

Ιστογράμματα Κατανομής

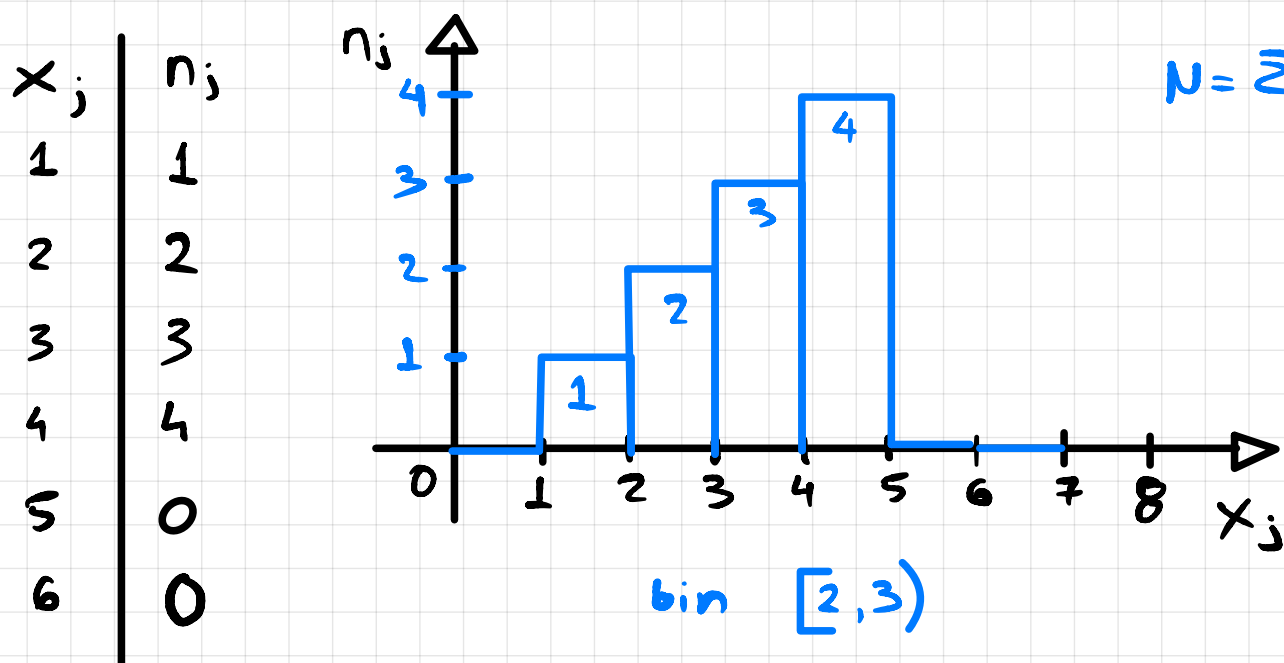
Διαλέξη 1^η

Σημειώσεις Κων/νου Θεοφιλάτου

$$x = \{3, 2, 4, 1, 2, 3, 4, 3, 4, 4\}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{1}{10} (30) = 3$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{10} [(3-3)^2 + (2-3)^2 + (4-3)^2 + \dots]$$



n_j = αριθμός
γεγονότων
τύπου j

δλ' συχνότητα
παρατηρήσεων
που το αποτέλεσμα
είναι τύπου j

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \{ 3 + 2 + 4 + \underline{1} + 2 + 3 + 4 + 3 + 4 + 4 \}$$

$$= \frac{1}{10} \{ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 6 \}$$

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^6 \frac{n_j}{N} x_j = \sum_{j=1}^6 w_j x_j$$

$w_j \equiv n_j / N$ weight
κανονικοποιημένη
συχνότητα

$$\bar{x} = \frac{0.1 \cdot 1 + 0.2 \cdot 2 + 0.3 \cdot 3 + 0.4 \cdot 4}{0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4} = 3$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x^2 &= \sum_{j=1}^6 w_j (x_j - \bar{x})^2 = 0.1(1-3)^2 + 0.2(2-3)^2 \\ &\quad + 0.3(3-3)^2 + 0.4(4-3)^2 \\ &= 0.1 \cdot 4 + 0.2 + 0.4 = 1.0 \end{aligned}$$

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{\hat{\sigma}_x^2} = 1.0$$

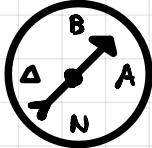
$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x^2 &= \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{(x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2)} = \overline{x^2} - 2\bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x}^2 \\ &= \overline{x^2} - (\bar{x})^2 \end{aligned}$$

$$2 \cdot x \bar{x} = \bar{x} \cdot 2 \bar{x} = 2 \bar{x} \bar{x}$$

$$\text{διότι } \overline{(\bar{x})^2} = (\bar{x})^2 = \bar{x}^2$$

ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ (ΤΜ) $\rightarrow$ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $X()$

π.χ. κερμα $\in \{κ, Γ\}$ $X(ω=κ) = +1$ $X(ω=Γ) = -1$	π.χ. ροξίδα  $ω \in \{B, BΔ, BΔ', BΔ'' \dots\}$ ή $X(ω = \text{spinner}) = \theta \in [0, 360)$ $\hookrightarrow X(ω = \text{spinner}) = \phi \in [0, 6.28)$
---	--

ΔΙΑΚΡΗΤΕΣ ΤΜ:

$f(x) =$ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ $= P(X=x)$ (PMF)

$F(x) =$ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ $= P(X \leq x)$ (CDF)

αύρεστη συνάρτηση πιθανότητας

ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΤΜ:

$f(x) =$ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

$P(X=x) = 0$

$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$

$F(x) =$ αύρεστη συνάρτηση πιθανότητας ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ $= P(X \leq x)$ (CDF)

$F(x) \equiv \int_{-\infty}^x f(t) dt$

$f(x) = \frac{d}{dx}(F(x))$

ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΕΣ ΤΙΜΕΣ

$E(X) = \mu = \langle X \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ συνέχεια ή $\sum_i f_i(x_i) \cdot x_i$ διακριτή

$\langle (X-\mu)^2 \rangle \equiv \sigma^2 = \text{Var}(X) = \langle X^2 - 2X\mu + \mu^2 \rangle$

$= \langle X^2 \rangle - \mu^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \equiv \sigma_X^2$

$\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$

$\sigma_{\bar{X}}^2 = \text{Var}\left(\frac{1}{N} \sum x_i\right) \neq \text{Var}(X)$

$\langle \bar{X} \rangle = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \omega f(\omega) d\omega \right]$

$$\text{Var}\left(\frac{1}{N} \sum_i x_i\right) = \frac{1}{N^2} \text{Var}\left(\sum_i x_i\right) = \frac{1}{N^2} \sum_i \text{Var}(x_i) = \frac{1}{N^2} \sum_i \sigma_x^2 = \frac{1}{N^2} N \sigma_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{N}$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{N} \quad \left| \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \right. !$$

παράδειγμα διακριτής μεταβλητής

$$x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



$$f_i \equiv f(x_i) = \frac{1}{6} \quad \forall i \quad \text{PMF}$$

$$\langle x \rangle = \mu = \sum_{i=1}^6 f_i x_i = \frac{1}{6} (1+2+3+4+5+6) = 21/6 = 3.5$$

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{1}{6} (1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) - \left(21/6\right)^2 \approx 2.916$$

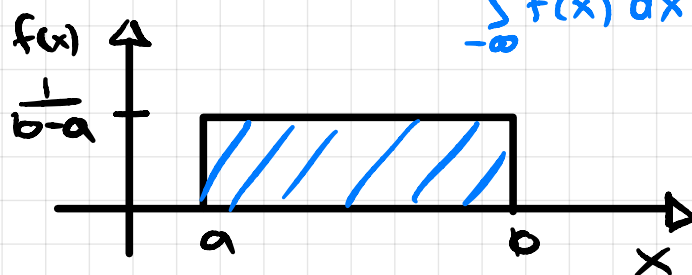
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \approx 1.71$$

$$2\sigma \approx 3.4$$

παράδειγμα συνεχούς μεταβλητής

$$X \sim f(x) = \text{Unif}(a, b) = U(a, b) = U_{ab}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & a < x < b \end{cases}$$



$$\langle x \rangle = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_a^b \frac{x^2}{(b-a)} dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$\sigma^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$= \frac{4b^2+4ab+4a^2}{12} - \frac{3b^2+6ab+3a^2}{12} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

ΕΚΤΙΜΗΤΕΣ (ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ)

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \equiv \bar{x}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\mu} = \mu \quad \text{συνεπεια (consistency)}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

προκατλήση (bias)

$$\langle \hat{\sigma}^2 \rangle \neq \sigma^2$$

$$\langle \hat{\sigma}_x^2 \rangle = \frac{N-1}{N} \sigma_x^2$$

συμβολισμός $\sigma_x \equiv \sigma$

$$\langle \hat{\mu} \rangle = \left\langle \frac{1}{N} \sum_i x_i \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_i \langle x_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_i \mu = \frac{1}{N} N \cdot \mu = \mu$$

$$\text{αρα } \langle \hat{\mu} \rangle = \mu \quad \text{(unbiased)}$$

independent and identically distributed random variables

$$\langle \hat{\sigma}^2 \rangle = \left\langle \frac{1}{N} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 \right\rangle = \langle \bar{x}^2 \rangle - \langle (\bar{x})^2 \rangle$$

$$= \langle \bar{x}^2 \rangle - \langle \bar{x} \rangle^2 - \left[\langle (\bar{x})^2 \rangle - \langle \bar{x} \rangle^2 \right]$$

$$= \sigma_x^2 - \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{N-1}{N} \sigma_x^2$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{N}$$

συμβολισμός $\sigma_x \equiv \sigma$

$$\text{διότι } \langle \bar{x} \rangle = \langle x \rangle$$

$$\left\langle \frac{1}{N} \sum x_i \right\rangle = \langle x \rangle$$

ΔΕΙΤΕ ΕΝΙΣΤ

Θεώρημα 2.1 βελ 125
απο το βιβλίο Χαρακτηριστικά
απο το μάθημα

10ΥΚΟ13 -
Θεωρία
Πιθανοτήτων
e-class

ορίζοντας ως

$$\hat{s}^2 = \frac{N}{N-1} \hat{\sigma}^2 \quad \text{τότε}$$

$$\langle \hat{s}^2 \rangle = \sigma^2$$

υποενθυμίζω ότι :

$$\overline{\text{κατι}} = \frac{1}{N} \sum_i (\text{κατι})_i$$

$$\sigma_{\text{κατι}}^2 \equiv \langle \text{κατι}^2 \rangle - \langle \text{κατι} \rangle^2$$

$$\sigma_x^2 = \sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \langle \bar{x}^2 \rangle - \langle \bar{x} \rangle^2$$

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \infty \quad \text{εαν } N=1$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = 0 \quad \text{εαν } N=1$$

Πρακτικά $\hat{s}^2 \approx \hat{\sigma}^2$ για $N > 1000$

$$\hat{s}^2 = \left(\frac{999}{1000} \right) \hat{\sigma}^2$$

$$\hat{s}_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{N(N-1)} \sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΟΡΑΣ

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{N} \sum_i (x_i - \mu)^2$$

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

γραμμικός μεταβλ. (εoduvapias vnooιnou

διαλέξη 3η

random
number
generator

(linear congruential method)

$$x_{n+1} = [c \cdot x_n + a] \overset{\div}{\text{mod}}(N_{\max})$$

$$x_0 = \text{seed}$$

$$x_1 =$$

$$\text{mod} = \%$$

$$\begin{array}{r|l} \textcircled{7} & \textcircled{3} \\ -6 & 2 \\ \hline \textcircled{1} & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} \textcircled{7} & \textcircled{1} \\ -7 & 7 \\ \hline \textcircled{0} & \end{array}$$

$$7 \div 3 = 1$$

$$7 \% 1 = 0$$

$$7 \% 2 = 1$$

$$7 \% 3 = 1$$

$$7 \% 4 = 3$$

$$7 \% 5 = 2$$

$$7 \% 6 = 1$$

$$7 \% 7 = 0$$

$$8 \% 7 = 1$$

$$9 \% 7 = 2$$

$$10 \% 7 = 3$$

$$11 \% 7 = 4$$

$$12 \% 7 = 5$$

$$13 \% 7 = 6$$

$$14 \% 7 = 0$$

$$15 \% 7 = 1$$

...

