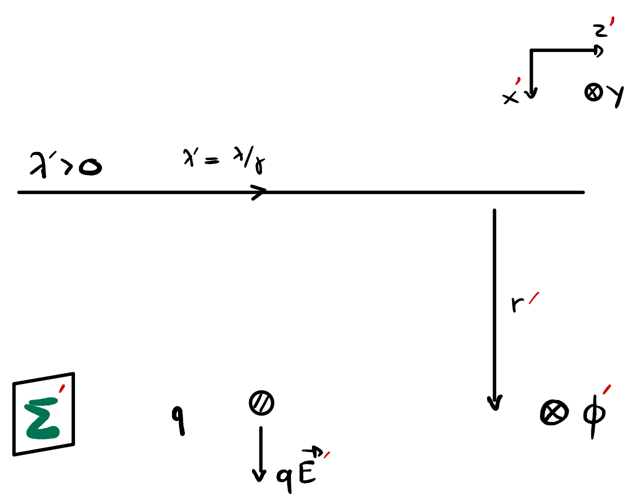
Πρόβλημα 18



Στο σύστημα αναφοράς Σ, μια άπειρη συνεχής γραμμική κατανομή φορτίου με πυκνότητα $\lambda > 0$, η οποία βρίσκεται κατά μήκος του άξονα z, κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v} = v\hat{z}$. Αυτή η κίνηση δημιουργεί ένα σταθερό ρεύμα $I = \lambda v$ κατά μήκος του άξονα z. Σε απόσταση r από το σύρμα υπάρχει φορτίο $q > 0$, το οποίο κινείται επίσης με την ίδια ταχύτητα $\vec{v} = v\hat{z}$. Στο φορτίο ασκούνται ηλεκτρικές και μαγνητικές δυνάμεις, οι οποίες περιγράφονται από τη δύναμη Lorentz:

$$\vec{F_L} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Ο υπολογισμός των πεδίων καθώς και της δύναμης που ασκείτε στο φορτίο απαιτεί τη χρήση αρχών της ηλεκτροστατικής και της μαγνητοστατικής.



Σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ', το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{v} = v\hat{z}$ ως προς το Σ, όλα τα φορτία βρίσκονται σε ηρεμία. Σε αυτό το σύστημα το πρόβλημα γίνεται καθαρά ηλεκτροστατικής φύσεως, καθώς το μαγνητικό πεδίο μηδενίζεται. Η πυκνότητα φορτίου στο Σ' είναι:

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\gamma},$$

όπου $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ είναι ο παράγοντας Lorentz.

(α) Υπολογίστε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο στα δύο συστήματα αναφοράς[5]. Βρείτε τη συνολική δύναμη που ασκείται στο φορτίο q, και δείξτε ότι αυτή δεν είναι ίδια:

$$\vec{F}_L = \frac{\vec{F}'_L}{\gamma}.$$

(β) Υπολογίστε τις συνιστώσες του τανυστή δύναμης $F^{\mu\nu}$ στα δύο συστήματα αναφοράς, Σ και Σ', όπου:

$$[F^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια, επαληθεύστε ότι ο $F'^{\mu\nu}$ που υπολογίζετε στο Σ' προκύπτει από τον $F^{\mu\nu}$ στο Σ μέσω του μετασχηματισμού:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\kappa}\Lambda^{\nu}{}_{\lambda}F^{\kappa\lambda},$$

όπου Λ είναι ο πίνακας μετασχηματισμού Lorentz που συνδέει τα δύο συστήματα αναφοράς Σ και Σ'. Δείξτε ότι τα αποτελέσματά σας για τον $F'^{\mu\nu}$ είναι συνεπή με τις τιμές που θα βρίσκατε χρησιμοποιώντας απευθείας τις τιμές των πεδίων $(\vec{E}', \vec{B}')$ στο σύστημα Σ'.

(γ) Υπολογίστε τις ποσότητες $(E')^2 - (B')^2$ και $(E)^2 - (B)^2$ δείξτε ότι αυτές είναι αριθμητικά ίδιες και στα δύο συστήματα αναφοράς.

