σημειώσεις Μαρίας Γ.
διαλέξεις κ. Θεοφιλάτου ΕΘΣ

Διάλεξη 31/10/23

- Πρόβλημα 7

Έστω $A^\mu = (A^0, A^1, 0, 0)$ ανταλλοίωτος τανυστής πρώτης τάξης.
Βρείτε τα (1) $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$, (2) $A^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} A^\mu$, (3) $A_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}{}^{\mu} A_\mu$,
(4) $A^\mu A_\mu$, (5) $A_{\mu'} A^{\mu'}$
για τον μετασχηματισμό Lorentz σε καθιερωμένη διαμόρφωση
$$[\Lambda^{\mu'}{}_{\mu}] = \Lambda(u) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma u \\ -\gamma u & \gamma \end{bmatrix}$$
όπου $[\eta_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ο μετρικός τανυστής. Τέλος, γράψτε τις συνιστώσες του $\Lambda_{\mu'}{}^{\mu}$ σε μορφή πίνακα και συγκρίνετε με αυτές του $\Lambda^{\mu'}{}_{\mu}$.

(1) $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$, $A^\mu = (A^0, A^1, 0, 0)$
$\mu = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$

$$A_0 = \eta_{00} A^0 + \eta_{01} A^1 + \eta_{02} A^2 + \eta_{03} A^3 = -1 A^0 + 0$$
$$A_1 = \eta_{10} A^0 + \eta_{11} A^1 + \eta_{12} A^2 + \eta_{13} A^3 = 0 + 1 A^1$$
$$A_2 = 0$$
$$A_3 = 0 \qquad \text{άρα} \qquad \boxed{A_\mu = (-A^0, A^1)}$$

(2) $A^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} A^\mu$ ή $A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^\nu$

σύμβαση τονισμένων δεικτών a la Rindler

ισοδύναμη γραφή σε άλλα βιβλία

$$A^{0'} = \Lambda^{0'}{}_{0} A^0 + \Lambda^{0'}{}_{1} A^1 + \Lambda^{0'}{}_{2} A^2 + \Lambda^{0'}{}_{3} A^3 = \gamma A^0 - \gamma u A^1$$
$$A^{1'} = \Lambda^{1'}{}_{0} A^0 + \Lambda^{1'}{}_{1} A^1 + \Lambda^{1'}{}_{2} A^2 + \Lambda^{1'}{}_{3} A^3 = -\gamma u A^0 + \gamma A^1$$

άρα $A^{\mu'} = (\gamma A^0 - \gamma u A^1, \gamma A^1 - \gamma u A^0, 0, 0)$

ή
$$[A^{\mu'}] = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma u \\ -\gamma u & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^0 \\ A^1 \end{bmatrix}$$

$$A_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}{}^{\mu} A_\mu = \eta_{\mu'\kappa'} \Lambda^{\kappa'}{}_{\nu} \eta^{\nu\mu} A_\mu$$

$$\Lambda_{\mu'}{}^{\mu} = [\eta_{\mu'\kappa'} \Lambda^{\kappa'}{}_{\nu} \eta^{\nu\mu}]$$

$$\Rightarrow = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma u \\ -\gamma u & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A_\mu = \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma & \gamma u \\ \gamma u & \gamma \end{bmatrix}}_{} A_\mu$$

$$\left(\Lambda^{-1} = \Lambda(-u) \quad \text{αν} \quad \Lambda(u) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma u \\ -\gamma u & \gamma \end{bmatrix} \right)$$

(*) Το συναλλοίωτο $A_{\mu'}$ μετασχηματίζεται με τον Λ^{-1} σε αντίθεση με το ανταλλοίωτο $A^{\mu'}$ που μετασχηματίζεται με τον Λ.

$$A^\mu A_\mu = A^\kappa A_\kappa = A^\theta A_\theta = -A^0 A^0 + A^1 A^1 + A^2 A^2 + A^3 A^3 = \text{βαθμωτό}$$

(*) $A_\mu = (-A^0, \vec{A}) = (-A^0, A^1) = (A_0, A_1)$

$$B^\mu A_\mu = -B^0 A^0 + \vec{B} \cdot \vec{A} \quad \text{(για ένα οποιοδήποτε διάνυσμα)}$$