$$x_{n+1} = 16807 x_n \text{ mod } (2^{31} - 1)$$

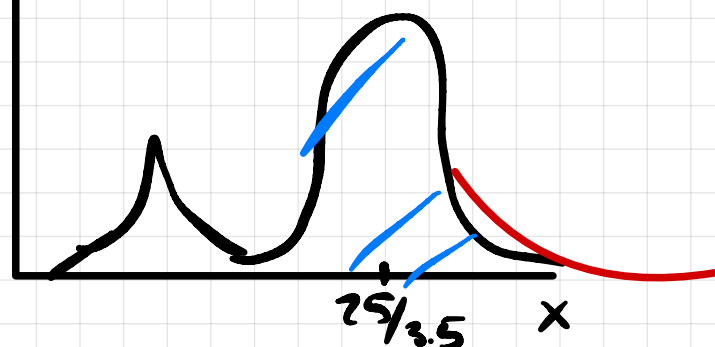
$$a = 0$$

$$c = 16807$$

$$N_{\max} = 2^{31} - 1$$

21	22	23	24	25
16	17	18	19	20
11	12	13	14	15
6	7	8	9	10
1	2	3	4	5

rapides



$$x \pm \delta x$$

X

$$\sqrt{(x - \bar{x})^2}$$

Παραγωγή τυχαίων αριθμών $X \sim f(x)$

διαλέγει 42

a) μέθοδος αντιστροφής μετασχηματισμού

(CDF)

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

$$\frac{dF}{dx} = f(x)$$

$$X = F^{-1}(U) \quad \text{όπου} \quad U \sim \text{Unif}(0,1)$$

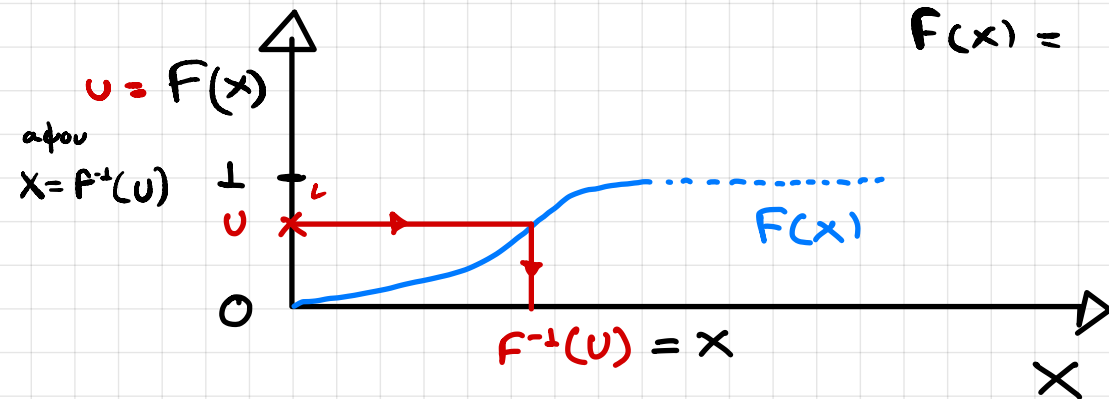
$$F(x) = P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = \int_0^{F(x)} 1 dU = F(x)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$F(F^{-1}(U)) \leq F(x)$$

$$F^{-1}(F(x)) = x$$

$$\int_0^1 1 dx = \text{κατ'}$$

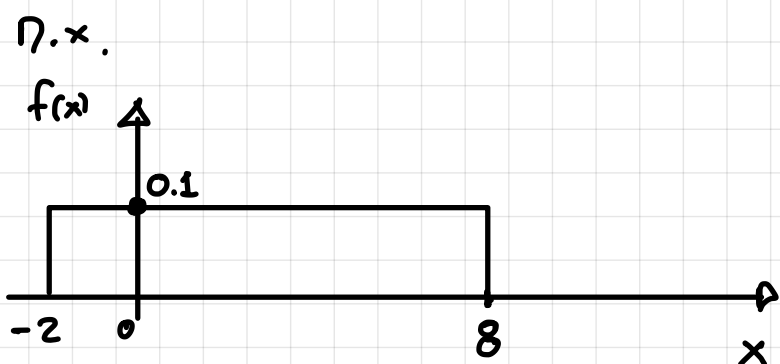


1) $X \sim \text{unif}(a,b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a} \quad (\mu \epsilon \ x \leq b)$$

$$F^{-1}(x) = (b-a)x + a$$



$$X = (8 - (-2))U + (-2)$$

$$X = 10U - 2$$

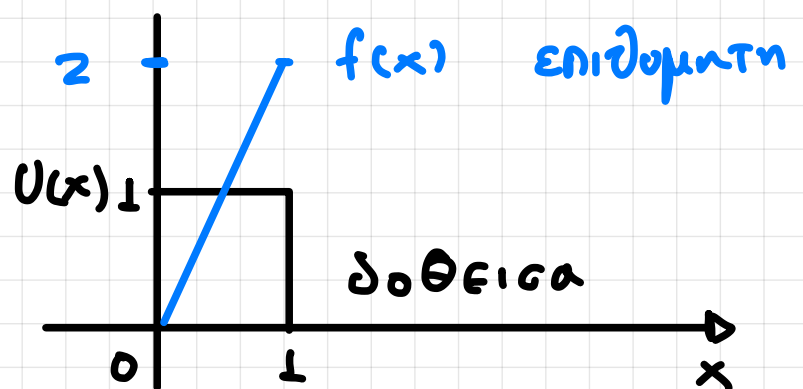
2) $f(x) = c \cdot x$
για $x \in [0,1]$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$\int_0^1 c \cdot x dx = 1$$

$$c \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 1$$

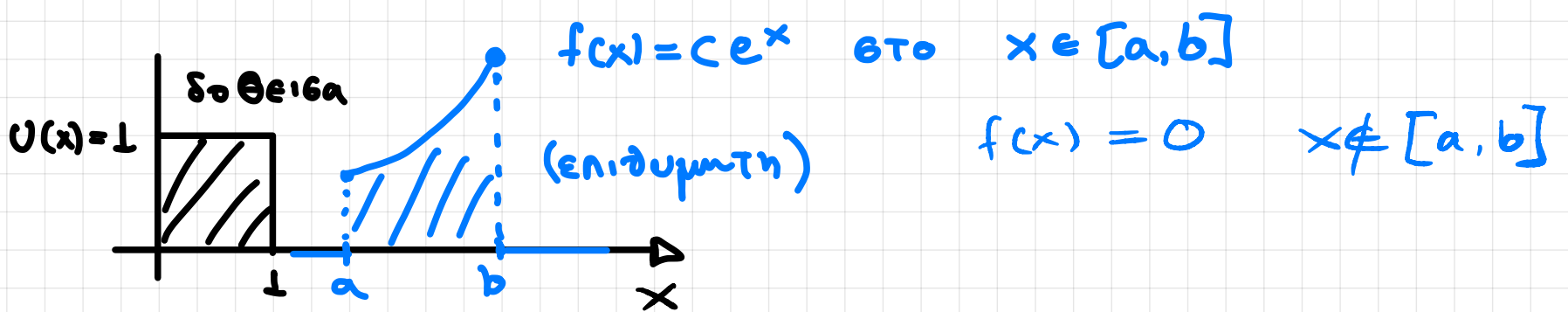
$$c = 2$$



$$F(x) = \int_0^x 2t dt = t^2 \Big|_0^x = x^2$$

$$F^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad | \quad x = \sqrt{U}$$

3)



$$\int_a^b ce^x dx = 1 \quad c = \frac{1}{e^b - e^a}$$

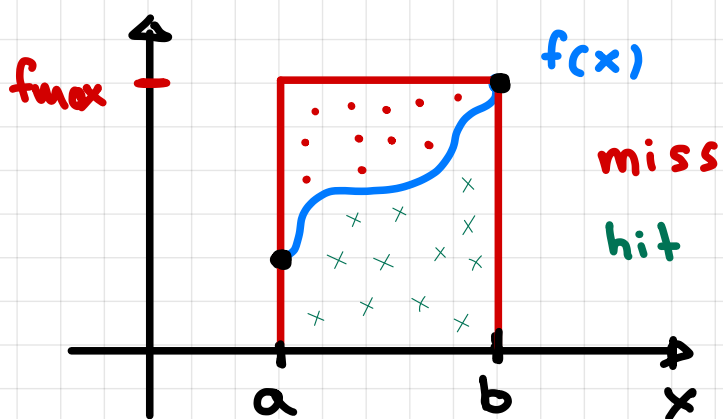
$$f(x) = \frac{e^x}{e^b - e^a} \quad F(x) = \int_a^x \frac{e^t}{e^b - e^a} dt = \frac{e^x - e^a}{e^b - e^a}$$

$$F^{-1}(x) = \ln[x(e^b - e^a) + e^a] \quad \left| \quad F^{-1}(F(x)) = x \right.$$

$$X = \ln[U(e^b - e^a) + e^a]$$

b) **Δειγματοληψία απορρίψεως**

(accept/reject)
(hit-or-miss)



$$X \sim f(x)$$

$$U \sim \text{Unif}(0, 1)$$

$$\begin{cases} x_i \sim \frac{1}{b-a} = \text{Unif}(a, b) \\ y_i \sim \frac{1}{f_{\max} - 0} = \text{Unif}(0, f_{\max}) \end{cases}$$

αν $y_i \leq f(x_i)$: κρατάμε το x_i (hit)

παραδειγμα: $X \sim c \cdot e^x$ $x \in [0, 5]$

$$f(x) = \frac{e^x}{e^5 - 1} \quad \text{για } x \in [0, 5]$$

$$X = \ln[U(e^5 - 1) + 1]$$

Ανώτερο MC (crude)

διαστάση 5^η

1D

$$I = \int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_a^b f(x) \frac{1}{b-a} dx = L \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p(x) dx = L \langle f \rangle$$

$$\mu \in p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases} \quad \text{ομοιομορφη πυκνότητα πιθανότητας}$$

$$\text{και } L = b - a$$

$$\text{εκτιμητής του } I : \hat{I} = L \cdot \bar{f} \quad \mu \in \bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

$$\text{Var}(\hat{I}) = \text{Var}(L \cdot \bar{f}) = L^2 \sigma_f^2 = L^2 \frac{\sigma_f^2}{N}$$

$$\mu \in \langle f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p(x) dx \quad \text{και} \quad \sigma_f^2 = \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - \langle f \rangle)^2 p(x) dx$$

$$\text{εκτιμητής του } \sigma I^2 : \hat{\sigma I}^2 = L^2 \frac{\hat{\sigma}_f^2}{N} \rightarrow \hat{\sigma I} = L \frac{\hat{\sigma}_f}{\sqrt{N}}$$

$$\mu \in \hat{\sigma}_f^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (f(x_i) - \bar{f})^2$$

nD

$$\begin{aligned} I &= \int \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \frac{1}{V} \int \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{1}{V} dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \frac{1}{V} \int \dots \int f(\vec{x}) p(\vec{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n \end{aligned}$$

$$\mu \in V = \int \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$p(\vec{x}) = \begin{cases} = \frac{1}{V} & \text{για } x \in \Omega \\ = 0 & \text{για } x \notin \Omega \end{cases}$$

ομοιομορφη πυκνότητα
πιθανότητας στις
n διαστάσεις

$$\hat{I} = V \bar{f}$$

$$\hat{\sigma I} = V \frac{\hat{\sigma}_f}{\sqrt{N}}$$

$$\mu \in \hat{\sigma}_f^2 = \frac{1}{N-1} \sum_i (f(\vec{x}) - \bar{f})^2$$

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_i f(\vec{x})$$

$$\mu \in \hat{\sigma}_f = \sqrt{\hat{\sigma}_f^2}$$

$$\langle \hat{I} \rangle = V \langle \bar{f} \rangle = V \langle f \rangle = V \mu_f$$

$$\langle \delta \hat{I}^2 \rangle = V^2 \frac{\langle \hat{S}_f^2 \rangle}{N} = V^2 \frac{\sigma_f^2}{N}$$

n.x.