– Λύση –

Επιλεγμένες ασκήσεις και εφαρμογές

Επιβεβαιώστε ότι είστε σε θέση να λύσετε, χωρίς να κοιτάξετε προηγουμένως τις λύσεις τους, τα εξής προβλήματα από τις σημειώσεις των καθ. Χριστοδουλάκη και Κορφιάτη (η-τάξη):

[5] Το πρόβλημα αυτό αναδεικνύει το αναπόφευκτο πάντρεμα του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου στην ενοποιημένη του μορφή ως συνιστώσες του τανυστή δευτέρας τάξεως $F^{\mu\nu}$. Η ύπαρξη και το είδος των πεδίων εξαρτάται από το σύστημα παρατήρησης.

1. Εφαρμογή 8.5: Μη κεντρική ελαστική κρούση [σ132]
2. Εφαρμογή 8.6: Απορρόφηση φωτονίου από ακίνητο σωματίδιο [σ134]
3. Εφαρμογή 8.7: Εκπομπή φωτονίου από ακίνητο σωματίδιο [σ135]
4. Εφαρμογή 8.8: Εκπομπή φωτονίου από κινούμενο σωματίδιο [σ136]
5. Εφαρμογή 8.9: Ενέργεια κατωφλίου [σ137]
6. Εφαρμογή 8.10: Ελαστική σκέδαση [σ139]
7. Άσκηση 9.3.3: Αποπλάνηση φωτός [σ177]
8. Άσκηση 9.3.4: Αποπλάνηση σωματιδίου [σ178]
9. Άσκηση 9.3.17: Ενέργεια και ορμή του ‘1’ στο σύστημα ηρεμίας του ‘2’ [σ194]
10. Άσκηση 9.4.4: D’Alembert [σ201]
11. Άσκηση 9.5.1: Ανάκλαση φωτονίου σε κινούμενο καθρέπτη [σ204]
12. Άσκηση 9.5.2: Σκέδαση φωτός σε διεργεμένο άτομο [σ205]
13. Άσκηση 9.5.3: $e^+e^- \to 2\gamma$ [σ206]
14. Άσκηση 9.5.4: Φωτονικός πύραυλος [σ206]
15. Άσκηση 9.5.5: Ελαστική σκέδαση πρωτονίων [σ207]
16. Άσκηση 9.5.6: Σκέδαση $\gamma e \to \gamma e$ [σ208]
17. Άσκηση 9.5.7: Απορρόφηση δυο φωτονίων σε [σ209]
18. Άσκηση 9.5.8[6]: Σκέδαση $2 \to 2$ με $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ [σ210]
19. Άσκηση 9.5.9: Διάσπαση $1 \to 2$ με $m_1 = m_2$ [σ211]
20. Άσκηση 9.5.26: Σκέδαση compton [σ230]
21. Άσκηση 9.5.28: $e^+e^- \to 2\gamma$ [σ234]

Σύνοψη Θεωρίας 4.1 – 4.6.

[6]Στην λύση της άσκησης 9.5.8 στο ερώτημα δ) υπάρχει λάθος στο πρόσημο της ταχύτητας στον μετασχηματισμό που μας πάει από το σύστημα ΚΟ στο σύστημα εργαστηρίου.

Επιλεγμένες ασκήσεις Ηλεκτρομαγνητισμού

Επιβεβαιώστε ότι είστε σε θέση να λύσετε, χωρίς να κοιτάξετε προηγουμένως τις λύσεις τους, τα εξής προβλήματα από τις σημειώσεις των καθ. Χριστοδουλάκη και Κορφιάτη (η-τάξη):

1. Ασκήσεις 9.6.1 - 9.6.6: τανυστής $F^{\mu\nu}$, αναλλοίωτα και μετασχηματισμοί Lorentz
2. Άσκηση 9.6.9: ηλεκτρομαγνητικό κύμα και μετασχηματισμοί Lorentz
3. Άσκηση 9.6.10: φορτισμένη πλάκα αφού πρώτα δείτε το Παράδειγμα 1 (σελ. 109)