1.

σημειώσεις Αλεξάνδρας Μ.
5η διάλεξη Κ. Θεοφιλάτου
17.10.2023

#5

– Αντίστροφος μετ. προώθησης Lorentz

$X' = \Lambda X$ μετ. Lorentz για $\vec{v} = v\hat{x}$

$X = \Lambda^{-1} X'$, $\Lambda^{-1} = ?$

Θα δείξουμε ότι $\boxed{\Lambda^{-1}(\vec{v}) = \Lambda(-\vec{v})}$

Απόδειξη: $\Lambda(-v)\Lambda(v) = \Lambda(v)\Lambda(-v) = I$

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma v \\ \gamma v & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2 - \gamma^2 v^2, & \cancel{-\gamma^2 v + \gamma^2 v} \\ \cancel{\gamma^2 v - \gamma^2 v}, & -\gamma^2 v + \gamma^2 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow \gamma^2 - \gamma^2 v = \frac{1}{\cancel{\sqrt{1-v^2}^2}} \cancel{(1-v^2)} = 1$

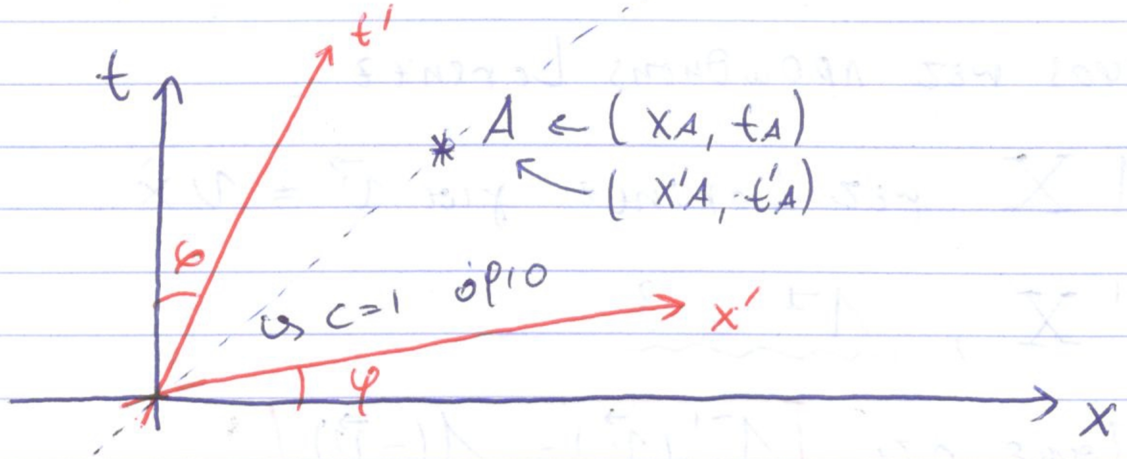
Άρα $\Lambda(-v)\Lambda(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ ✓

Αντίστοιχα για $\Lambda(v)\Lambda(-v) = I$ □

Σε μορφή συνιστωσών: $\boxed{\begin{aligned} t' &= \gamma(t - vx) \\ x' &= \gamma(x - vt) \end{aligned}} : \Lambda$

$\Lambda^{-1}: \boxed{\begin{aligned} t &= \gamma(t' + vx') \\ x &= \gamma(x' + vt') \end{aligned}}$

— Διαγράμματα Minkowski



* Ο άξονας t' είναι η τροχιά του σημείου $x'=0$.
δηλ. $\gamma(x - v t) = 0 \Rightarrow x = v t$

* Ταυτόχρονα γεγονότα $t'=0$, δηλ. $t' = \gamma(t - v x) \Rightarrow$
$x = \frac{1}{v} t$

* Ο μετασχ. Lorentz "μεταφράζει" από το ένα σύστημα συντεταγμ. στο άλλο.

$$\begin{bmatrix} t'_A \\ x'_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_A \\ x_A \end{bmatrix}$$

$$\Lambda(v) : t', x' \to t, x$$

$$\begin{bmatrix} t_A \\ x_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & v\gamma \\ v\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t'_A \\ x'_A \end{bmatrix}$$