$$I = \int_0^{10} e^x dx = e^{10} - 1$$

$$= 10 \int_0^{10} e^x \frac{dx}{10} = 10 \cdot \langle f \rangle = 22025.5$$

$$\langle f \rangle = 2202.55$$

$$\langle f^2 \rangle = \int_0^{10} e^{2x} \frac{dx}{10} = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20} [e^{20} - e^0]$$

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{20} [e^{20} - e^0] - 2202.55^2$$

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_f^2} \quad \langle \delta \hat{I} \rangle = 10 \frac{\sigma_f}{\sqrt{N}} \approx 440.5 \quad \text{για } N=10^4$$

αναμενόμενο

σχετικό σφάλμα

εκτιμητή

$$\equiv \frac{\langle \delta \hat{I} \rangle}{\langle \hat{I} \rangle} = \frac{440.5}{22025.5} \approx 2\% \quad \text{για } N=10^4$$

υπολογισμο θεωρητικά αν τα $\langle f \rangle$ και $\langle f^2 \rangle$ γνωστά, (δηλαδή όταν και το I είναι γνωστό)

σχετικό σφάλμα

εκτιμητή

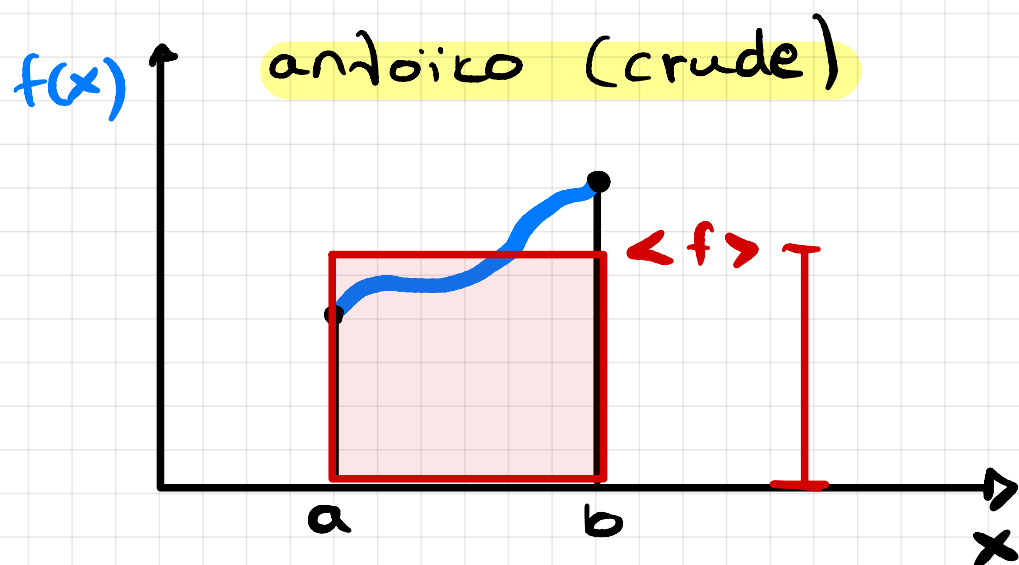
$$\equiv \frac{\delta \hat{I}}{\hat{I}}$$

Μεθόδος Απορρίψης

διαλέξτε $b \approx$

hit-or-miss

accept/reject

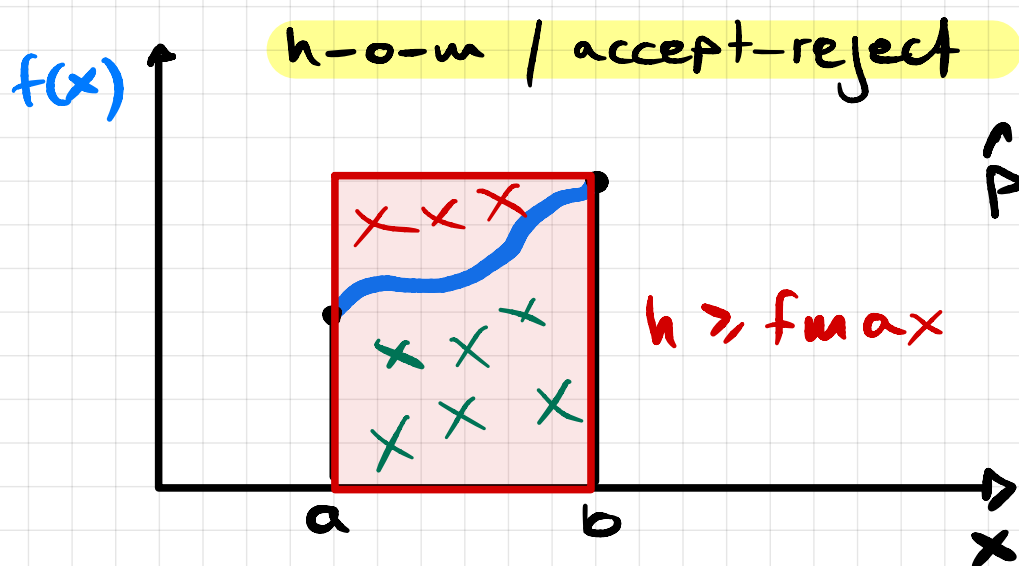


$$I = \langle f \rangle V = \langle f \rangle (b-a)$$

$$\hat{I} = \bar{f} (b-a)$$

$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x) dx$$



$$\hat{p} = \frac{\text{hits}}{\text{hits} + \text{miss}} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{f_{\max} (b-a)}$$

$$\hat{I} = \hat{p} \cdot V$$

$$V = f_{\max} (b-a)$$

$$\delta \hat{I}$$

$$\hat{p} = \frac{N_o \leftarrow \text{hits}}{N \leftarrow \text{total}}$$

$$\text{Var}(ax) = a^2 \text{Var}(x)$$

$$N_o \sim P(N_o) = \binom{N}{N_o} p^{N_o} (1-p)^{N-N_o}$$

$$\delta N_o = \sqrt{\text{Var}(N_o)}$$

$$\text{Var}\left(\frac{N_o}{N}\right) = \frac{1}{N^2} \text{Var}(N_o)$$

$$\delta \hat{p} = \frac{1}{N} \delta N_o$$

$$\delta \hat{p} = \frac{1}{N} \sqrt{N p (1-p)}$$

$$\langle N_o \rangle = p \cdot N$$

$$\text{Var}(N_o) = N p (1-p)$$

$$\delta \hat{I} = V \delta \hat{p} = \frac{V}{\sqrt{N}} \sqrt{p(1-p)}$$

$$f(x) = \int_0^{f(x)} 1 du$$

Θεωρία MC απορρίψης

$$1D: I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} 1 du = \int_a^b dx \int_0^{f_{\max}} g(x, u) du dx$$

$$\mu \in g(x, u) = \begin{cases} 1 & \text{"hit", } u \leq f(x) \\ 0 & \text{"miss", } u > f(x) \end{cases}$$

$$\hat{I} = V \cdot \bar{g} \quad \text{από το MC στις } \underline{2} \text{ διαστάσεις}$$

$$= V \cdot \frac{1}{N} \sum_i g(x_i, u_i) = V \cdot \frac{N_o}{N} = \hat{p} \rightarrow \left(\frac{\# \text{ hits}}{\# \text{ total}} \right)$$

$$= V \cdot \hat{p}$$

$$\delta \hat{I} = V \cdot \delta \hat{p} = V \cdot \frac{\delta N_o}{N} = V \cdot \frac{\sqrt{N \cdot \hat{p}(1-\hat{p})}}{N} = \frac{V}{\sqrt{N}} \sqrt{\hat{p} - \hat{p}^2}$$

διότι

$$N_o \sim P(N_o) = \binom{N}{N_o} \cdot p^{N_o} (1-p)^{N-N_o}$$

$$\text{Var}(N_o) = N \cdot p \cdot (1-p)$$

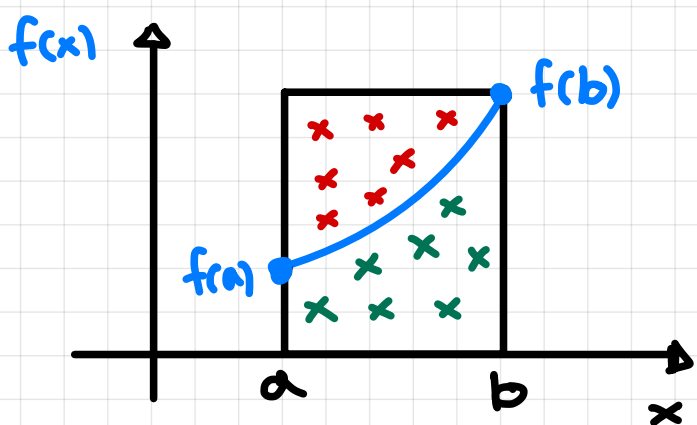
συμπέρασμα: στο ίδιο ακριβώς
αποτέλεσμα θα καταλήγαμε
αν χρησιμοποιούσαμε
την expectation

$$\delta I = V \cdot \frac{\sqrt{\langle g^2 \rangle - \langle g \rangle^2}}{\sqrt{N}}$$

$$\langle g \rangle = p$$

$$\langle g^2 \rangle = p$$

π.χ.



$$\hat{I} = V \cdot \hat{p}$$

$$\delta \hat{I} = V \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\hat{p} - \hat{p}^2}$$

