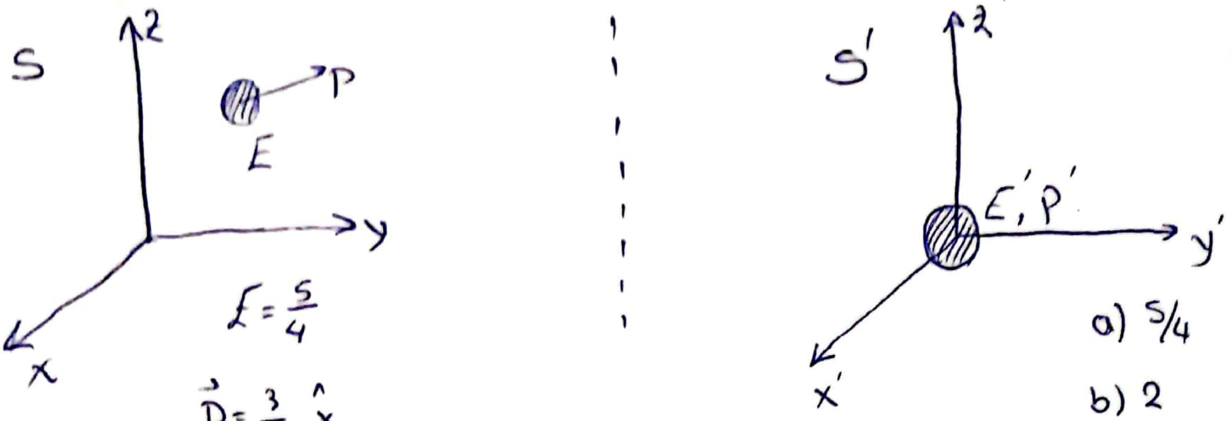
Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας

Μετάβαση προς το σύστημα ηρεμίας ενός σωματιδίου



$E = \frac{5}{4}$

$\vec{p} = \frac{3}{4}\hat{x}$

$E' = ?$

a) $5/4$

b) 2

c) 1

d) $3/5$

→ Η ενέργεια θα αλλάξει διότι η ενέργεια εξαρτάται από την ορμή, η οποία είναι μηδενική στο σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου. Άρα η ενέργεια ηρεμίας θα ισούται με τη μάζα και θα είναι σίγουρα μικρότερη από $5/4$. ⇒ c). χάνονται οι φεύγουν.

$p^\mu = (E, \vec{p})$ S

$p'^\mu = (m, \vec{0})$ S'

$\Lambda(\vec{v} = ?)$ ώστε $p'^\mu = \Lambda(\vec{v})\, p^\mu$

Γενικά $\vec{v} = \dfrac{\vec{p}}{E} = \dfrac{\gamma m \vec{v}}{\gamma m}$ και $\gamma = \dfrac{E}{m}$.

$\underset{\sim}{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_{3\times1}$

$$\underset{4\times4}{\Lambda(\vec{v})} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma \underset{\sim}{v}^T \\ -\gamma \underset{\sim}{v} & I + \frac{(\gamma-1)}{v^2}\underset{\sim}{v}\underset{\sim}{v}^T \end{bmatrix}$$

$v^2 = \underset{\sim}{v}^T \cdot \underset{\sim}{v}$

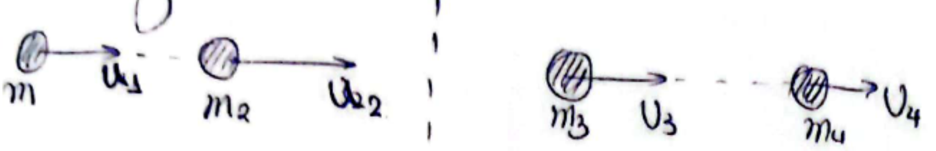
ενώ $\underset{\sim}{v}\underset{\sim}{v}^T \to 3\times3$.

Άρα $$\Lambda(\vec{v}) \cdot p^\mu = \begin{bmatrix} \gamma^2 m - \gamma^2 m \underset{\sim}{v}^T \cdot \underset{\sim}{v} \\ -\gamma^2 \underset{\sim}{v} m + \gamma m \underset{\sim}{v} + \frac{(\gamma-1)}{v^2}\underset{\sim}{v}\underset{\sim}{v}^T \gamma m \underset{\sim}{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ \vec{0} \end{bmatrix}$$

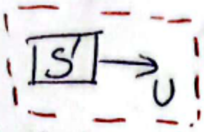
→ Γιατί ορίζαμε στην Κ.Μ. την ορμή ως $m\vec{v}$?