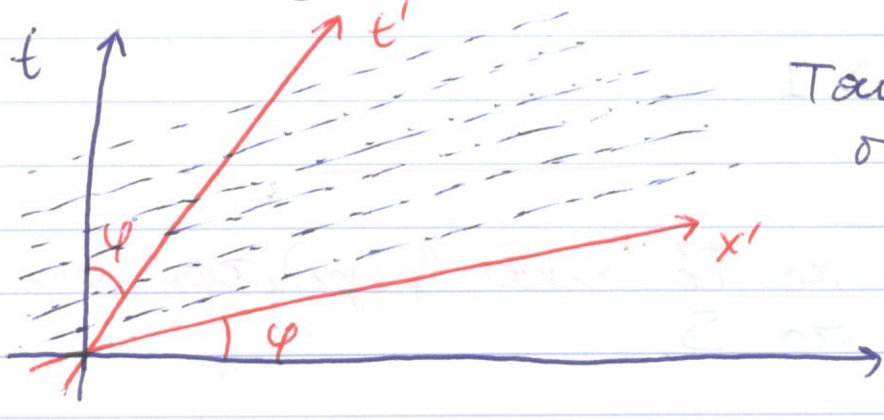
$$\Lambda^{-1}(v) : t, x \to t', x'$$

* Όριο: $\left.\tan\varphi = v, \quad v < c = 1, \quad \tan\frac{\pi}{4} = 1 \right\} \Rightarrow \boxed{\varphi < \frac{\pi}{4}}$

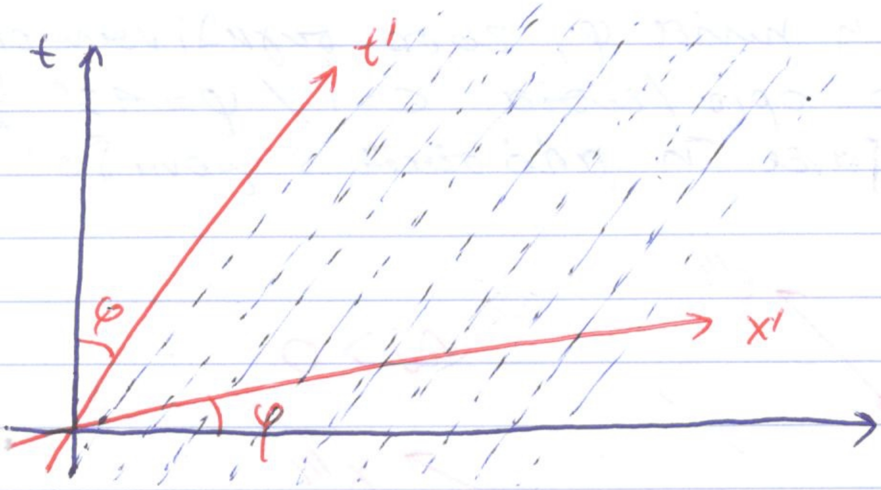
3.

* Ταυτόχρονα στο S' γεγονότα βρίσκονται σε ευθείες παράλληλες με τον άξονα x'.

* Ακίνητα στο S' γεγονότα βρίσκονται σε ευθείες παράλλ. με τον άξονα t'.

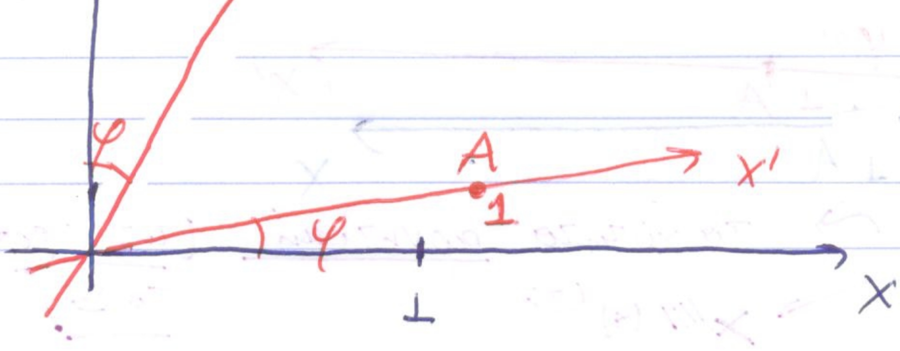


Ταυτόχρονα στο S'



Ακίνητα στο S'

* Οι άξονες t', x' έχουν διαφορετική <u>κλίμακα</u>.