$$V = (b-a) \cdot f_{\max}$$

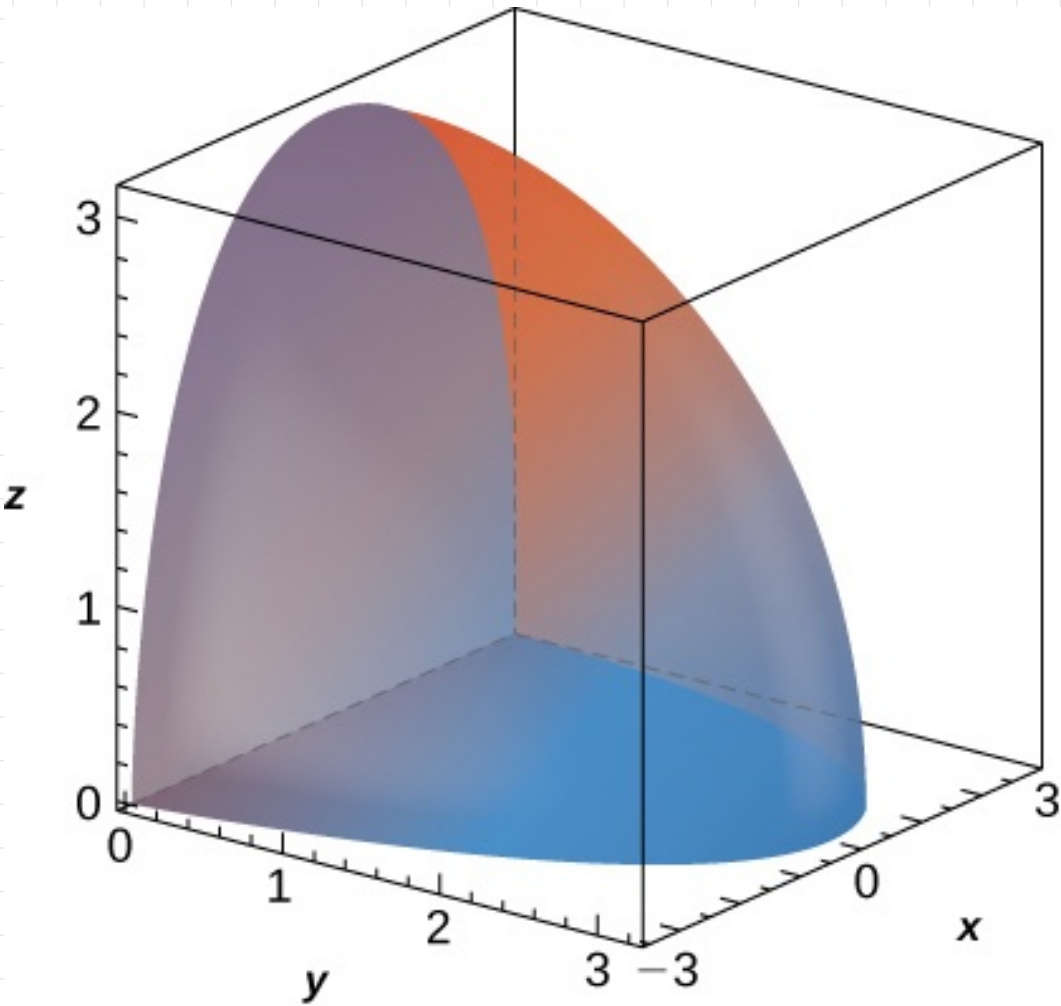
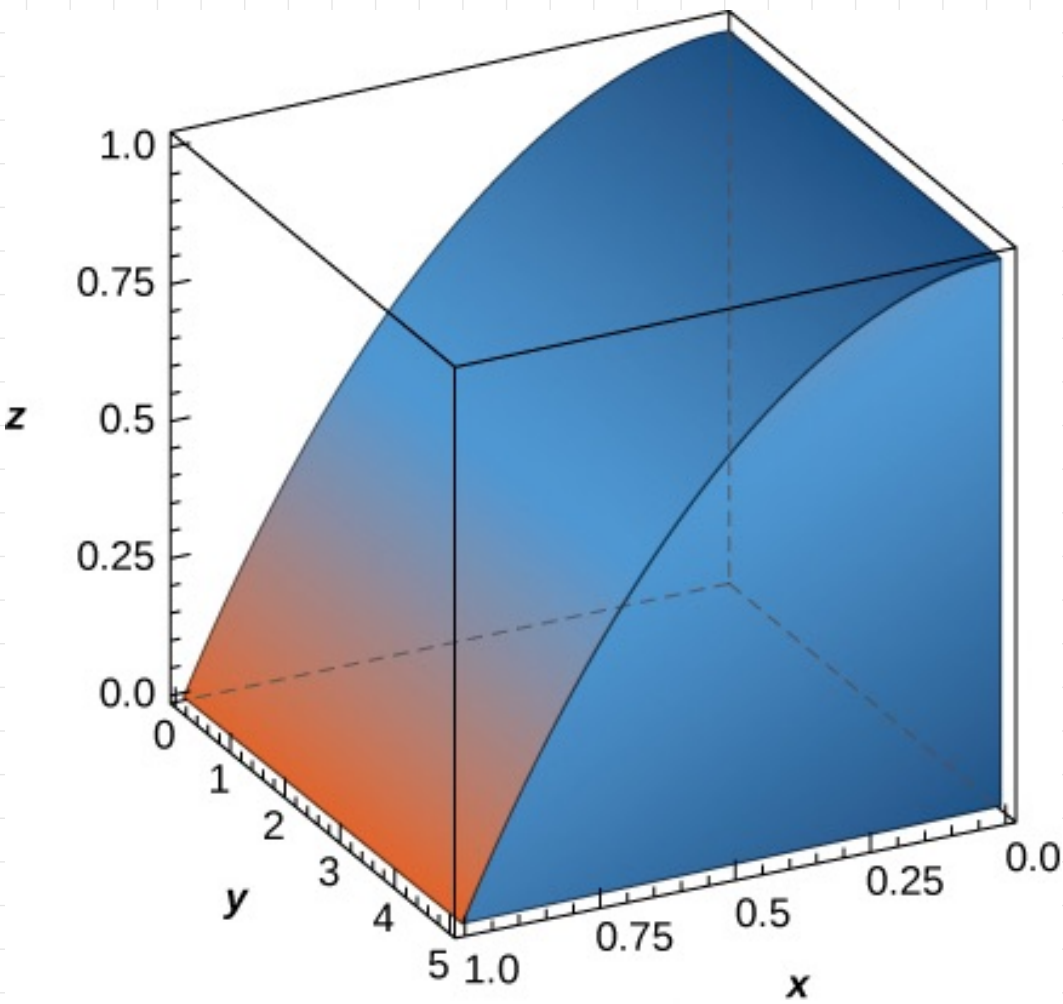
$$\hat{p} = \frac{\text{hits}}{\text{hits} + \text{miss}}$$

Για D διαστάσεις

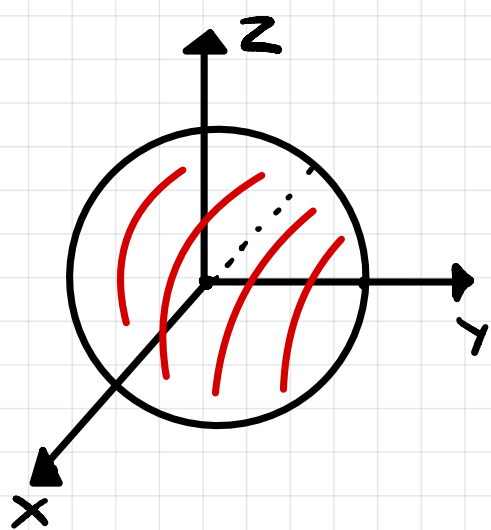
$$I = \int_0^1 f(\vec{x}) dV = \int_0^1 \int_0^{f_{\max}} g(\vec{x}, u) du dV$$

= crude της $g(\vec{x}, u)$ στις
 $D+1$ διαστάσεις

Ολοκλήρωση με 6ε D Σταθερές



Παράδειγμα MC ολοκλήρωση



Να υπολογιστεί η μάζα

$$\text{της σφαίρας } m = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dV$$

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

$$R = 3 \text{ m}$$

$$\rho(x, y, z) = \frac{5}{648\pi} (x^2 + y^2) \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

$$m = \iiint_{\Omega} \frac{5}{648\pi} (x^2 + y^2) dx dy dz$$

(καρτεσιανές
σφαίρικές
πολικές) $\times$ (crude
h-o-m) = 6 διαφορετικοί
τρόποι

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

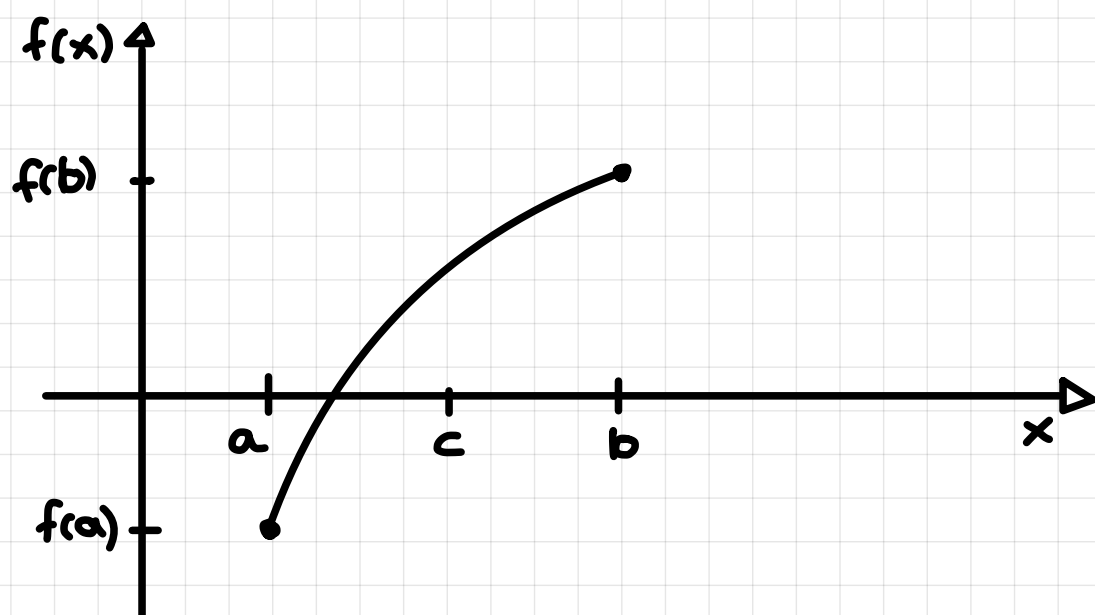
$$z = r \cos \theta$$

$$m = \frac{5}{648\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^3 r^2 \sin^2 \theta \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$
$$= \frac{10}{648} \int_0^{\pi} \int_0^3 r^4 \sin^3 \theta dr d\theta$$

Λύση εξίσωσης $f(x)=0$

διαλέγει $\neq$

Μεθόδος διχοτομής (bisection methods)



Bolzano

- $f(a) \cdot f(b) < 0$
- $f(x)$ συνεχής στο $[a, b]$
- $a < p < b$
 $f(p) = 0$

αλγόριθμος :

1) υπολογίζουμε το $c = \frac{a+b}{2}$

2) αν $f(a) \cdot f(c) < 0$ τότε θέτουμε $b = c$

αν $f(c) \cdot f(b) < 0$ τότε θέτουμε $a = c$

$$a_n < p < b_n$$

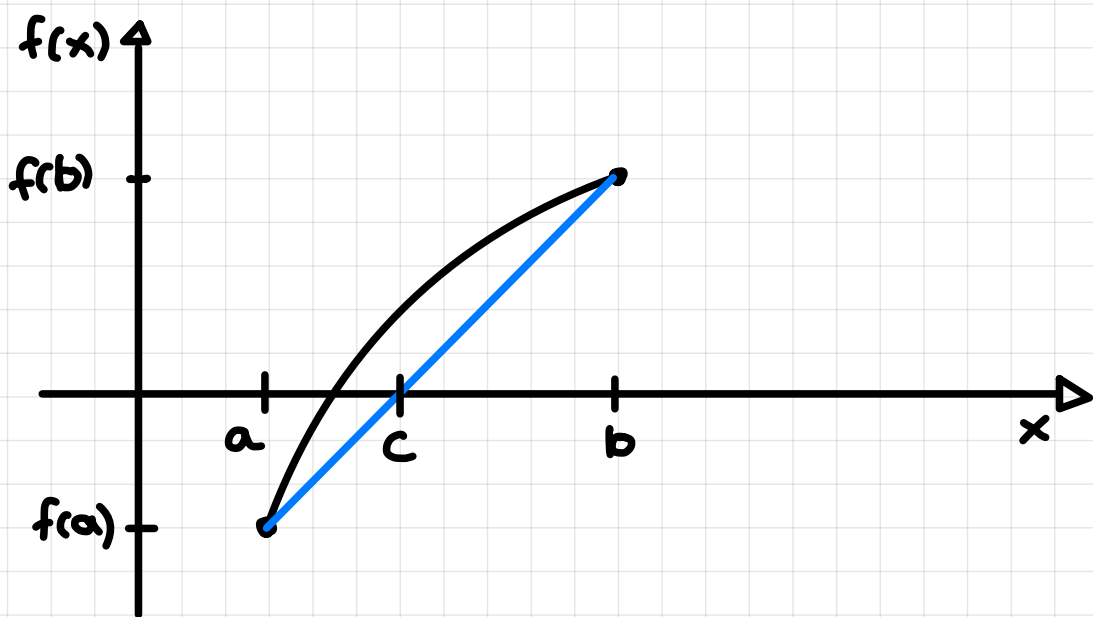
$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

$$\mu\epsilon \quad a_0 \equiv a \quad b_0 \equiv b$$

επισημάνσεις: 1.) $a_n < p < b_n$ εγγυημένα

$$2.) \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

Μεθόδος εφάπτερου σημείου (regula falsi)

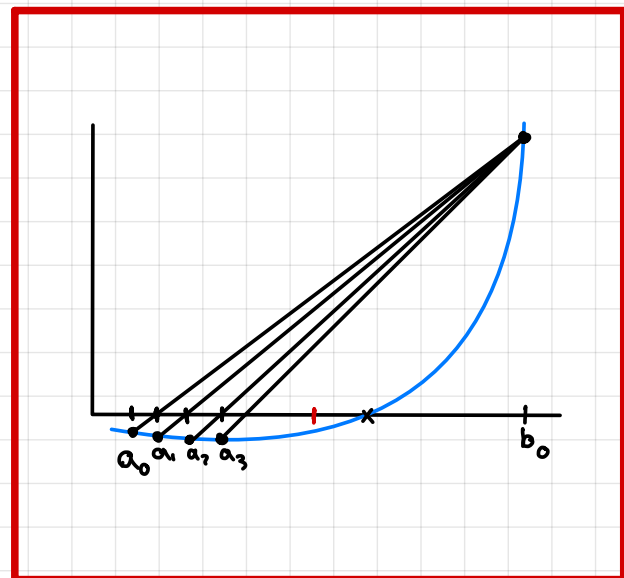


$\gamma(x)$ = διατεμνούσα
περνά από τα σημεία

x	y
a	f(a)
b	f(b)

$$\gamma(x) = f(a) \frac{b-x}{b-a} + f(b) \frac{x-a}{b-a}$$

$$\gamma(c) = 0 \quad c = \frac{f(b) \cdot a - f(a) \cdot b}{f(b) - f(a)}$$



Μεθόδος Newton-Raphson

$\{x_n: x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ακολουθία δοκιμαστικών ὑποθέσεων

