σημειώσεις Μαρίας Γ.
7η διάλεξη Κ. Θεοφιλάτου

ΕΘΣ

Διάλεξη 24/10/23

- χωροχρονική απόσταση - χώρος Minkowski

$$\Delta X = \begin{bmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}, \quad \Delta S^2 = (\Delta X)^T \eta \Delta X \rightarrow$$ αναλλοίωτο διάστημα και χωροχρονική απόσταση

όπου $\{\eta_{\mu\nu}\} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Σε μορφή συνιστωσών:

$$\Delta S^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta X^\mu \cdot \Delta X^\nu = -\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

Ισχύει ότι $\eta \cdot \eta = I \Rightarrow \eta = \eta^{-1}$ ή αντίστοιχα

$$\eta^{\mu\rho} \eta_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1 & , \mu = \nu \\ 0 & , \mu \neq \nu \end{cases}$$

(*) $\Delta X_\mu = \eta_{\mu\nu} \Delta X^\nu = (-\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$

$$\Delta X_0 = \eta_{00} \Delta X^0 + \eta_{01} \Delta X^1 + \eta_{02} \Delta X^2 + \eta_{03} \Delta X^3 =$$
$$= -1 \Delta t + 0$$

$$\Delta X_1 = \eta_{10} \Delta X^0 + \eta_{11} \Delta X^1 + \eta_{12} \Delta X^2 + \eta_{13} \Delta X^3 =$$
$$= \Delta X$$

ομοίως, $\Delta X_2 = \Delta y$ και $\Delta X_3 = \Delta z$

Αντίστοιχα, ορίζεται $\Delta X^\mu = \eta^{\mu\nu} \Delta X_\nu$.

Έχοντας ορίσει τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε το αναλλοίωτο διάστημα ως

$$\Delta S^2 = \Delta X_\mu \cdot \Delta X^\mu = \Delta X^\mu \cdot \Delta X_\mu$$

Ο γενικός μετασχηματισμός Lorentz (Poincare) είναι κάθε γραμμικός μετασχηματισμός της μορφής:

$$X' = \boxed{\tilde{R}\,\Lambda}\,X + b \longrightarrow b = \begin{bmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix}$$

ένας πίνακας στροφής

ορίσαμε επίσης $L \equiv \tilde{R}\Lambda$

μετασχηματισμός προώθησης

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

πχ για στροφή γύρω από τον άξονα z, (Oz) =

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ο οποίος αφήνει το ΔS^2 αναλλοίωτο/αμετάβλητο.

και σε συνιστώσες: $X'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} X^{\nu} + b^{\mu}$

χωροχρονική μετατόπιση.

$$(\Delta S')^2 = (\Delta X')^T \cdot \eta (\Delta X') = \quad , \text{ όπου } \Delta X' = L \cdot \Delta X$$

$$= (L \cdot \Delta X)^T \cdot \eta \cdot (L \cdot \Delta X) = \qquad L \equiv \tilde{R} \cdot \Lambda$$

(στροφή).(προώθηση)

$$\overset{(*)}{=} \Delta X^T \boxed{L^T \cdot \eta \cdot L} \cdot \Delta X$$

$(*)\ (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

$\boxed{L^T \cdot \eta \cdot L}$ πρέπει $= \eta$

$$\Rightarrow L^T \cdot \eta \cdot L = \eta$$

και σε μορφή συνιστωσών: $L^{\mu}{}_{\rho} \cdot \eta_{\mu\nu} \cdot L^{\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}$

Έστω A^{μ} = ανταλλοίωτο (contravariant) διάνυσμα αν μετασχηματίζεται όπως το ΔX^{μ}
$= (A^0, A^1, A^2, A^3)$

Έστω $A_\mu \equiv$ συναλλοίωτο (covariant) διάνυσμα $=$
$= \eta_{\mu\nu} A^\nu = (-A^0, A^1, A^2, A^3)$

Ισχύει $$A'_\mu = \eta_{\mu\nu} A'^\nu \overset{(*)}{=} \eta_{\mu\kappa} L^\kappa{}_\rho A^\rho = \eta_{\mu\kappa} L^\kappa{}_\rho \eta^{\rho\nu} A_\nu$$