Έστω
$t'_A = 0$
$x'_A = 1$

Ψάχνω
$t_A = ;$
$x_A = ;$

④

$$t_A = \gamma(\overset{0}{\cancel{t'_A}} + v\,\overset{1}{\cancel{x'_A}}) = \gamma v$$
$$x_A = \gamma(\cancel{x'_A} + v\,\cancel{t'_A}) = \gamma$$

$$|OA| = \sqrt{(x_A-0)^2+(t_A-0)^2} = \sqrt{\gamma^2+\gamma^2 v^2} = \gamma\sqrt{1+v^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1+v^2}{1-v^2}} > 1$$

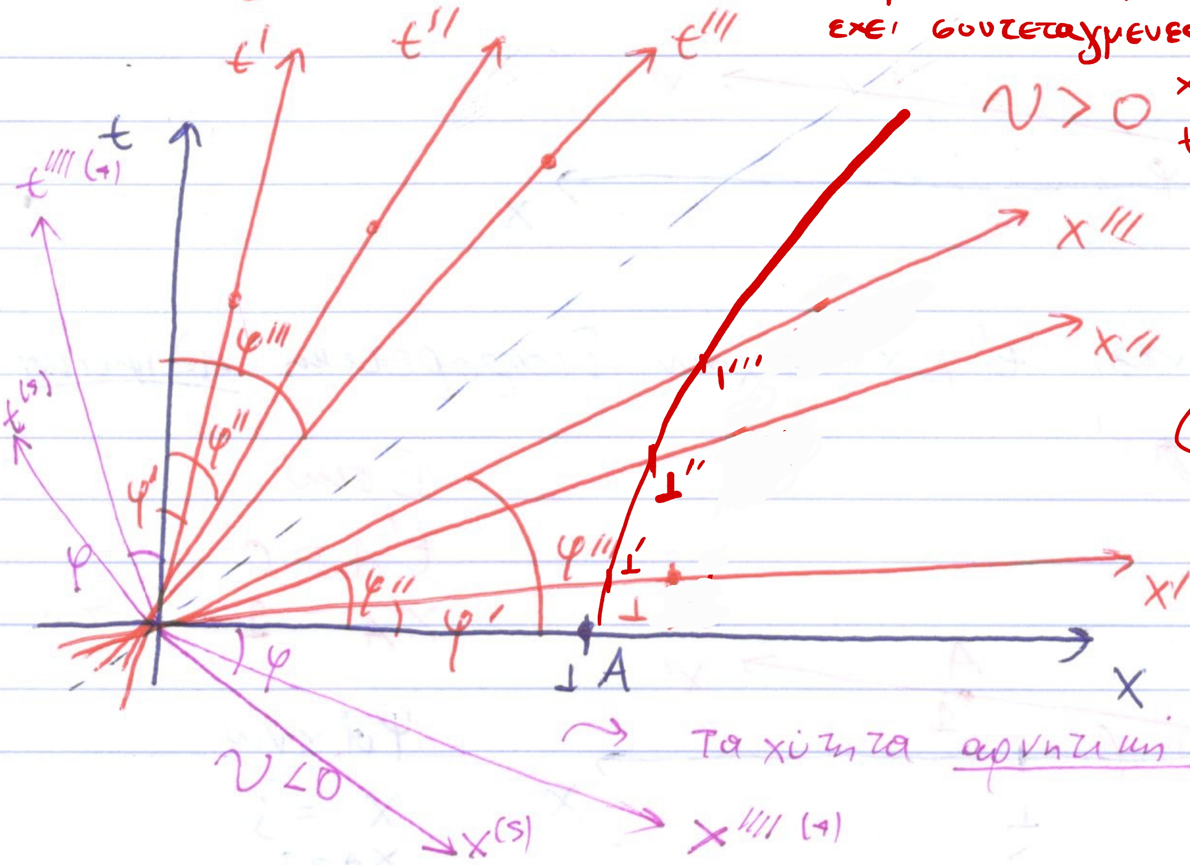
* Η μονάδα (1) στο S′ είναι "μεγαλύτερη" από την μονάδα (1) στο S

* Όσο μεγαλώνει η γωνία φ, τόσο συγκλίνουν οι δύο άξονες στο όριο / ευθεία $c=1$ / $\varphi = 45° = \frac{\pi}{4}$. και τόσο αυξάνει το μήκος της μονάδας στο S′ → η "μονάδα" των τονουμένων συστημάτων θα έχει συντεταγμένες x_A, t_A στο άτονο