επιθυμούμε $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \rho$ με $f(\rho) = 0$

$$f(x_n + \varepsilon_n) = f(x_n) + \varepsilon_n f'(x_n) + \frac{1}{2} \varepsilon_n^2 f''(x_n) + \dots \approx 0$$

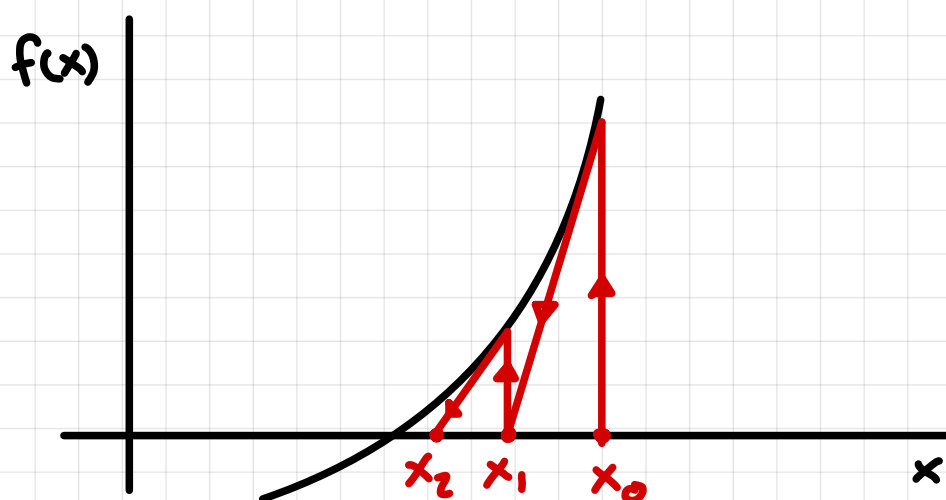
$$\varepsilon_n = - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

απαδρομική σχέση
⊥ Γημείου

$$x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

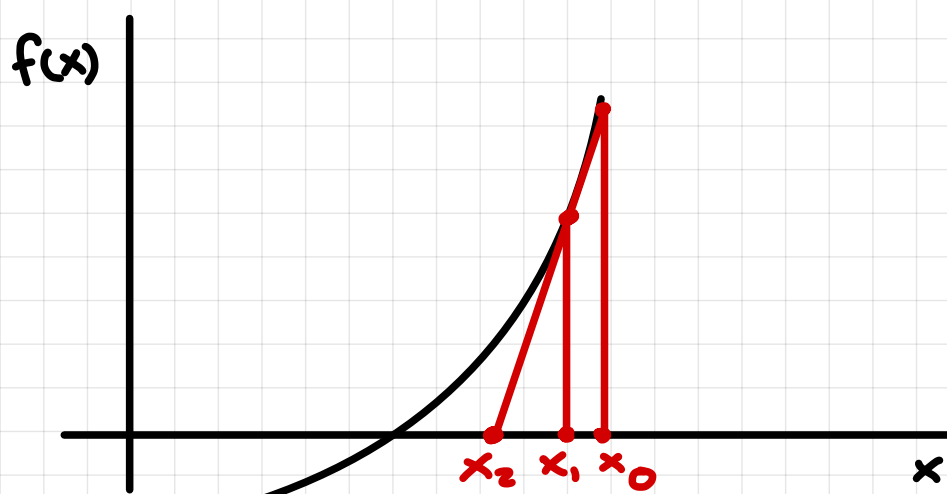
παρακολουθούμε το $|x_{n+1} - x_n|$ και σταματάμε
όταν αυτό γίνει πολύ μικρό



εξέταση πιάς με
την μέθοδο Βαβυλωνίων
 $f(x) = x^2 - a = 0$
 $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$

Διατεμνούσα (Secant)

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$



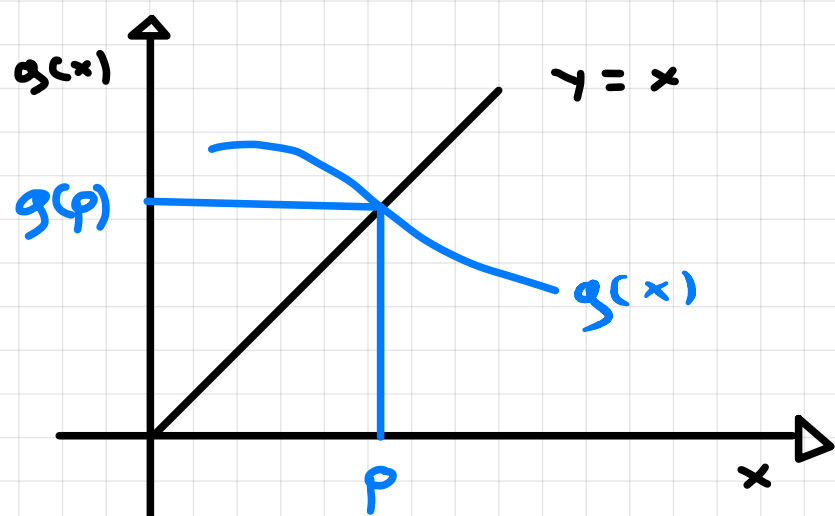
δεν χρειάζεται
να γνωρίζουμε
την παράγωγο

$$x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1})$$

(επαναληπτική σχέση
δύο σημείων)

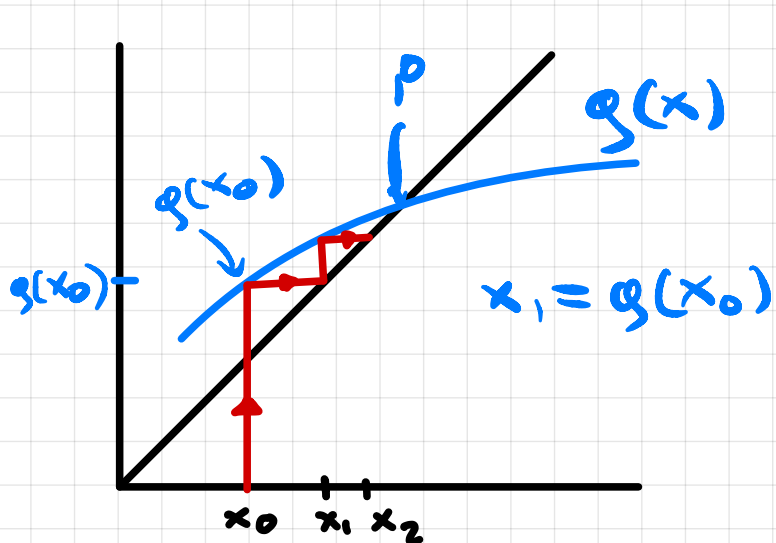
Σταθερού σημείου

Προσπαθούμε να γράψουμε την $f(x) = 0$ ως
 $g(x) = x$

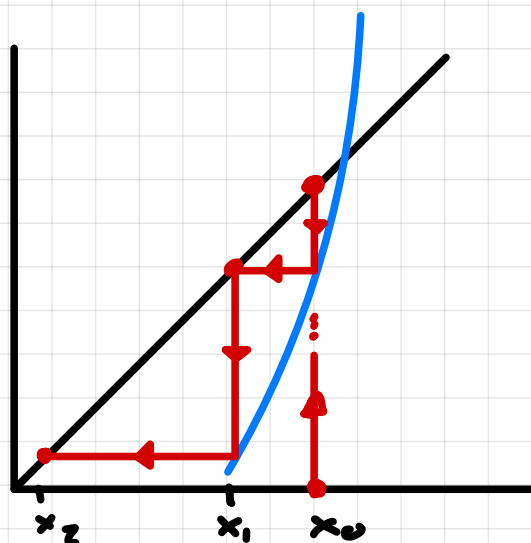


το p αποτελεί σταθερό
σημείο της $g(x)$

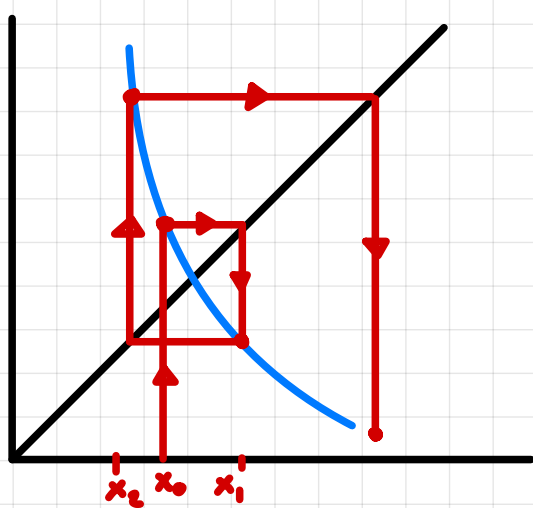
$$g(p) = p$$



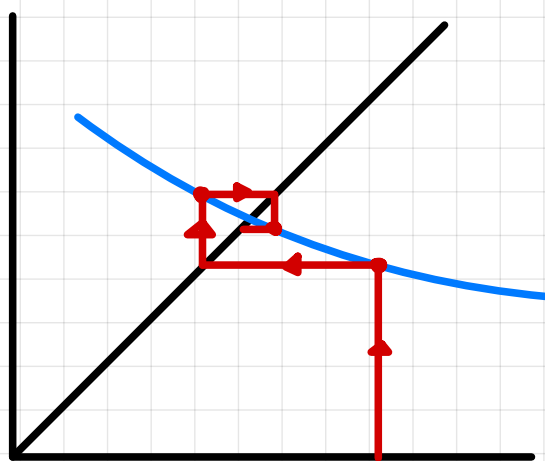
$$|g'(p)| < 1$$



$$|g'(p)| > 1$$



$$|g'(p)| > 1$$



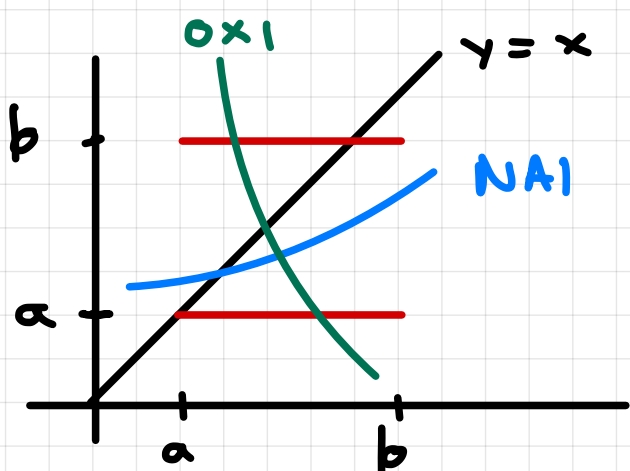
$$|g'(p)| < 1$$

Συγκρίση της $x_{n+1} = g(x_n)$

Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ τότε $g(p) = p$

$p =$ σταθερό σημείο της $g(x)$

Καθολική συγκρίση



Θεωρήματα 2.4.3 + 2.4.1 (Μιγουίλς)

- $g(x)$ συνεχής στο $[a, b]$
- $a \leq g(x) \leq b$
 $a \leq x \leq b$
- $g'(x) =$ υπάρχει
- $\max\{|g'(x)|\} = L < 1$

τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p = g(p)$ για οποδήποτε $a \leq x_0 \leq b$

Απόδειξη: (Bolzano)

$$h(x) \equiv g(x) - x$$

$$h(a) \cdot h(b) < 0$$

$$\text{αφού } g(a) - a \geq 0$$

$$g(b) - b \leq 0$$

αρα υπάρχει $h(p) = 0$ με $a \leq p \leq b$

$$h'(x) = g'(x) - 1 < 0$$

αρα $h(x)$ γνησίως φθίνουσα
και το p είναι το μοναδικό
σταθερό σημείο

Τονικη συγκλιση:

(Θεωρημα 2.4.4 Μισυρλινς)

Εαν $|g'(p)| = \lambda < 1$ και $g(x)$ συνεχης, τότε η ακολουθια $x_{n+1} = g(x_n)$ συγκλινει τονικα, εφοθου υπαρχει $p = g(p)$.