Διατήρηση $\vec{P}$, E

παράδειγμα μονοδιάστατης κρούσης.



πριν | μετά



Κλασική Μηχανική

$\vec{p_i} = m_i \vec{v_i}$

▶ Θα πρέπει να ισχύει:

$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_3 u_3 + m_4 u_4$ (μπορεί να έχουμε ανταλλαγή μάζας).

→ παρατηρούμε ότι η ποσότητα $\sum_i m_i v_i$ διατηρείται. Άρα ορίζουμε την ορμή έτσι λόγω πειραματικών παρατηρήσεων

Τι ισχύει στο S'; ⇒ Θα δούμε ότι αυτό που διατηρείται είναι η σχετικιστική "έκδοση" της ορμής. Και πειραματικά σε επιβεβαιώνεται συγκρούσεις σωματιδίων (και όχι μόνο).

Κλ. Μηχανική:

$u_i' = u_i - v$ για το S'

$\Rightarrow m_1(u_1 - v) + m_2(u_2 - v) = m_3(u_3 - v) + m_4(u_4 - v)$ στο S'

$\Rightarrow \underbrace{(m_1 u_1 + m_2 u_2)} - v(m_1 + m_2) = \underbrace{(m_3 u_3 + m_4 u_4)} - v(m_3 + m_4) \quad \forall v.$

Διατήρηση προηγούμενου συστήματος S

Εάν ισχύει $m_1 + m_2 = m_3 + m_4$ τότε έχουμε και πάλι διατήρηση

⇒ Θα δούμε ότι στην σχετικότητα δεν έχουμε διατήρηση της μάζας αλλά της ενέργειας.

Σχετικότητα:

$u_i' = \frac{u_i - v}{1 - u_i v}$

$\Rightarrow m_1 \frac{u_1 - v}{1 - u_1 v} + m_2 \frac{u_2 - v}{1 - u_2 v} = m_3 \frac{u_3 - v}{1 - u_3 v} + m_4 \frac{u_4 - v}{1 - u_4 v}$

δεν ισχύει ισότητα $\forall v$.

• Για $p_i = \gamma_i m_i u_i$: $\overset{S}{\Rightarrow} \frac{m_1 u_1}{\sqrt{1-u_1^2}} + \frac{m_2 u_2}{\sqrt{1-u_2^2}} = \frac{m_3 u_3}{\sqrt{1-u_3^2}} + \frac{m_4 u_4}{\sqrt{1-u_4^2}}$ ☑

αυτή η ποσότητα διατηρείται.

για το (S') $\dfrac{m_1 u_1'}{\sqrt{1-u_1'^2}} + \dfrac{m_2 u_2'}{\sqrt{1-u_2'^2}} = \dfrac{m_3 u_3'}{\sqrt{1-u_3'^2}} + \dfrac{m_4 u_4'^2}{\sqrt{1-u_4'^2}}$. Ισχύει αρκεί να αντικατασταθεί το $u_i' = \dfrac{u_i - v}{1-u_i v}$

Είναι $p_i' = \gamma_i' m_i u_i' = \dfrac{m_i}{\sqrt{1-u_i'^2}} \dfrac{u_i - v}{1-u_i v}$

$$= \frac{u_i - v}{1-u_i v}\frac{m_i}{\sqrt{1-\left(\frac{u_i-v}{1-u_i v}\right)^2}}$$

έχουμε:

$$1-\left(\frac{u_i-v}{1-u_i v}\right)^2 = 1 - \frac{u_i^2 - 2u_i v + v^2}{1-2u_i v + u_i^2 v^2} = \frac{1-2u_i v + u_i^2 v^2 - u_i^2 + 2u_i v - v^2}{1-2u_i v + u_i^2 v^2}$$

$$= \frac{1+u_i^2 v^2 - u_i^2 - v^2}{1-2u_i v + u_i^2 v^2}$$

$$= \frac{1+u_i^2 v^2 - u_i^2 - v^2}{(1-u_i v)^2}$$

$$= \frac{(1-u_i^2)(1-v^2)}{(1-u_i v)^2}$$

Άρα $p_i' = \dfrac{u_i - v}{1-u_i v}\dfrac{m_i(1-u_i v)}{\sqrt{(1-u_i^2)(1-v^2)}}$

$= \gamma_i \gamma m_i (u_i - v)$

όπου $\gamma_i = \dfrac{1}{\sqrt{1-u_i^2}}$ και $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}$

Η ορμή αλλάζει ⟹ δεν είναι αναλλοίωτη σε μετασχ. Lorentz.