$x_A = \gamma(1+\upsilon\cdot 0) = \gamma$

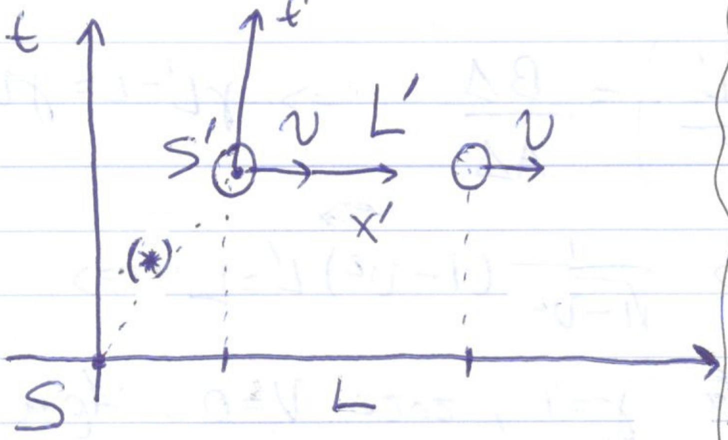
$t_A = \gamma(0+\upsilon 1) = \gamma\upsilon$

που ικανοποιεί την εξίσωση υπερβολής $x_A^2 - t_A^2 = 1$ $(\gamma^2-\gamma^2\upsilon^2 = 1)$ στο S για κάθε $0 \le \upsilon < 1$



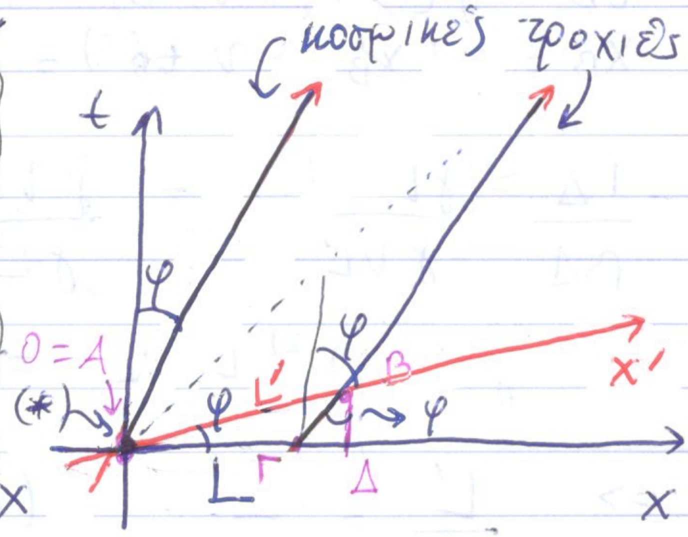
Ταχύτητα αρνητική (ως προς το S)

- Συστολή Μήκους



Not so helpfull...

(*) κακό σχήμα, θα έπρεπε να βάλαμε το S' να συμπίπτει η αρχή με το S για $t'=t=0$



(*) Σωστό σχήμα, για σύμβαση $S' \equiv S$ την $t'=t=0$

Θέτω: $t'_B = 0$ (επί σχήματος)
$x'_B = L'$

$t'_A = 0$ (σχήμα)
$x'_A = 0$ (σχήμα)

Από όμοια τρίγωνα: $\dfrac{\Gamma\Delta}{B\Delta} = \dfrac{B\Delta}{A\Delta}$

Ισχύει (σχήμα): $B\Delta = t_B$
$A\Delta = x_B$

$\Gamma\Delta = A\Delta - A\Gamma = x_B - L$

6.

$$t_B = \gamma(\cancel{t_B'}^{0} + v\,\cancel{x_B'}^{L'}) = \gamma v L'$$
$$x_B = \gamma(\cancel{x_B'}^{L'} + v\,\cancel{t_B'}^{0}) = \gamma L'$$

$$\frac{\Gamma\Delta}{B\Delta} = \left(\frac{\gamma L' - L}{\gamma v L'} = \cancel{\frac{\gamma v L'}{\gamma L'}}\right) = \frac{B\Delta}{A\Delta} \Rightarrow \gamma L' - L = \gamma v^2 L'$$

$$\Rightarrow \gamma(1-v^2)L' = L \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(1-v^2)L' = L \Rightarrow$$