Δηλαδη υπαρχει $\varepsilon > 0$ ωστε $\forall x_0 \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$

$$|g(x) - p| = |g(x) - g(p)| \leq |g'(p)| |x - p| = \lambda \cdot \varepsilon \leq \varepsilon$$

$$\text{δηλαδη} \quad -\varepsilon \leq g(x) - p \leq \varepsilon$$

$$\text{Αρα} \quad \left. \begin{array}{l} p - \varepsilon \leq g(x) \leq p + \varepsilon \\ \forall \quad p - \varepsilon \leq x \leq p + \varepsilon \end{array} \right\}$$

η τονικη συγκλιση
πραγεται σε καθεληνη
εντος του $|x - p| < \varepsilon$

Ταξη συγκλισης: (ορισμος)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - p|}{|x_n - p|^k} = C$$

$$\varepsilon_n \equiv |x_n - p|$$

↑
αυξητικη
σταθερα
θροισματος

$k = 1$ (γραμμικη)

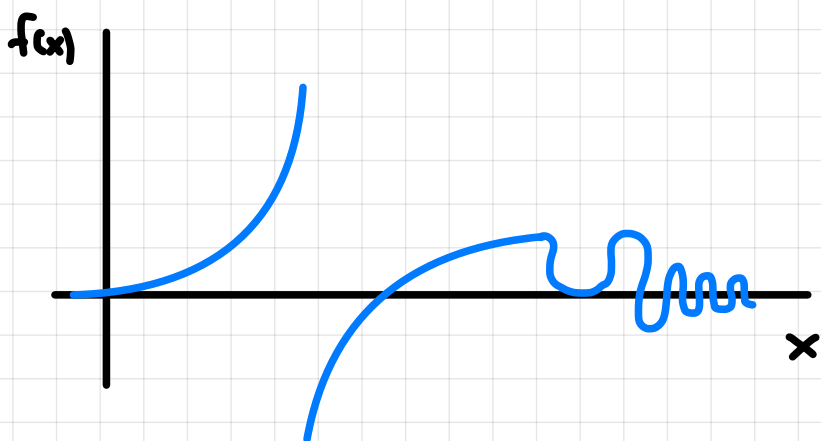
$k = 2$ (τετραγωνικη)

$k = 3$ (κυβικη)

↓
ταχυτητα

$$\text{για μεγαλα } n \text{ } \varepsilon_n < 1 \rightarrow \varepsilon_{n+1} = C \varepsilon_n^k$$

Δυστροπες $f(x)$



- ασυνεχειες
- ακροτατα
- $f(x) = (x - p_c)^k p(x)$
- πολλαπλες συνεχες ριζες

παράδειγμα

Θέλω να λύσω την $x^2 - 11x + 25 = 0$ χρησιμοποιώντας

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

fixed point iterations:

$$f(x) = x^2 - 11x + 25 + x = x$$

$$x^2 - 10x + 25 = x$$

$$(x-5)^2 = x$$

$$x-5 = \pm\sqrt{x}$$

$$x = \pm\sqrt{x} + 5$$

$$g(x) = \pm\sqrt{x} + 5$$

Newton - Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 11x_n + 25}{2x_n - 11}$$

$$g(x) = x - \frac{x^2 - 11x + 25}{2x - 11}$$

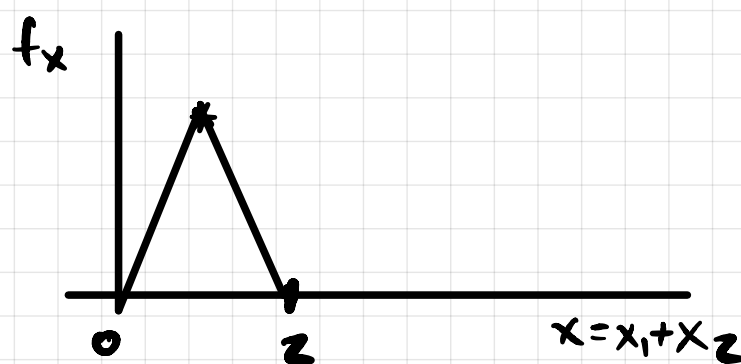
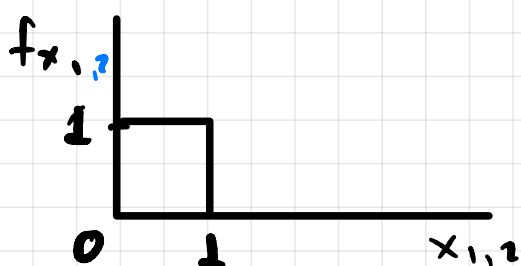
Απόδειγμα TM

$$X = X_1 + X_2$$

$$X_1 \sim \text{Unif}(0,1)$$

$$X_2 \sim \text{Unif}(0,1)$$

$$X \sim f_X(x) = ?$$



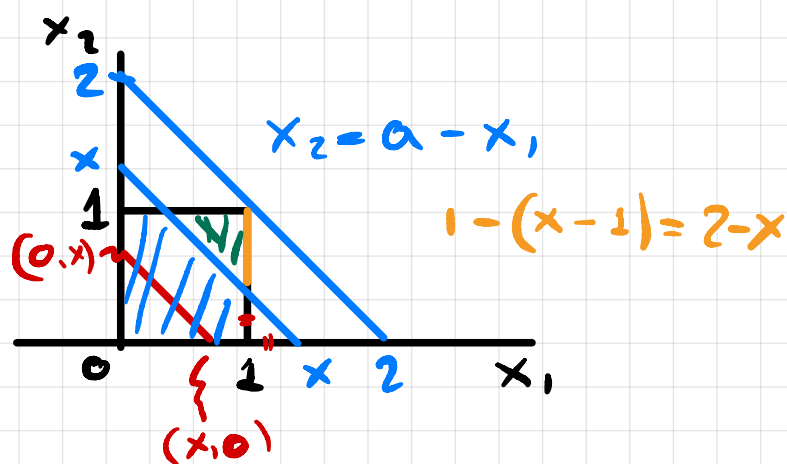
CDF

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$X = X_1 + X_2$$

$$X_2 = X - X_1$$

$$Y = a - x$$



$$F(x) = \iint_{x_1 + x_2 \leq x} dx_1 dx_2$$

$$\text{οταν } x_1 + x_2 \leq 1$$

$$F(x) = x^2/2$$

$$\text{οταν } x_1 + x_2 > 1$$

$$1 - \text{πρωτιο } = \text{πνδ}$$

$$1 - \frac{(2-x)^2}{2} = 1 - \frac{1}{2}(4 - 4x + x^2)$$

$$1 - 2 + 2x - \frac{x^2}{2}$$

$$= 2x - \frac{x^2}{2} - 1$$

CDF

$$F(x) =$$

$$x^2/2$$

$$\text{οταν } x \leq 1$$

$$2x - \frac{x^2}{2} - 1$$

$$\text{οταν } x > 1$$

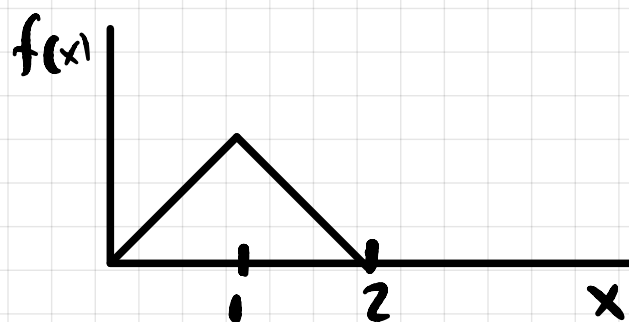
$$0$$

$$x > 2 \text{ ή } x < 0$$

$$f(x) = \begin{cases} x \\ 2-x \end{cases}$$

$$\text{οταν } x \leq 1$$

$$\text{οταν } x > 1$$



Θεώρημα κεντρικού ορίου

$$X = \sum_{i=1}^n x_i \quad x_i \sim f_i \quad \text{στο ίδιο πεδίο ορισμού}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} X \sim \frac{1}{\sqrt{2n} \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = N(\mu, \sigma^2)$$

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{i=1}^n \mu_i = \langle x \rangle = \langle x_1 + x_2 + \dots + x_n \rangle \\ &= \langle x_1 \rangle + \langle x_2 \rangle + \dots + \langle x_n \rangle \\ \sigma^2 &= \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \end{aligned}$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

— γραμμικά συστήματα αλγεβρικών εξισώσεων —

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$A_{n \times n} \quad x_{n \times 1} \quad b_n$

$$A \cdot x = b$$

στοιχειώδεις πράξεις γραμμών (εργ)

- 1) $R_i \leftrightarrow R_j$ | εναλλαγή γραμμών (rows)
- 2) $R_i \rightarrow \kappa R_i$ | πολλαπλασιασμός γραμμής με $\kappa \neq 0$
- 3) $R_i \rightarrow R_i + \kappa R_j$ | αθροισμός γραμμής i με πολλαπλάσιο της γραμμής j

αναίσιδη Gauss

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right]$$

εναυξημένος πίνακας
augmented matrix

$$[A|b]$$

εργ

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}' & a_{12}' & \dots & a_{1n}' & b_1' \\ 0 & a_{22}' & \dots & a_{2n}' & b_2' \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{nn}' & b_n' \end{array} \right]$$

$$[\text{ανω τριγωνικός} | b]$$

εργ

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}'' & 0 & \dots & 0 & b_1'' \\ 0 & a_{22}'' & \dots & 0 & b_2'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{nn}'' & b_n'' \end{array} \right]$$

αναίσιδη Gauss-Jordan

παράδειγμα αναίτιφης Gauss

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 - 3x_2 + 0 &= 2 \end{aligned}$$

οδηγός (pivot)

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 & | & 0 \\ 2 & -2 & 1 & | & 3 \\ -1 & -3 & 0 & | & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 = R_2 - 2R_1 \\ R_3 = R_3 + R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & \textcircled{-2} & -1 & | & 3 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 - \frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$-2x_2 + x_3 = 3$$

$$\frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2}$$

πίσω αντίστροφα

$$x_3 = 1$$

$$-2x_2 + 1 = 3 \rightarrow x_2 = -1$$

$$x_1 + 2(-1) + 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1$$

επαλήθευση

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

μερική οδηγία (partial pivoting)

εναλλαγή γραμμών ώστε να έχουμε τον μεγαλύτερο (δυνατόν) οδηγό κατ' απόλυτη τιμή

π.χ.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 2 & 2 & 3 & | & 3 \\ -1 & -3 & 0 & | & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & | & 3 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ -1 & -3 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}$$

αβκλβν :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & | & 0 \\ 2 & 2+\epsilon & 3 & | & 3 \\ -1 & -3 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}$$

δείτε το σύστημα με και χωρίς οδηγία και μελετήστε την ευσταθία της λύσης για

$$\epsilon = 0, 10^{-15}, 2 \cdot 10^{-15}, 9 \cdot 10^{-15}, 10^{-16}$$

LU

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

μοναδιασός
κάτω τριγωνικός

κλίμακωτος

αλγορίθμος
Doolittle

γιατί;

$$A \cdot x = b \rightarrow L \cdot U \cdot x = b$$

$$L \gamma = b$$

$$U x = \gamma$$

εμπρός αντικατάσταση

πίσω — // —

$$A \cdot x' = b'$$

$$A \cdot x'' = b''$$

⋮



τα L U υπολογίζονται μία φορά
και επαναχρησιμοποιούνται για όλα
τα $b, b', b'' \dots$

παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_1 \qquad A \qquad L_1 A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = U$$

$L_2 \qquad L_1 A \qquad L_2 L_1 A$

συμπερασματικά: $L_2 \cdot L_1 \cdot A = U$

$$A = (L_2 \cdot L_1)^{-1} U = L_1^{-1} L_2^{-1} U$$

2.1η θεωρία

για κάθε L που είναι μοναδιαίος κάτω τριγωνικός (ΜΚΤ)
έχοντας $L_{ij} \neq 0$ για μια μόνο στήλη του ($j < i$)