(*) $\boxed{A'^\mu = L^\mu{}_\nu A^\nu}$

και $L_\mu{}^\nu \equiv \eta_{\mu\kappa} L^\kappa{}_\rho \eta^{\rho\nu}$

Άρα $\boxed{A'_\mu = L_\mu{}^\nu A_\nu}$

(*) σε διαφορετικά βιβλία χρησιμοποιούνται διαφορετικές μορφές της μετρικής

$$[\eta] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{mostly positive } (-,+,+,+)$$

$$[\eta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{mostly negative } (+,-,-,-)$$

(*) σύμβαση τονισμένων δεικτών

$A'^\mu = L^\mu{}_\nu A^\nu$
$A^{\mu'} = L^{\mu'}{}_\mu A^\mu$ } ισοδύναμα

$A'^\mu = L^\mu{}_\nu A^\nu$
$A^{\mu'} = L^{\mu'}{}_\mu A^\mu$

γεγονότα που θα απαιτούσαν αλληλεπιδράσεις με ταχύτητα μεγαλύτερη του φωτός δεν μπορούν να είναι αιτιακά συνδεδεμένα!

παράδειγμα υπερφωτεινού μηνύματος από το A στο B

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} > 1$$

$$\Delta t = t_B - t_A$$

$$\Delta x = x_B - x_A$$

$$\Delta S^2 = -\Delta t^2 + (\Delta \vec{x})^2 > 0$$ χωροειδές

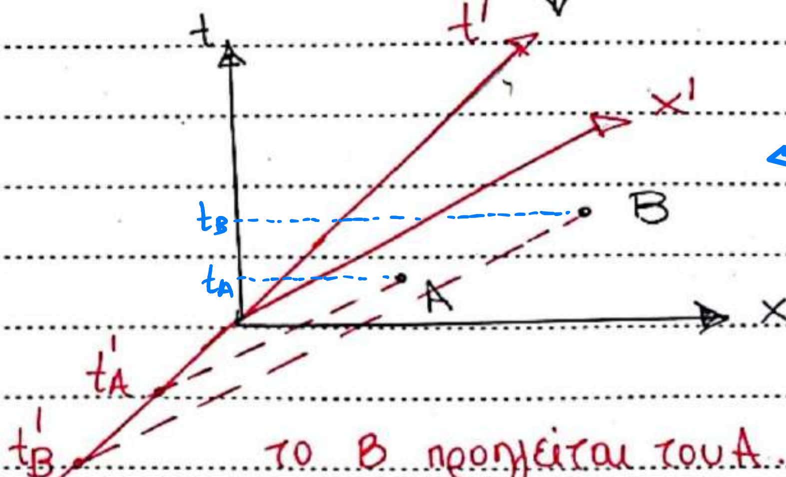
$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \upsilon \cdot \Delta x) = \gamma \Delta t \left(1 - \upsilon \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$$

Άρα, αν $\frac{\Delta x}{\Delta t} > 1$, τότε επιτρέπεται $\Delta t' \cdot \Delta t < 0$

Δηλαδή αντιστρέφω της σειρά των γεγονότων (χρονική).

Ωστόσο, αυτό δεν θα έπρεπε να μπορεί να συμβεί, ~~αφού~~ αν τα A και B ~~είναι~~ ήταν συνδεδεμένα αιτιακά μεταξύ τους.