$A^{\mu'} A_{\mu'} = A_{\mu'} A^{\mu'}$

όπου $A_{\mu'} = (-A^0\gamma + \gamma u A^1, \gamma A^1 - \gamma u A^0, 0, 0)$

άρα

$$A^{\mu'} A_{\mu'} = A_{\mu'} A^{\mu'} = (-A^0\gamma + \gamma u A^1)(\overbrace{\gamma A^0 - \gamma u A^1}^{A^{0'}}) + (\gamma A^1 - \gamma u A^0) \cdot \underbrace{(\gamma A^1 - \gamma u A^0)}_{A^{1'}} + 0 + 0$$

$$\boxed{A_{\mu'} A^{\mu'} \stackrel{?}{=} A_\mu A^\mu}$$

$$A_{\mu'} A^{\mu'} = -\gamma^2 (A^0)^2 - \gamma^2 u^2 (A^1)^2 + A^0 \cancel{\gamma^2 u A^1} + \gamma^2 u \cancel{A^1 A^0} + \gamma^2 (A^1)^2 - $$
$$- \gamma^2 u^2 (A^0)^2 - \gamma^2 \cancel{u} A^0 A^1 - \gamma^2 u \cancel{A^0} A^1 =$$

$$= -(A^0)^2(\gamma^2 - \gamma^2 v^2) + (A^1)^2(\gamma^2 - \gamma^2 v^2) = -(A^0)^2 + (A^1)^2$$

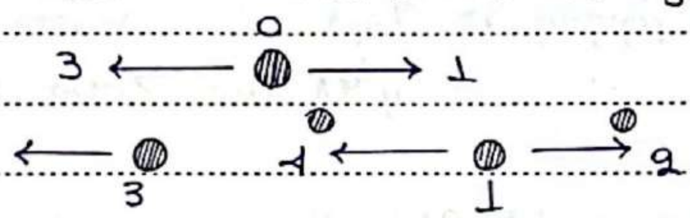
- Σύνθεση μετασχηματισμών Lorentz σε 1D

$\Lambda(v_2)\Lambda(v_1) = \Lambda(v_3)$, όπου $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$

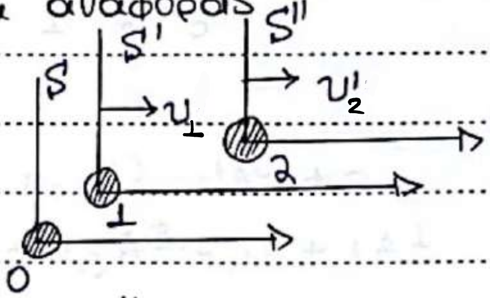
και $v_3 \neq v_2 + v_1$

- Πρόβλημα 8

Το σωματίδιο 0 διασπάται στα 1 κ' 3 και ακολούθως στα 2 και 4. (κατά μήκος του άξονα x).



Θεωρούμε τρία συστήματα αναφοράς



S: συστ. ηρεμίας του 0

S': συστ. ηρεμίας του 1

S'': συστ. ηρεμίας του 2

$v_0 = 0$, $v_1' = 0$, $v_2 = ?$, $v_2'' = 0$

νδο $v_2 = \dfrac{v_1 + v_2'}{1 + v_1 v_2'}$

Έχουμε: $x_2^{\mu} = \begin{pmatrix} t \\ v_2 t \end{pmatrix}$, $v_2 = ;$

$$X_2^{\mu'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1 v_1 \\ -\gamma_1 v_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}}_{\Lambda(v_1)} \begin{pmatrix} t \\ v_2 t \end{pmatrix}$$

$$X_2^{\mu''} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_2' & -\gamma_2' v_2' \\ -\gamma_2' v_2' & \gamma_2' \end{pmatrix}}_{\Lambda(v_2')} X_2^{\mu'} = \begin{pmatrix} t'' \\ 0 \end{pmatrix}$$

Άρα $X_2^{\mu''} = \Lambda(v_2')\Lambda(v_1)X_2^{\mu}$

$$\Lambda(v_2')\cdot\Lambda(v_1) = \begin{pmatrix} \gamma_2' & -\gamma_2' v_2' \\ -\gamma_2' v_2' & \gamma_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1 v_1 \\ -\gamma_1 v_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_2'\gamma_1 + \gamma_1\gamma_2' v_1 v_2' & \gamma_2'(-\gamma_1 v_1) - \gamma_2' v_2' \gamma_1 \\ -\gamma_1\gamma_2' v_2' + \gamma_2'(-\gamma_1 v_1) & \gamma_1 v_1 \gamma_2' v_2' + \gamma_2'\gamma_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_2'\gamma_1(1 + v_2' v_1) & -\gamma_2'\gamma_1(v_1 + v_2') \\ -\gamma_2'\gamma_1(v_1 + v_2') & \gamma_2'\gamma_1(1 + v_2' v_1) \end{pmatrix}$$

Αν ορίσω $\gamma_2 \equiv \gamma_2'\gamma_1(1 + v_2' v_1)$, τότε:
$\gamma_2 v_2 \equiv \gamma_2'\gamma_1(v_1 + v_2')$

$$\boxed{\Lambda(v_2')\cdot\Lambda(v_1) = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_2 v_2 \\ -\gamma_2 v_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}}$$

οπότε $\boxed{v_2 = \dfrac{v_1 + v_2'}{1 + v_1 v_2'}}$

(*) $X_2^{\mu''} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_2 v_2 \\ -\gamma_2 v_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ v_2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t'' \\ 0 \end{pmatrix}$