ίσχυουν:

- το γινόμενο δύο ΜΚΤ είναι ένας ΜΚΤ
- $(L^{-1})_{ij} = -L_{ij}$ για $j < i$

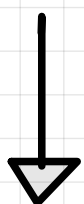
$$\text{n.x.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = I$$

— συνέχεια παραδείγματος —

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

L_1 L_2



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & +1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = L$$

L_1^{-1} L_2^{-1} $L_1^{-1} \cdot L_2^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

A L U

εφαρμογή

επίλυση του

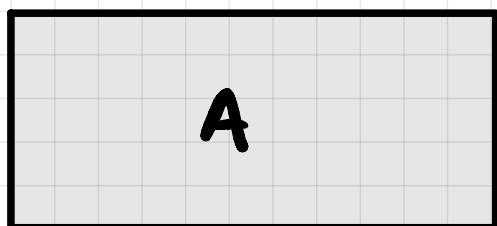
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

εχοντας προϋπολογισμένα τους L και U

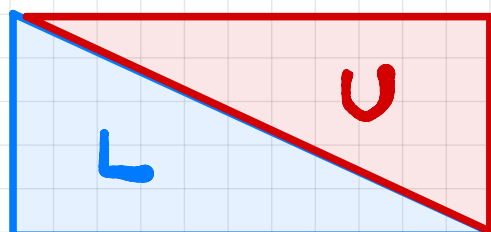
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_b \xrightarrow{\text{μ προς αντικατάσταση}} Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_U \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1/2 \end{pmatrix}}_Y \xrightarrow{\text{πίσω αντικατάσταση}} X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

κοβτος διαγραφης LU



$n \times n$



$\sim O(\frac{2n^3}{3})$

Lapack www.netlib.org

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$A \cdot x = b$

$$x_1 = \frac{1}{3}(10 + x_2)$$

$$x_2 = \frac{1}{3}(5 + x_1 + x_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{4}(10 + 2x_2)$$

Jacobi

$$x_1^{n+1} = \frac{1}{3}(10 + x_2^n)$$

$$x_2^{n+1} = \frac{1}{3}(5 + x_1^n + x_3^n)$$

$$x_3^{n+1} = \frac{1}{4}(10 + 2x_2^n)$$

Gauss Seidel

$$x_1^{n+1} = \frac{1}{3}(10 + x_2^n)$$

$$x_2^{n+1} = \frac{1}{3}(5 + x_1^{n+1} + x_3^n)$$

$$x_3^{n+1} = \frac{1}{4}(10 + 2x_2^{n+1})$$

γενικά $Ax = b \rightarrow (D - S)x = b \rightarrow x = D^{-1}Sx + D^{-1}b$

$$x^{n+1} = M x^n + D^{-1}b$$

με $M \equiv D^{-1}S$ και $A = D - S$

$$\downarrow$$

$$x^{n+1} = g(x^n)$$

επαναληπτικό
σχήμα σταθερού
σημείου στο
διαυγές $x = (:)^T$

n.x.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \quad x^{n+1} = D^{-1}S x^n + D^{-1}b$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Jacobi}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Gauss Seidel}$$

Γιγν Θεωρία

για $x = g(x) \rightarrow x = \text{λύση του συστήματος}$

$$x = M \cdot x + D^{-1}b$$

$$x^{n+1} = M \cdot x^n + D^{-1}b$$

$$(x^{n+1} - x) = M(x^n - x)$$

$$e^n \equiv x^n - x$$

σφάλμα στον n-οστό
επαναληψή

$$e^{n+1} = M e^n = M^n e^0$$

Συνθήκη σύγκλισης

$\lim_{n \rightarrow \infty} e^n = 0$ αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του $M \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \}$
είναι μικρότερες της μονάδας κατ' απόλυτη τιμή $\max |\lambda_i| < 1$

φασματική ακτίνα $\rho(M) \equiv \max |\lambda_i|$

π.χ. όταν M διαγωνιστικός

$$M = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix} P \quad \text{τότε} \quad M^n = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k^n \end{pmatrix} P$$

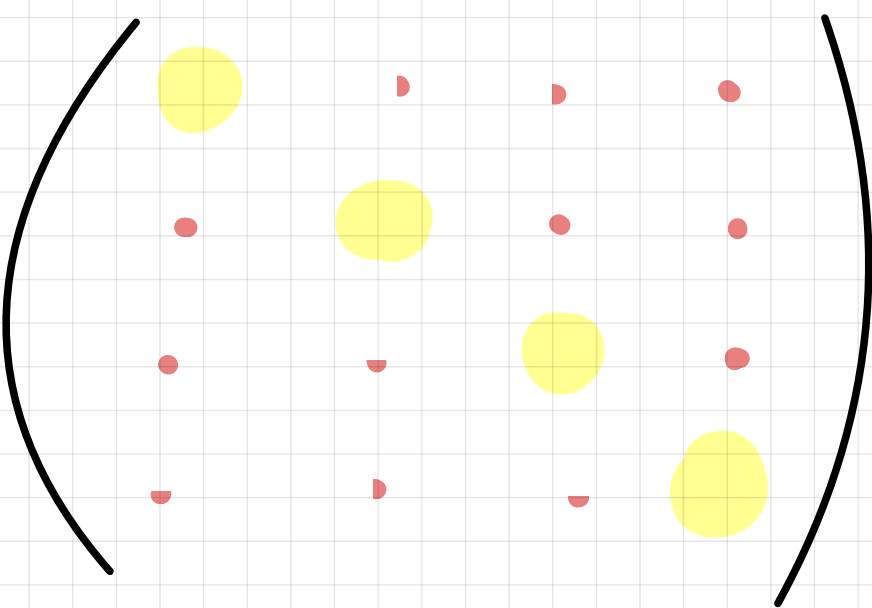
$$\lim_{n \rightarrow \infty} M^n = 0 \quad \text{αν} \quad \rho(M) < 1$$

ικανή αλλά όχι αναγκαία συνθήκη συγκλίσης

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$



$A =$ αυστηρά διαγώνια υπεργερος



δηλαδή τα διαγώνια στοιχεία κυριαρχούν σε κάθε γραμμή

Jacobi

vs

Gauss Seidel

- + παραλληλoι υπολογισμοι (computing cluster)
- x^{n+1} και x^n πρεπει να αποθηκευονται σε ξεχωριστες μεταβιβητες

- + γρηγοροτερη συγκλιση
- + μπορεί να συγκλινει αταμα και οταν η Jacobi οχι
- Δεν μπορεί να υλοποιηθει σε μορφη παραλληλου υπολογισμού (εκτος αν ο D^{-1} είναι γνωστος)

παραδειγματα :

<https://github.com/theofil/CompPhysics/tree/master/examples>

pass or fail

```
if (0.1 + 0.2 - 0.3 == 0) :  
    pass()  
else :  
    fail()
```

```
if (0.5 + 0.5 - 1 == 0) :  
    pass()  
else :  
    fail()
```

πως θα γραφουμε του αριθμο 6 στο δυαδικο ;

$$6 = 6_{10} = 6 \cdot 10^0$$

$$613 = 6 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

$$6 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 110_2$$

1	1	0
---	---	---

0/1 0/1 0/1

ποιος αριθμος είναι (στο δεκαδικό) ο 101.01_2

$$101.01 = (?)_{10}$$

$$2^2 2^1 2^0 | 2^{-1} 2^{-2}$$

$$= 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$$

$$= (4 + 1 + 0.25)_{10} = 5.25$$

νώς θα γραφάμε του αριθμο 0.1 στο δυαδικό;

$$\omega = 0.1 = (0.1_{10}) = \overset{2^{-1} 2^{-2}}{0.0001} \overset{2^{-6} 2^{-7} 2^{-8} 2^{-9}}{100110011} \dots \overline{0011}_2$$

$$\omega = (2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-8} + 2^{-9} + \dots)$$

$$\omega = 2^{-4} (1 + 2^{-1} + \underbrace{2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-8} + 2^{-9} \dots}_{\omega})$$

$$\omega = 2^{-4} (1 + 0.5 + \omega)$$

$$16\omega = 1 + 0.5 + \omega$$

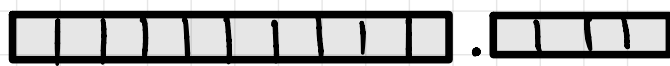
$$15\omega = 1.5$$

$$\omega = 0.1$$

σφάλμα αποκοπής

π.χ.

για αριθμούς μηχανής με 4 κλασματικά ψηφία



$$0.1 = 0.0001\cancel{100110011\dots 0011}_2 =$$

αποκοπή (chopping)

$$0.1 \rightarrow 2^{-4}$$

$$\text{σχετικό σφάλμα} \quad \frac{|0.1 - 2^{-4}|}{0.1} \approx 37.5\% !$$

το σφάλμα αναπαράστασης σε αριθμητική πεπερασμένων ψηφίων δεν είναι ιδιότητα του δυαδικού συστήματος

π.χ. $\frac{1}{3} = 0.3\overline{3}$

$$0.1_3 = \left(\frac{1}{3}\right)_{10};$$

με τι ακρίβεια αναπαράστασης ;

IEEE 754

$$-1^s \cdot 1.x_0x_1 \dots x_{n-1} \cdot 2^{e-1023}$$

sign significand mantissa exponent

64 bits

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 11 \\ 52 \end{array} \right.$$

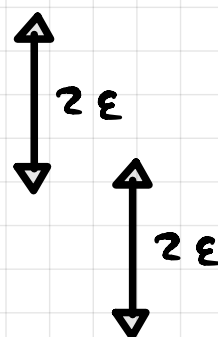
n.x. $1.0 = (-1)^0 \cdot 1.00 \dots 0 \cdot 2^{1023-1023}$

$\downarrow 1023 = 2^{10} - 1$ $\downarrow 52$ μνδευικά

$$1.0 = 00111111111100000000 \dots 0000000000$$

$$00111111111100000000 \dots 0000000001 = 1 + 2^{-52}$$

$$00111111111100000000 \dots 0000000010 = 1 + 2^{-51}$$



Ε-μνχάωνς

||
2⁻⁵³ i.e.
binary 64

$e = 0$ και $e = 2^n - 1 = 2047$ "εξαιρετικά" για ειδικούς
βρόχους $\pm \infty$, NaN, ± 0

64 bits

ελάχιστος	μέγιστος
$-1^0 \cdot 1.00 \dots 0 \cdot 2^{-1022}$	$-1^0 \cdot 1.11 \dots 1 \cdot 2^{1023}$
$\approx 2.2 \cdot 10^{-308}$	$\approx 1.8 \cdot 10^{308}$

διαδοχικοί αριθμοί μπορούν μόνο αν έχουν τον ίδιο εκθέτη!