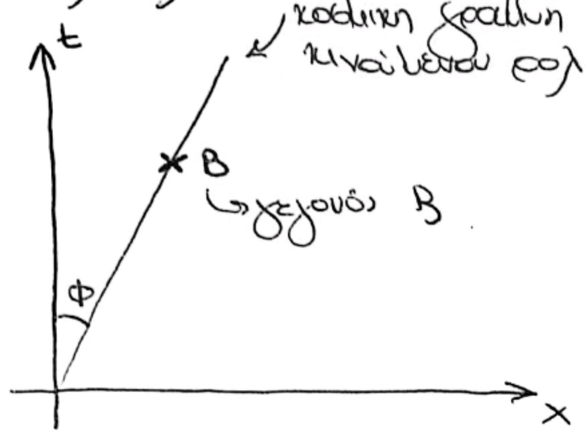
$$\Rightarrow \frac{L'}{\underset{\geq 1}{\gamma}} = L$$

(αν $\gamma=1$, τοτε $v=0$. Άρα πρέπει να πάρω και $\gamma=1$ και τοτε $L'=L$ ✓)

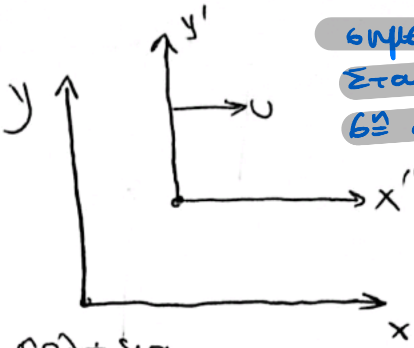
Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας.

σημειώσεις
Σταματίας Μ.
6η διάλεξη
κ. Θεοφιλάτου
18.10.2023

Διαστολή χρόνου



$\tan\phi = u$



ρολόγια

αρχικά συγχρονισμένα:

$t'_0 = t_0 = 0$

$x' = x = 0$

Χρόνοι για το γεγονός B:

$$\begin{cases} \Delta t' = t'_B - t'_0 = \gamma(t_B - u x_B) \\ \Delta t = t_B - t_0 = \gamma(t'_B + u x'_B) = \gamma \Delta t' \end{cases}$$

Άρα το ένα ρολόι μετρά Δt ενώ το άλλο $\Delta t'$ κ' ισχύει $\boxed{\Delta t = \gamma \Delta t'}$

$\Rightarrow \Delta t > \Delta t'$ αφού $\gamma > 1$.

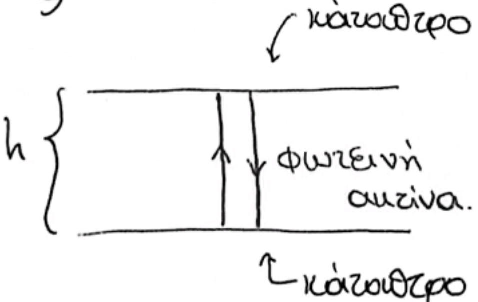
ο όρος διαστολή αναφέρεται στον χρόνο που καταγράφεται στο σύστημα S σε σχέση με αυτόν του S'.

Ιδιοχρόνος: Ο χρόνος που μετράει από ένα ρολόι στο σύστημα ηρεμίας του.

$$\Delta\tau \equiv \Delta t' = \text{ιδιοχρόνος} = \Delta t/\gamma = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\gamma(t)}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-u^2(t)}\, dt$$

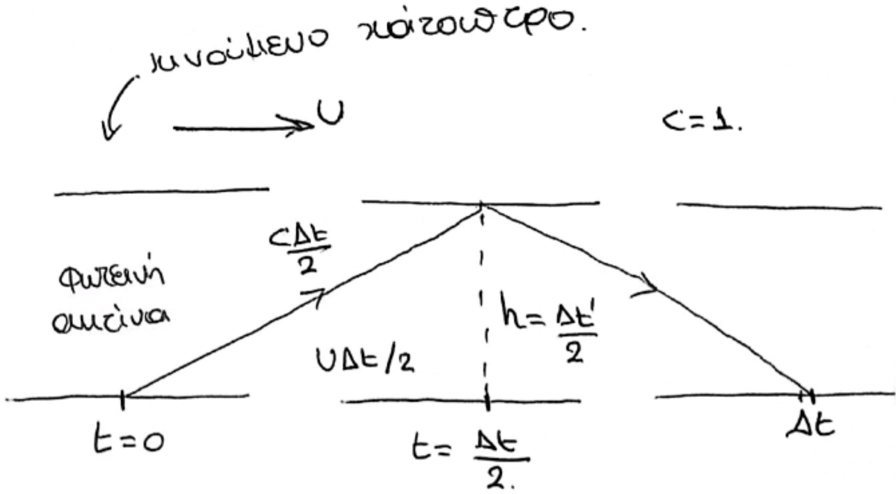
$$d\tau = dt' = \frac{dt}{\gamma}$$

Ρολόι φωτός:



και έστω ότι όταν η ακτίνα επιστρέφει σε αυτό το κάτοπτρο ακούγεται ένα "κλικ"

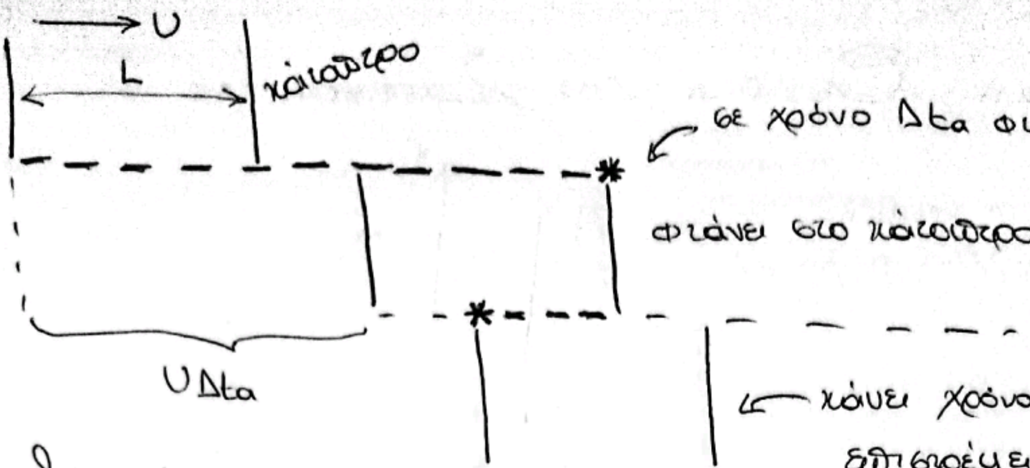
$\Delta\tau = \Delta t' = 2h$



$$(u\Delta t)^2 + (\Delta t')^2 = (\Delta t)^2$$

$$\Rightarrow \Delta t' = \Delta t\sqrt{1-u^2} \Rightarrow \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-u^2}} = \Delta t$$

όμοια με πριν.



σε χρόνο Δta φτάνει εδώ.

φτάνει στο κάτοπτρο και ανακλάται.

κάνει χρόνο Δtβ για να επιστρέψει στο αριστερό κάτοπτρο.

τα δύο κάτοπτρα κινούνται διαρκώς προς τα δεξιά.

$L = \frac{h}{\gamma}$, $L' = h$ ⟶ απόσταση μεταξύ πλακών στο σύστημα ηρεμίας τους.

$c=1$

$c \cdot \Delta t_a = U\Delta t_a + L$ για την προς τα δεξιά κίνηση

$\Delta t_\beta = L - U\Delta t_\beta$ για την προς τα αριστερά κίνηση.

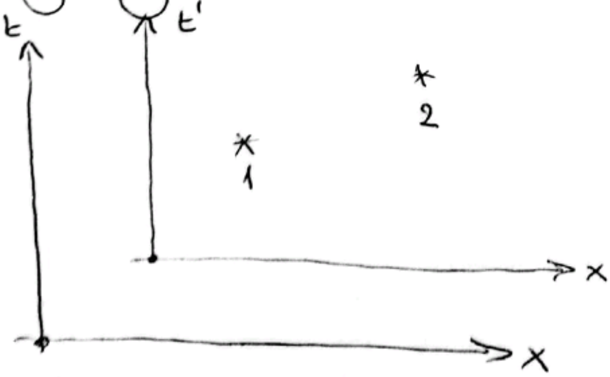
$\Delta t' = 2h$.

$$\left.\begin{aligned}\Delta t = \Delta t_a + \Delta t_\beta &= \frac{L}{1-U} + \frac{L}{1+U} = \frac{2}{1-U^2} \\ L = L'\sqrt{1-U^2} &= h\sqrt{1-U^2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta t = \frac{2h\sqrt{1-U^2}}{1-U^2} = \frac{2h}{\sqrt{1-U^2}} = \Delta t' \gamma$$

➢ Επομένως είτε ο παρατηρητής κινείται κάθετα, είτε παράλληλα ο χρόνος είναι ο ίδιος. Θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα απλά λέγοντας ότι όλοι οι παρατηρητές είναι ισοδύναμοι.