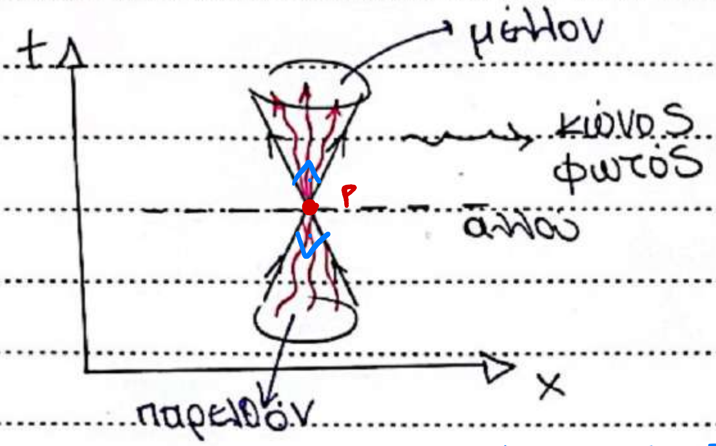
Αν $\Delta S^2 < 0$ Υπάρχει πάντα κάποιο σύστημα όπου τα A και B ~~αυτά~~ συμβαίνουν ταυτόχρονα. Μπορώ επίσης ~~γεωμετρικά~~ να δω και την αντιστροφή της χρονικής σειράς των γεγονότων A και B π.χ. στο

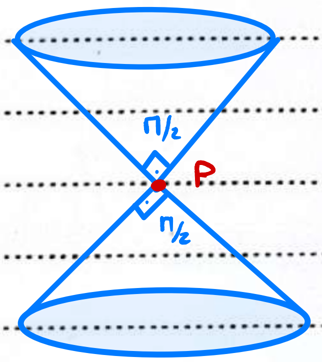


το B προηγείται του A. ⟹ απαράδεκτο

Αν τα A και B είχαν σχέση αιτίου - αποτελέσματος τότε θα έπρεπε:

απαίτηση αιτιοκρατίας $\left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right| < 1$





οτιδήποτε φτάνει ή φεύγει από το P πρέπει να έχει $|u|<1$
και άρα να βρίσκεται εντός του κώνου

(*) Στις τρεις χωρικές διαστάσεις θα έχω σφαίρα και καθώς βλέπω την χρονική εξέλιξη θα μεγαλώνει.

$\Delta s^2 = 0$ φωτοειδές

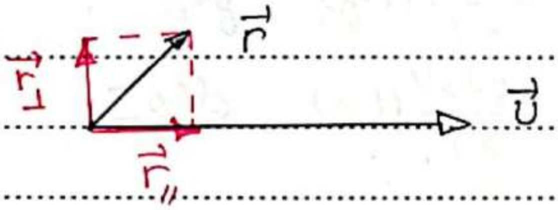
$(c\cdot\Delta t)^2 = (\Delta\vec{r})^2$

Διάλεξη 25/10/23 σημειώσεις Μαρίας Γ. 8η διάλεξη Κ. Θεοδωράτου ΕΘΣ

- Γενική προώθηση Lorentz

$$\Lambda(\vec{v}=v\hat{x}) = [\Lambda^{\mu}{}_{\nu}] = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Lambda = ?$ Αν η $\vec{v}$ έχει τυχαία γωνία;



$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$$

όπου

$$\vec{r}_{\parallel} = \frac{(\vec{r}\cdot\vec{v})}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v}$$

$$r'_{\parallel} = \gamma(r_{\parallel} - v\cdot t)$$

$$\vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v}$$

$$r'_{\perp} = r_{\perp}$$

$$t' = \gamma(t - \vec{v}\,\vec{r}_{\parallel}) = \gamma(t - \vec{v}\cdot\vec{r}) \Rightarrow t' = \gamma(t - v_i x_i)$$

Έτσι:

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_{\parallel}\,' + \vec{r}_{\perp}\,' = \gamma(\vec{r}_{\parallel} - \vec{v}t) + \vec{r}_{\perp} =$$

$$= \gamma(\vec{r}_{\parallel} - \vec{v}t) + \vec{r} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r}\,' = \vec{r} + \gamma\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v} - vt\right) - \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r}\,' = \vec{r} + (\gamma - 1)\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v} - \gamma\vec{v}t$$

Άρα, η x συνιστώσα:

$$x' = x + (\gamma-1)\frac{v_x x + v_y y + v_z z}{v^2}\cdot v_x - \gamma v_x t =$$

$$= -\gamma v_x t + \left(1 + (\gamma-1)\frac{v_x^2}{v^2}\right)x + (\gamma-1)\frac{v_y v_x}{v^2}y + (\gamma-1)\frac{v_z v_x}{v^2}z$$

$$x' = -\gamma v_x t + \left(1 + (\gamma-1)\frac{v_x^2}{v^2}\right)x + (\gamma-1)\frac{v_y v_x}{v^2}y + (\gamma-1)\frac{v_z v_x}{v^2}z$$