Άρα στο S'

$$\gamma\gamma_1 m_1 (u_1 - v) + \gamma\gamma_2 m_2 (u_2 - v) = \gamma\gamma_3 m_3 (u_3 - v) + \gamma\gamma_4 m_4 (u_4 - v)$$

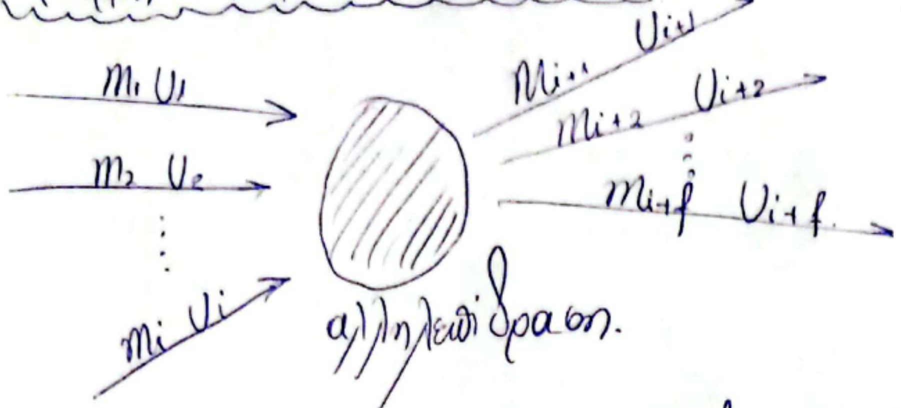
$$\Rightarrow \underbrace{\gamma_1 m_1 u_1}_{P_1} + \underbrace{\gamma_2 m_2 u_2}_{P_2} - v(\gamma_1 m_1 + \gamma_2 m_2) = \underbrace{\gamma_3 m_3 u_3}_{P_3} + \underbrace{\gamma_4 m_4 u_4}_{P_4} - v(\gamma_3 m_3 + \gamma_4 m_4)$$

Προκειμένου να ισχύει η διατήρηση όπως την γνωρίζουμε θα πρέπει

$\underbrace{\gamma_1 m_1}_{E_1} + \underbrace{\gamma_2 m_2}_{E_2} = \underbrace{\gamma_3 m_3}_{E_3} + \underbrace{\gamma_4 m_4}_{E_4}$! Ενέργεια.

⟶ Επειδή διατηρείται η ενέργεια τότε διατηρείται και η ορμή.

τετραορμή συστήματος σωματιδίων.



μπορεί και το πλήθος των σωματιδίων να μεταβληθεί.

Κλ. Μηχανική: $\sum_{n=1}^{i} m_n \vec{U}_n = \sum_{n=i+1}^{i+f} m_n \vec{U}_n$.

και $\sum_{n=1}^{i} m_n = \sum_{n=i+1}^{i+f} m_n$.

Σχετικότητα: $\sum_{n=1}^{i} P_n^{\mu} = \sum_{n=i+1}^{i+f} P_n^{\mu}$. ▶ Η συνολική τετραορμή P^μ του κλειστού συστήματος είναι σταθερή.

▶ αναλλοίωτη μάζα του συστήματος:

$$M^2 = E^2 - (\vec{P})^2.$$

$P^\mu = (E, \vec{P})$ τετραορμή συστήματος.

Ορίζουμε: $\sqrt{s} \equiv M$ στο κέντρο ορμής θα έχει μείνει μόνο $P^{\mu'}_{cm} = (M, \vec{0})$

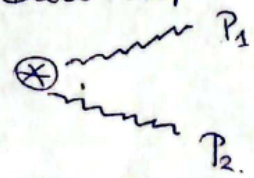
↳ center of mass ή center of momentum.

Για να μεταβούμε στο κέντρο ορμής θα αρκεί να βρούμε την $\vec{U}_{cm} = \frac{\vec{P}}{E}$ και $\gamma_{cm} = \frac{E}{M}$ και να κάνουμε τον μετασχηματισμό Lorentz.

Παράδειγμα: Μάζα συστήματος 2 φωτονίων

$X \rightarrow 2\gamma$.

$\boxed{LHC}$ πριν | μετά



$\vec{P}_1 = (3, 4, 0)$ [GeV]

$\vec{P}_2 = (3, -4, 0)$ [GeV].

$M_X = ?$

φωτόνιο ⇝ φωτοειδές.

Ισχύει $E_i = |\vec{p}_i|$ αφού $m_i = 0$. $P_1^\mu = (|\vec{P}_1|, \vec{P}_1) = (5, 3, 4, 0)$, $P_2^\mu = (|\vec{P}_2|, \vec{P}_2) = (5, 3, -4, 0)$ $\Rightarrow |P_1^\mu|^2 = |P_2^\mu|^2 = \emptyset$

$P^\mu = \sum_i P_i^\mu = (10, 6, 0, 0)$. $M^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow M = 8$ GeV.