και $\boxed{t'' = \dfrac{t}{\gamma_2}}$

→ Έστω ότι έχω $\Lambda(\upsilon) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\upsilon \\ -\gamma\upsilon & \gamma \end{pmatrix}$

αν ορίσω $\cosh\omega = \gamma = \dfrac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{2}$, $\upsilon = \tanh\omega$

$\downarrow$

$\sinh\omega = \gamma\upsilon = \dfrac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2}$

(απόδειξη)

$ch\omega = \gamma \rightsquigarrow ch^2\omega - sh^2\omega = 1 \Rightarrow sh\omega = \sqrt{\gamma^2 - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow sh\omega = \sqrt{\gamma^2 - 1} = \sqrt{\dfrac{1}{1-\upsilon^2} - \dfrac{1-\upsilon^2}{1-\upsilon^2}} = \sqrt{\dfrac{\upsilon^2}{1-\upsilon^2}} = \gamma\upsilon$

Οπότε (αντί για $\Lambda(\upsilon_2)\Lambda(\upsilon_1)$) έχουμε:

$$\Lambda(\omega_2)\Lambda(\omega_1) = \begin{pmatrix} ch\omega_2 & -sh\omega_2 \\ -sh\omega_2 & ch\omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ch\omega_1 & -sh\omega_1 \\ -sh\omega_1 & ch\omega_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{\boxed{ch\omega_2 \cdot ch\omega_1 + sh\omega_2 \cdot sh\omega_1}}_{\to\, ch(\omega_2+\omega_1)} & \underbrace{\boxed{-ch\omega_2 \cdot sh\omega_1 - sh\omega_2 \cdot ch\omega_1}}_{\to\, -sh(\omega_1+\omega_2)} \\ -sh\omega_2 \cdot ch\omega_1 - ch\omega_2 \cdot sh\omega_1 & sh\omega_2 \cdot sh\omega_1 + ch\omega_2 \cdot ch\omega_1 \end{pmatrix} =$$

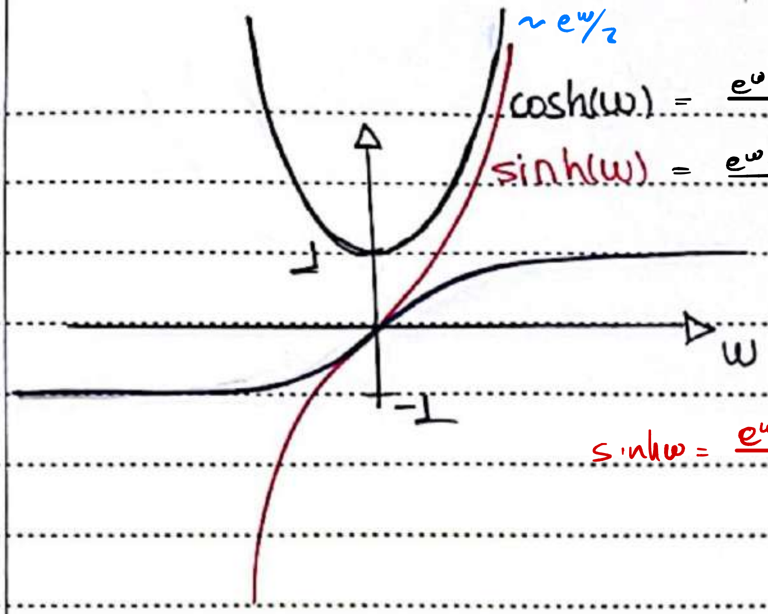
$$\boxed{\Lambda(\omega_2)\Lambda(\omega_1) = \begin{pmatrix} ch(\omega_2 + \omega_1) & -sh(\omega_1 + \omega_2) \\ -sh(\omega_1 + \omega_2) & ch(\omega_2 + \omega_1) \end{pmatrix}}$$

⇝ N διαδοχικές προωθήσεις Lorentz

$$[\Lambda(\omega)]^N = \begin{bmatrix} ch(N\omega) & -sh(\omega N) \\ -sh(\omega N) & ch(N\omega) \end{bmatrix}$$

και

$\upsilon = \tanh(N\omega) = \dfrac{\sinh(N\omega)}{\cosh(N\omega)} < 1$



$\cosh(w) = \dfrac{e^{w}+e^{-w}}{2} \approx \dfrac{e^{w}}{2}$ για $w \gg 1$

$\sinh(w) = \dfrac{e^{w}-e^{-w}}{2} \approx e^{w}/2$ για $w \gg 1$

$$\sinh w = \frac{e^{w}-e^{-w}}{2} \simeq \frac{\left(1+w+\frac{w^2}{2}+\dots\right)-\left(1-w+\frac{w^2}{2}+\dots\right)}{2}$$

$\simeq w$ για $w \ll 1$