Αντίστοιχα και για y' και z'

Οπότε:

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v_x & -\gamma v_y & -\gamma v_z \\ -\gamma v_x & 1+(\gamma-1)\frac{v_x^2}{v^2} & (\gamma-1)\frac{v_y v_x}{v^2} & (\gamma-1)\frac{v_z v_x}{v^2} \\ -\gamma v_y & (\gamma-1)\frac{v_x v_y}{v^2} & 1+(\gamma-1)\frac{v_y^2}{v^2} & (\gamma-1)\frac{v_z v_y}{v^2} \\ -\gamma v_z & (\gamma-1)\frac{v_x v_z}{v^2} & (\gamma-1)\frac{v_y v_z}{v^2} & 1+(\gamma-1)\frac{v_z^2}{v^2} \end{bmatrix}}_{\Lambda(\vec{v})} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

και $\Lambda(\vec{v}) = \Lambda(\vec{v})^T$

Αν θεωρήσω $\underset{\sim}{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$, τότε:

$$\Lambda(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma \underset{\sim}{v}^T \\ -\gamma \underset{\sim}{v} & \mathbb{I} + \frac{(\gamma-1)}{v^2} \underset{\sim}{v}\underset{\sim}{v}^T \end{bmatrix}$$

όπου $\underset{\sim}{v}^T = [v_x \quad v_y \quad v_z]$

και

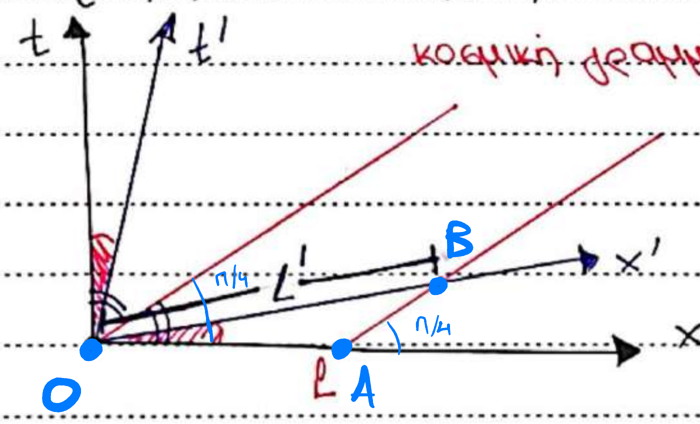
$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} [v_x \quad v_y \quad v_z] = \begin{bmatrix} v_x^2 & v_x v_y & v_x v_z \\ v_y v_x & v_y^2 & v_z v_y \\ v_z v_x & v_z v_y & v_z^2 \end{bmatrix}$$

(*) $\Lambda^0{}_0 = \gamma$, $\Lambda^0{}_i = -\gamma v_i$

$\Lambda^i{}_0 = -\gamma v_i$, $\Lambda^i{}_j = \delta^i{}_j + \frac{(\gamma-1)}{v^2} v_{ij}$

όπου $\delta^i{}_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

- Άσκηση (από Rindler)



1 : $X_1^\mu(t_1) = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_1 \end{bmatrix}$

αφού $x = t$

2 : $X_2^\mu(t_2) = \begin{bmatrix} t_2 \\ L + t_2 \end{bmatrix}$

$$\Delta x^\mu = x_2^\mu - x_1^\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix}$$

Όμως $\Delta x'^\mu = x_2'^\mu - x_1'^\mu = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_2 \\ L+t_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \end{bmatrix}$ και θέλω $\Delta t' = 0$.

Τα O και A έχουν απόσταση L στο S αλλά δεν είναι ταυτόχρονα στο S'!

Τα χωροχρονικά γεγονότα τα οποία είναι ταυτόχρονα στο S' είναι π.χ. τα O και B και βάσει αυτών μπορούμε να μετρήσουμε την απόσταση των δύο φωτονίων στο S'.