π.χ. για $e = 1075 \rightarrow e - 1023 = 52$

$$-1^{\circ} 1.00 \dots 00 \cdot 2^{52} = 2^{52}$$

$$-1^{\circ} 1.00 \dots 01 \cdot 2^{52} = (1 + 2^{-52}) \cdot 2^{52} = 2^{52} + 1$$

$$-1^{\circ} 1.00 \dots 10 \cdot 2^{52} = (1 + 2^{-51}) \cdot 2^{52} = 2^{52} + 2$$

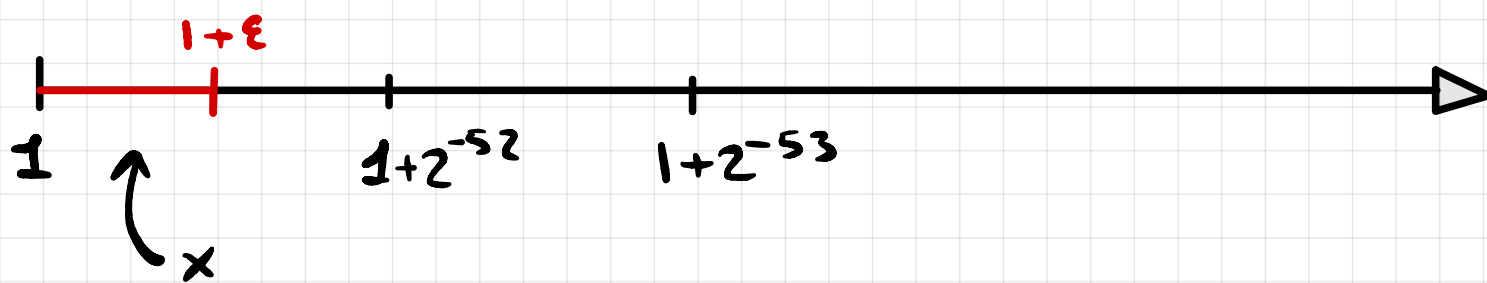
↑
ακέραια
διαφορε
↓

απόσταση διαδοχικών αριθμών = $2\varepsilon \cdot 2^{e-1023}$

↑
 ε - μηχανή 5

ϵ -μνχανισ

machine epsilon (εστροφύλλοινη μονάδα)

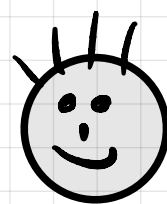


$\text{float}(x) = 1$ για $1 \leq x < 1 + \epsilon$

$\epsilon = 2^{-53}$ για binary 64

Βρείτε το ϵ στον H/Y σας :

$$7/3 - 4/3 - 3/3 = 2^{-53}$$



```
double e = 1.0;  
while (1.0 + e != 1) e = 0.5e;
```

C/C++

```
e = 1.0  
while (1.0 + e != 1): e = 0.5e;
```

Python

εφαρμογή στρωματοποίησης

- 1) αποφεύγουμε πρόσθεση / αφαίρεση αριθμών με διαφορετικό εκθέτη

π.χ.

$$\begin{array}{r} 1.23456 \times 10^3 \\ + 1.23(456) \times 10^0 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 1.23456 \times 10^3 \\ 0.00123 \times 10^3 \\ \hline 1.23579 \times 10^3 \end{array}$$

αποφεύγονται
σημαντικά
ψηφία

- 2) εν γένει η σειρά των πράξεων παίζει ρόλο

$$a + (b + c) \neq (a + b) + c$$

$$\sqrt{a^3} \neq (\sqrt{a})^3$$

$X \sim \text{Norm}$

Σιαλέζης 12^η

$$\text{Norm}(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Box-Müller

transform

$$X \sim f(x) = \text{Norm}(0, \sigma^2) \quad ?$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \text{Ⓜ}$$

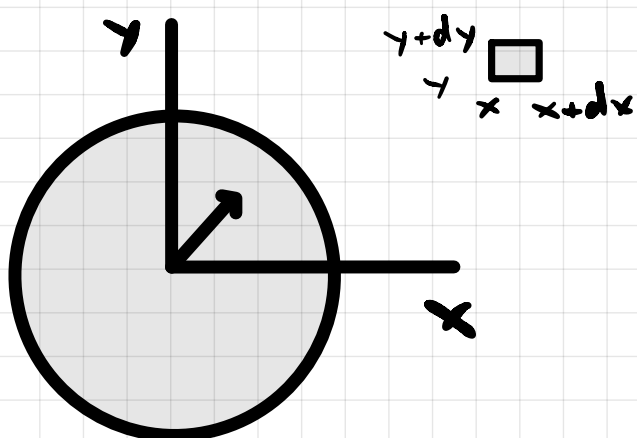
οπίζω

$$\vec{R} = x i + y j$$

$$\begin{matrix} x \sim f(x) \\ y \sim f(y) \end{matrix}$$

η πιθανότητα
το $\vec{R}$ να
είναι $\mu \in \mathbb{R}^2$
στο $dx dy$

$$= f(x) f(y) dx dy = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}} dx dy$$



$$\begin{matrix} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 \leq r < \infty \\ 0 \leq 2\pi < 2\pi \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r dr d\phi$$

$$P(|R| < r) = \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r'^2}{2\sigma^2}} r' dr' d\phi'$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int_0^r e^{-\frac{r'^2}{2\sigma^2}} \frac{r'}{\sigma^2} dr' d\phi'$$

$$= \int_0^{r^2/2\sigma^2} e^{-w} dw = 1 - e^{-r^2/2\sigma^2}$$

$$w = r'^2/2\sigma^2$$

$$dw = \frac{r'}{\sigma^2} dr'$$

r'	w
0	0
r	$r^2/2\sigma^2$

$$F(r) = 1 - e^{-r^2/2\sigma^2} = u$$

$$1 - u = e^{-r^2/2\sigma^2}$$

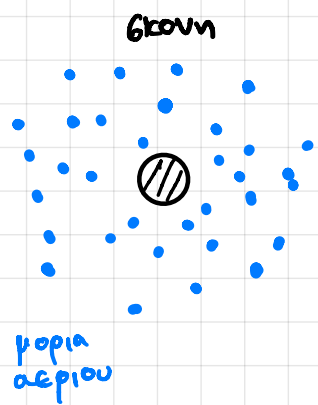
$$\ln(1 - u) = -r^2/2\sigma^2$$

$$r(u) = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1 - u)}$$

$$F^{-1}(u) = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1 - u)}$$

$$\text{ισοδυναμ} = \sqrt{-2\sigma^2 \ln u} \quad \text{για } u \sim \text{Unif}(0, 1)$$

Κίνηση Brown



Θεωρία Einstein

χωρίς απόδειξη

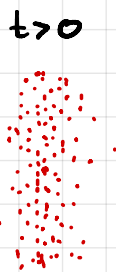
$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} D \quad 1-D$$

$$p(x,t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

μεγάλη στατιστική
απομάκρυνση ενός
σωματιδίου Brown
 $\langle x^2 \rangle = 2Dt \equiv \sigma^2$
με $\langle x \rangle = 0$

Διάχυση σταγονιδίων κρέμας στον καφέ

(1-D)



Τυχαίος περιπάτος
random walk

$$s = \begin{cases} +l & 50\% \\ -l & 50\% \end{cases}$$

$$\langle s \rangle = (+l)(0.5) + (-l)(0.5) = 0$$

$$\langle s^2 \rangle = (+l)^2(0.5) + (-l)^2(0.5) = l^2$$

N-βήματα

$$x = \sum_{i=1}^N s_i$$

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^N \langle s_i \rangle = \sum_{i=1}^N \langle s \rangle = 0$$

$$\langle x^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \langle s_i^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \langle s^2 \rangle = N \cdot l^2$$

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = N \cdot l^2$$

$$\sigma = \sqrt{N} \cdot l$$

Όταν $N \rightarrow \infty$ Ο.Κ.Ο.

$$x \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

$$\sigma^2 = N \cdot l^2$$

π.χ.

Απόσταση σωματιδίου Brown για $N=3$ βήματα

$$x = \sum_{i=1}^3 s_i = s_1 + s_2 + s_3$$

$p =$ δεαγματα
 $q = 1 - p =$ κορωνα

Εστω $\begin{cases} p = 50\% \\ q = 50\% \end{cases}$ πιθανότητα για να πας 1 βήμα δεξιά
// αριστερά

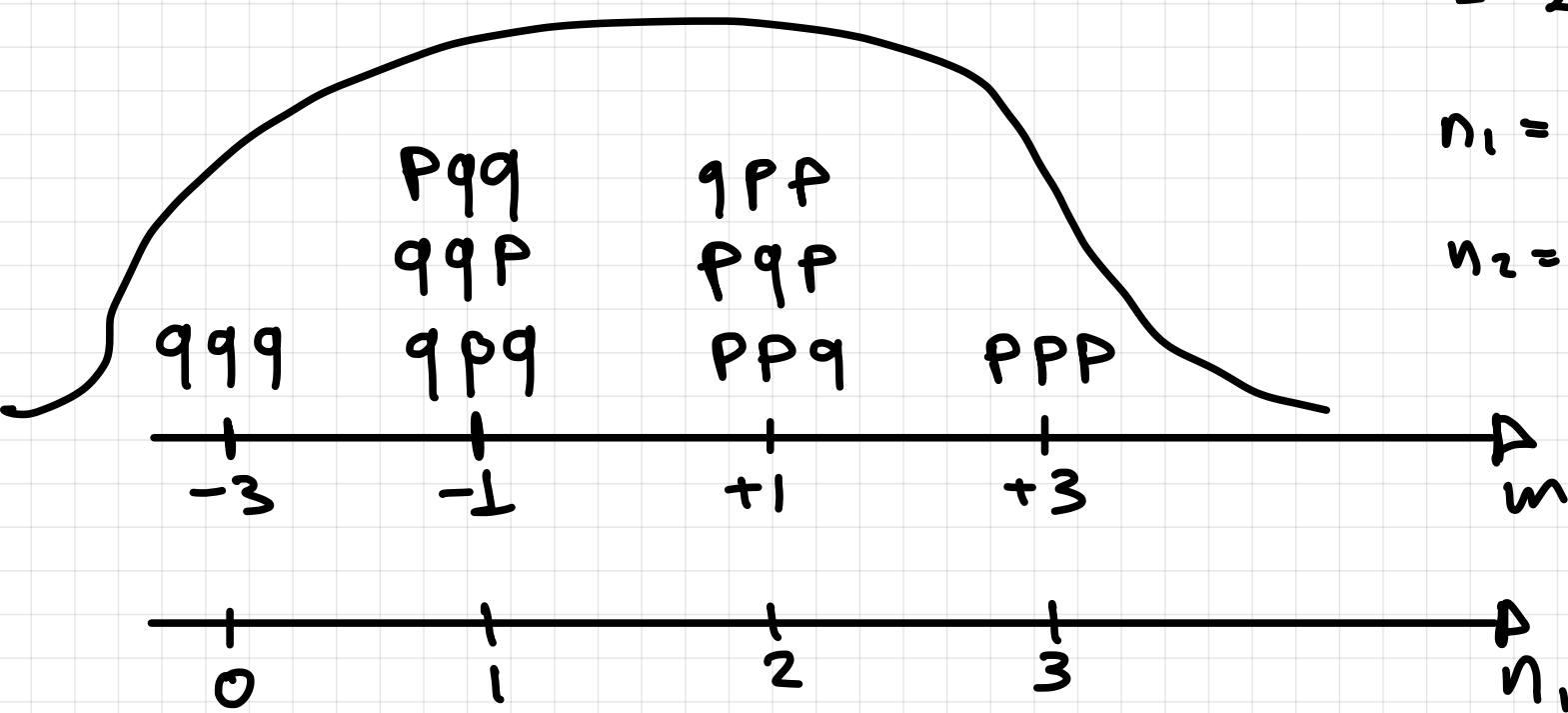
$$x = \sum -3\ell, -\ell, +\ell, +3\ell \} = m \cdot \ell = (n_1 - n_2) \cdot \ell$$

$n_1 =$ αριθμός βυμάτων δεξιά

$n_2 =$ // αριθμός βυμάτων αριστερά

$$n_1 + n_2 = N$$

$$m \equiv n_1 - n_2 = n_1 - (N - n_1) = 2n_1 - N$$



$$n_1 = \frac{N+m}{2}$$

$$n_2 = \frac{N-m}{2}$$

$$\binom{N}{n_1} = \frac{N!}{n_1! (N-n_1)!}$$

$$P(n_1) = \frac{N!}{n_1! n_2!} p^{n_1} q^{N-n_1}$$

$$P(X = -3\ell) = \binom{3}{0} p^0 \cdot q^3$$

$$P(X = +\ell) = \binom{3}{2} p^2 q^1$$

$$P(X = -\ell) = \binom{3}{1} p^1 q^2$$

$$P(X = +3\ell) = \binom{3}{3} p^3 q^0$$

$$P(n_1, n_2, N) = \frac{N!}{n_1! n_2!} p^{n_1} q^{n_2}$$

$$n_1 + n_2 = N$$

$$= \frac{N!}{n_1! (N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1}$$

$$\langle n_1 \rangle = N \cdot p$$

$$\text{Var}(n_1) = N \cdot q \cdot p$$

$$\text{Var}(m) = \text{Var}(n_1 - n_2) = \text{Var}(2n_1 - N)$$

$$= \text{Var}(2n_1)$$

$$= 4 \text{Var}(n_1) = 4 N \cdot p \cdot q$$

$$= 4 \cdot N \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= N$$

$$\text{Var}(x) = \text{Var}(m\ell)$$

$$= \ell^2 \cdot \text{Var}(m) = \ell^2 \cdot N$$