Πρόβλημα 1

Δείξτε ότι αν ο μετασχηματισμός Lorentz ήταν μη-γραμμικός της μορφής

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= ax^2 + bx + c \\ y' &= y \\ z' &= z, \end{aligned}$$

δύο μπάρες που έχουν μοναδιαίο μήκους στο S και είναι τοποθετημένες στις θέσεις $x = 1, 2$ και $x = 3, 4$ θα είχαν μήκος στο S' το οποίο θα εξαρτιόταν από το πού ακριβώς έχουν τοποθετηθεί οι μπάρες στο S. Τι συμπέρασμα θα βγάζαμε για την ομοιογένεια του χώρου;

Πρόβλημα 2

Τρεις κεραυνοί πέφτουν ταυτόχρονα στο S στις θέσεις $x = -2, 0$ και 2. Βρείτε τις χρονικές στιγμές που θα παρατηρηθούν οι τρεις κεραυνοί στο S', το οποίο έχει ταχύτητα $\vec{u} = 3/5\,\hat{x}$ ως προς το S.

Πρόβλημα 3

Έστω ότι τα στοιχεία A_{ij}, X_i και Y_i είναι τα

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad [X_i] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad [Y_i] = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας την αθροιστική σύμβαση Einstein υπολογίστε τα

1. $[A_{ij}X_j]$
2. $[A_{ij}X_i]$
3. $[X_iY_i]$
4. $[X_iY_j]$

Υπόδειξη: Συμβουλευτείτε το 1ο κεφάλαιο (Υπενθυμίσεις από την θεωρία πινάκων) από τις σημειώσεις Χριστοδουλάκη & Κορφιάτη.

Πρόβλημα 4

Άσκηση 11, Κεφάλαιο 1, Rindler

Να αποδειχθεί ότι οι δύο πρώτες εξισώσεις του *τυποποιημένου* μετασχηματισμού Lorentz

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}$$

μπορούν να γραφούν στην μορφή

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh w & -\sinh w \\ -\sinh w & \cosh w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}$$

όπου $\tanh w = v$. (Υπενθυμίζουμε τις σχέσεις $\cosh w = \cos iw$, $i \sinh w = \sin iw$, οπότε κάθε τριγωνομετρική ταυτότητα μπορεί να μετατραπεί σε ταυτότητα ως προς τις υπερβολικές συναρτήσεις). Τυπολογικά πρόκειται για μία 'στροφή'[1] ως προς x και it, και ως τέτοια διατηρεί την ποσότητα $x^2 + (it)^2$.

Πρόβλημα 5

Μελετήστε τις εφαρμογές 3.1 - 3.5 από τις σημειώσεις Χριστοδουλάκη & Κορφιάτη.

Πρόβλημα 6

Άσκηση 10, Κεφάλαιο 1, Rindler Δύο φωτόνια κινούνται κατά μήκος του άξονα x του S, σε σταθερή μεταξύ τους απόσταση L. Να αποδειχθεί ότι στο S' η απόσταση μεταξύ των φωτονίων είναι

$$L\sqrt{\frac{1+v}{1-v}}.$$

Υπόδειξη: γράψτε τις κοσμικές τροχιές των δύο φωτονίων $x_1^\mu(t)$, $x_2^\mu(t)$ στο S και στο S'. Βρείτε το χωρικό κομμάτι του $\Delta x'^\mu = x_2'^\mu - x_1'^\mu$ όταν το χρονικό του είναι μηδέν.

[1] Σημείωση: *Το να μιλάμε για μια στροφή στον χωρόχρονο έχει αρκετή δόση 'υπερβολής', όμως η αλήθεια είναι ότι η χρήση της παραμέτρου $w = \text{artanh}(v)$ που ονομάζεται (ωκύτητα, γρηγοράδα, σβελτάδα, γοργότητα ...) ως απόδοση του αγγλικού όρου rapidity είναι 'υπερβολικά' χρήσιμη στα πειράματα φυσικής υψηλών ενεργειών (και όχι μόνο).*

Πρόβλημα 7

Έστω $A^\mu = (A^0, A^1, 0, 0)$ ανταλλοίωτος τανυστής πρώτης τάξης[2]. Βρείτε τα:

1) $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$
2) $A^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\mu A^\mu$
3) $A_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}{}^\mu A_\mu$
4) $A^\mu A_\mu$
5) $A_{\mu'} A^{\mu'}$

για τον μετασχηματισμό Lorentz σε καθιερωμένη διαμόρφωση:

$$[\Lambda^{\mu'}{}_\mu] = \Lambda(v) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{bmatrix}$$

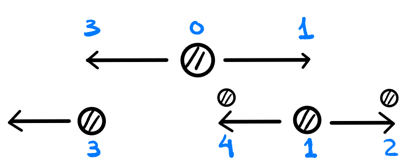
όπου

$$[\eta_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ο μετρικός τανυστής. Τέλος, γράψτε τις συνιστώσες του $\Lambda_{\mu'}{}^\mu$ σε μορφή πίνακα και συγκρίνεται με αυτές του $\Lambda^{\mu'}{}_\mu$.