Μετασχηματισμός Lorentz. (διαφορές κ' διαφορικά)

συγχρονίζουμε και πάλι τα ρολόγια $\begin{cases} t' = t = 0 \\ x' = x = 0 \end{cases}$



$$\begin{aligned} t_2' &= \gamma(t_2 - Ux_2) & t_1' &= \gamma(t_1 - Ux_1) \\ x_2' &= \gamma(x_2 - Ut_2) & x_1' &= \gamma(x_1 - Ut_1) \\ y_2' &= y_2 & y_1' &= y_1 \\ z_2' &= z_2 & z_1' &= z_1 \end{aligned}$$

Είναι $t_2' - t_1' = \Delta t' = \gamma[(t_2 - t_1) - U(x_2 - x_1)]$

$$\left.\begin{aligned} dt' &= \gamma(dt - Udx) \\ dx' &= \gamma(dx - Udt) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \end{aligned}\right\} \text{διαφορικά}$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \Delta t' &= \gamma(\Delta t - U\Delta x) \\ \text{Ομοια} \quad \Delta x' &= \gamma(\Delta x - U\Delta t) \\ \Delta y' &= \Delta y \\ \Delta z' &= \Delta z. \end{aligned}\right\} \text{διαφορές}$$

Σε ένα ευκλείδιο διάνυσμα το μέτρο παραμένει αναλλοίωτο σε στροφές.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{πίνακας στροφής}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow x^2+y^2 = (x')^2+(y')^2$$

Άρα σε μετασχηματισμό στροφής μένει αναλλοίωτη η ποσότητα
$(\Delta x')^2+(\Delta y')^2+(\Delta z')^2$.

⇝ Σε μετασχηματισμό Lorentz παραμένει αναλλοίωτη η ποσότητα
$$\boxed{(\Delta x')^2+(\Delta y')^2+(\Delta z')^2-(\Delta t')^2} = const.$$

Έχουμε
$$(\Delta S')^2 = (\Delta x')^2+(\Delta y')^2+(\Delta z')^2-(\Delta t')^2 = \gamma^2(\Delta x - u\Delta t)^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 + \left(-\gamma^2(\Delta t - u\Delta x)^2\right)$$

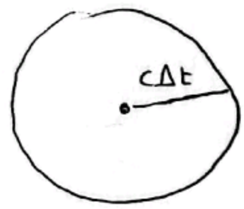
$$\Rightarrow (\Delta S')^2 = \gamma^2\Delta x^2 + \gamma^2 u^2\Delta t^2 - 2\gamma^2\Delta x u\Delta t + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \gamma^2\Delta t^2 - \gamma^2 u^2\Delta x^2 + 2\gamma^2 u\Delta t\Delta x$$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

$$= \gamma^2(1-u^2)\Delta x^2 - \gamma^2(1-u^2)\Delta t^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$
$$= \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2$$
$$= \Delta S^2$$

Για φωτεινή ακτίνα που διαδίδεται σφαιρικά έχουμε:

$$R^2 = c\cdot\Delta t^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2, \quad \Delta S = 0.$$
$$= (\Delta\vec{r})^2$$



Γενικά όταν έχουμε $\Delta S^2 = 0$ ⇝ φωτοειδές

$\Delta S^2 < 0$ ⇝ χρονοειδές

$\Delta S^2 > 0$ ⇝ χωροειδές

$$\underbrace{[\Delta t \ \ \Delta x \ \ \Delta y \ \ \Delta z]}_{(\Delta X)^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\eta} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}}_{\Delta X} = \Delta S^2 = (\Delta X)^T \cdot \eta \cdot \Delta X.$$

η μετρική

ευκλείδιο κομμάτι

⤷ αναλλοίωτο διάστημα.

$\eta = [\eta_{\mu\nu}]$

$\Delta X = X^\mu$

άρα γράφεται $\eta_{\mu\nu}\Delta X^\mu \Delta X^\nu = \Delta X^\mu \eta_{\mu\nu} \Delta X^\nu$ σύμβαση Einstein