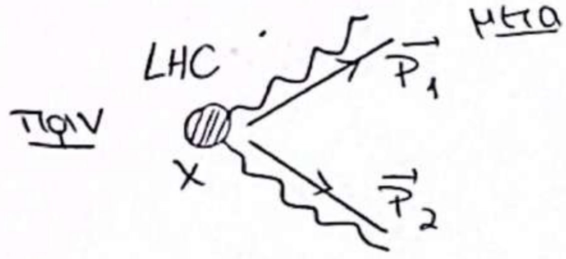
σημειώσεις
Μαρία Γ.

Εφαρμογή / Άσκηση : Μάζα συστήματος 2γ

$X \longrightarrow 2\gamma$

$\vec{p}_1 = (3,4,0)$ [GeV]

$\vec{p}_2 = (3,-4,0)$



Ποια η μάζα του σωματιδίου πριν;

$M_X = ?$ — 0, >0, εξαρτάται

Προάγουμε τα $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ σε τετραδιανύσμ.:

$$p_1^\mu = (E_1, \vec{p}_1) = (|\vec{p}_1|, \vec{p}_1) = (5,3,4,0)$$

$$\longrightarrow \quad p_2^\mu = (E_2, \vec{p}_2) = (|\vec{p}_2|, \vec{p}_2) = (5,3,-4,0)$$

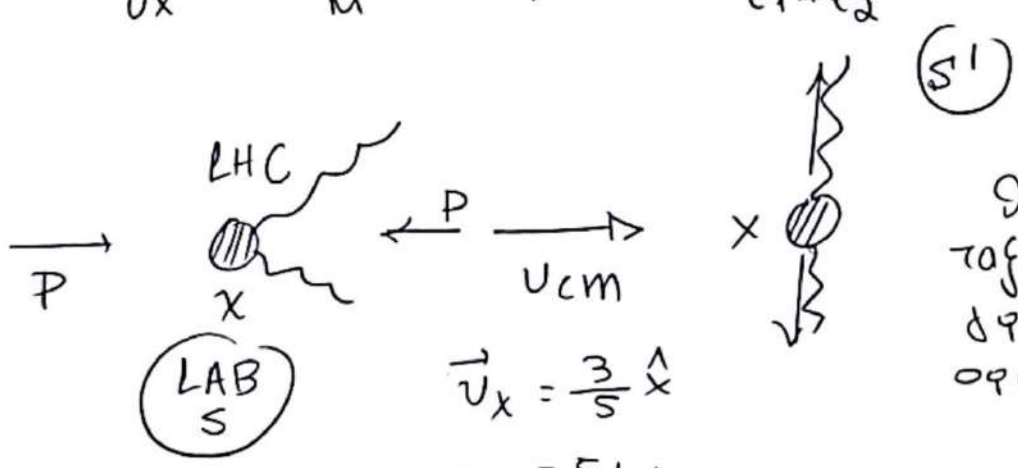
$$(p_1^\mu)^2 = (p_2^\mu)^2 = \phi$$

Άρα $\quad P^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu = (10, 6, 0, 0)$

Επομένως, $\quad M^2 = 100 - 36 = 64 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = 8 \text{ GeV}}$

$$\gamma_X = \frac{E_1 + E_2}{M} \quad , \quad \vec{v}_X = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{E_1 + E_2}$$

•



$\vec{v}_X = \frac{3}{5}\hat{x}$

$\gamma_X = 5/4$

Θέλω να ταξιδέψω αρκετά γρήγορα ώστε οι ορμές των γ να μην σχηματίζουν γωνία
(?)

$$\Lambda(\vec{v}_X) = \begin{pmatrix} E_X/M & -\vec{p}/M \\ -\vec{p}/M & E_X/M \end{pmatrix} , \quad \Lambda(\vec{v}_{cm}) = \begin{pmatrix} 5/4 & -3/4 & 0 & 0 \\ -3/4 & 5/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1^{\mu'} = \Lambda(\vec{u}_{cm}) \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25/4 - 9/4 \\ -15/4 + \frac{15}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Αντίστοιχα,

$$P_2^{\mu'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Σημείωση: στο σύστημα ηρεμίας του X η αρχική μάζα m_x μετατρέπεται εξολοκλήρου σε ενέργεια (φως). Το κάθε φωτόνιο θα έχει $E' = m_x/2$ και θα κινείται στην ίδια ευθεία αλλά με αντίθετη φορά από το άλλο!