Πρόβλημα 8

Το σωματίδιο 0 διασπάται στα 1 και 3 και ακολούθως το 1 διασπάται στα 2 και 4. Οι διασπάσεις λαμβάνουν χώρα κατά μήκος τους άξονα x με φορές όπως στο σχήμα.



Θεωρούμε τρία συστήματα αναφοράς, S το σύστημα ηρεμίας του 0, S' το σύστημα ηρεμίας του 1 και S'' το σύστημα ηρεμίας του 2. Αν v_1 η ταχύτητα του 1 στο S και v_2' η ταχύτητα του 2 στο S', δείξτε ότι η ταχύτητα του 2 στο S δίνεται από την σχέση:

$$v_2 = \frac{v_1 + v_2'}{1 + v_1 v_2'}$$

[2] Θεωρούμε τις συνιστώσες A^0 και A^1 γνωστές.

ικανοποιώντας την σχέση $\Lambda(v_2) = \Lambda(v_2')\Lambda(v_1)$, όταν οι τρεις ταχύτητες είναι στην ίδια διεύθυνση.
Υπόδειξη: Το διάνυσμα θέσης του 2 στο S'' θα δίνεται από δύο διαδοχικούς μετασχηματισμούς Lorentz $S \to S' \to S''$ σε καθιερωμένη διαμόρφωση

$$x_2^{\mu''} = \begin{bmatrix} t'' \\ 0 \end{bmatrix} = \Lambda(v_2')\Lambda(v_1) \begin{bmatrix} t \\ v_2 t \end{bmatrix} = \Lambda^{\mu''}{}_{\mu'}\Lambda^{\mu'}{}_{\mu}\, x_2^{\mu}$$

με

$$[\Lambda^{\mu'}{}_{\mu}] = \Lambda(v_1) = \begin{bmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1 v_1 \\ -\gamma_1 v_1 & \gamma_1 \end{bmatrix}$$
$$[\Lambda^{\mu''}{}_{\mu'}] = \Lambda(v_2') = \begin{bmatrix} \gamma_2' & -\gamma_2' v_2' \\ -\gamma_2' v_2' & \gamma_2' \end{bmatrix}$$

Πρόβλημα 9

Έστω ο γενικός μετασχηματισμός Lorentz που προκύπτει ύστερα από δύο διαδοχικές προωθήσεις σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις

$$L = \Lambda(\vec{v_2})\Lambda(\vec{v_1})$$

με $\vec{v_1} = 4/5\hat{x}$, $\vec{v_2} = 4/5\hat{y}$. Δείξτε ότι $L = \tilde{R}_z(\theta)\Lambda(\vec{v_3})$ με $\vec{v_3} = \vec{v_1} + \vec{v_2}/\gamma_2$ και ότι ο μετασχηματισμός $\tilde{R}_z$[3] αντιστοιχεί σε μια στροφή στο επίπεδο x, y κατά την αρνητική φορά (αριστερόστροφα) με γωνία θ η οποία έχει $\cos\theta = 45/51$ και $\sin\theta = -72/153$.

Υπόδειξη: υπολογίστε πρώτα τους L, L^{-1} και $\Lambda(\vec{v_3})$ και λύστε ως προς τον $\tilde{R}_z$. Σημειώστε ότι εν γένει $L \neq L^T$ για τον γενικό μετασχηματισμό Lorentz, παρότι ισχύει ότι $\Lambda = \Lambda^T$ και $\Lambda^{-1}(\vec{v}) = \Lambda(-\vec{v})$ για τον γενικό μετασχηματισμό προώθησης.

Πρόβλημα 10

Για τον πίνακα L του προηγούμενου προβλήματος δείξτε ότι

1. $L^T \eta L = \eta$
2. $\eta L^T \eta = L^{-1}$
3. $\eta L \eta = (L^{-1})^T$

Σημείωση: Το πρόβλημα αυτό είναι τετριμμένο αν θυμηθούμε ότι $\eta = \eta^T = \eta^{-1}$ και $\eta^2 = I$. Βρείτε υλοποίηση των σχετικών πινάκων σε Η/Υ, στο github του μαθήματος της υπολογιστικής φυσικής.

[3] $\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$

Πρόβλημα 11

Εάν $\mathbf{X} = [X^\mu]$ πίνακας στήλη 4×1 που αναπαριστά τις συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου τετραδιάνυσματος και $\mathbf{Y} = [X_\mu] = \eta\mathbf{X}$ η αναπαράσταση ως πίνακα στήλη του συναλλοίωτου τετραδιάνυσματος, δείξτε ότι αν το $\mathbf{X}$ μετασχηματίζεται ως $\mathbf{X}' = L\mathbf{X}$ τότε πρέπει το $\mathbf{Y}' = (L^{-1})^T\mathbf{Y}$ προκειμένου το εσωτερικό γινόμενο των δύο να παραμένει αναλλοίωτο $\mathbf{Y}^T\mathbf{X} = \mathbf{Y}'^T\mathbf{X}'$.

Σημείωση: Σε μορφή συνιστωσών, $X'^\mu = L^\mu{}_\nu X^\nu$, $X'_\mu = L_\mu{}^\nu X_\nu$, *συνεπώς* $[L^\mu{}_\nu] = L$ *και* $[L_\mu{}^\nu] = (L^{-1})^T$. *Στην σύμβαση των τονισμένων δεικτών τα παραπάνω γράφονται* $X^{\mu'} = L^{\mu'}{}_\mu X^\mu$, $X_{\mu'} = L_{\mu'}{}^\mu X_\mu$, *συνεπώς* $[L^{\mu'}{}_\mu] = L$ *και* $[L_{\mu'}{}^\mu] = (L^{-1})^T$

Σελφ τεστ

Επιβεβαιώστε ότι είστε σε θέση να λύσετε, χωρίς να κοιτάξετε προηγουμένως τις λύσεις τους, τα εξής προβλήματα από τις σημειώσεις των καθ. Χριστοδουλάκη και Κορφιάτη (η-τάξη):

1. Εφαρμογή 8.5: Μη κεντρική ελαστική κρούση [σ132]
2. Εφαρμογή 8.6: Απορρόφηση φωτονίου από ακίνητο σωματίδιο [σ134]
3. Εφαρμογή 8.7: Εκπομπή φωτονίου από ακίνητο σωματίδιο [σ135]
4. Εφαρμογή 8.8: Εκπομπή φωτονίου από κινούμενο σωματίδιο [σ136]
5. Εφαρμογή 8.9: Ενέργεια κατωφλίου [σ137]
6. Εφαρμογή 8.10: Ελαστική σκέδαση [σ139]
7. Άσκηση 9.3.3: Αποπλάνηση φωτός [σ177]
8. Άσκηση 9.3.4: Αποπλάνηση σωματιδίου [σ178]
9. Άσκηση 9.3.17: Ενέργεια και ορμή του '1' στο σύστημα ηρεμίας του '2' [σ194]
10. Άσκηση 9.4.4: D'Alembert [σ201]
11. Άσκηση 9.5.1: Ανάκλαση φωτονίου σε κινούμενο καθρέπτη [σ204]
12. Άσκηση 9.5.2: Σκέδαση φωτός σε διεργεμένο άτομο [σ205]
13. Άσκηση 9.5.3: $e^+e^- \to 2\gamma$ [σ206]
14. Άσκηση 9.5.4: Φωτονικός πύραυλος [σ206]
15. Άσκηση 9.5.5: Ελαστική σκέδαση πρωτονίων [σ207]
16. Άσκηση 9.5.6: Σκέδαση $\gamma e \to \gamma e$ [σ208]

17. Άσκηση 9.5.7: Απορρόφηση δυο φωτονίων σε [σ209]
18. Άσκηση 9.5.8[4]: Σκέδαση $2 \to 2$ με $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ [σ210]
19. Άσκηση 9.5.9: Διάσπαση $1 \to 2$ με $m_1 = m_2$ [σ211]
20. Άσκηση 9.5.26: Σκέδαση compton [σ230]
21. Άσκηση 9.5.28: $e^+e^- \to 2\gamma$ [σ234]

Σύνοψη Θεωρίας 4.1 – 4.6.

[4] Στην λύση της άσκησης 9.5.8 στο ερώτημα δ) υπάρχει λάθος στο πρόσημο της ταχύτητας στον μετασχηματισμό που μας πάει από το σύστημα ΚΟ στο σύστημα εργαστηρίου.