



Πρόβλημα 1

Εάν το $\vec{A}$ είναι ένα 2D διάνυσμα το οποίο «ζει» στο επίπεδο xy , δείξτε ότι το μέτρο του $\vec{A}$, $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$, παραμένει αναλλοίωτο σε μετασχηματισμό στροφής (βλ. σχήμα), δηλαδή ότι

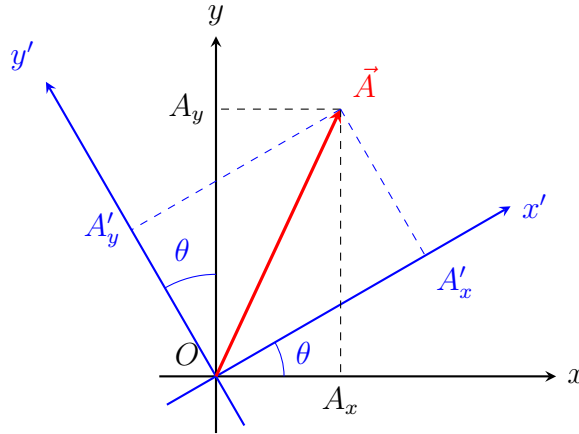
$$\sqrt{A_x'^2 + A_y'^2} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}. \quad (1)$$

Υπενθυμίζουμε τον κανόνα μετασχηματισμού των συνιστωσών του διανύσματος θέσης ($\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y}$), για στροφή του συστήματος συντεταγμένων στο επίπεδο xy με γωνία θ :

$$\begin{aligned} x' &= \cos \theta x + \sin \theta y, \\ y' &= -\sin \theta x + \cos \theta y. \end{aligned} \quad (2)$$

Οι συνιστώσες κάθε διανύσματος μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο:

$$\begin{aligned} A_x' &= \cos \theta A_x + \sin \theta A_y, \\ A_y' &= -\sin \theta A_x + \cos \theta A_y. \end{aligned} \quad (3)$$

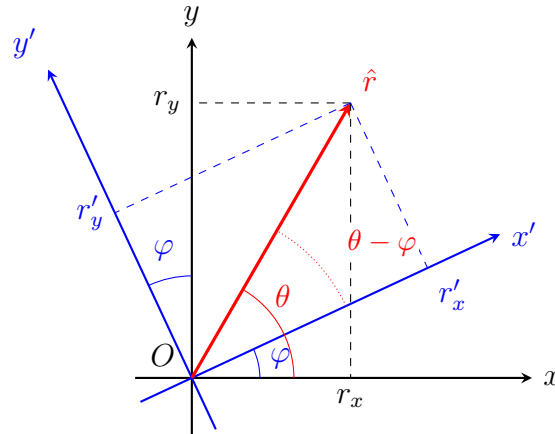


Πρόβλημα 2

Θεωρήστε το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα $\hat{r} = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}$, το οποίο σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x . Το σύστημα συντεταγμένων $Ox'y'$ προκύπτει από στροφή του συστήματος Oxy στο επίπεδο xy με γωνία φ (βλ. σχήμα). Υπολογίστε τις συνιστώσες r_x, r_y του $\hat{r}$ στο σύστημα Oxy και τις συνιστώσες r_x', r_y' στο σύστημα $Ox'y'$ και αποδείξτε χρησιμοποιώντας τους κανόνες μετασχηματισμού του $\hat{r}$ τις ταυτότητες:

$$(\alpha) \quad \cos(\theta - \varphi) = \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi,$$

$$(\beta) \quad \sin(\theta - \varphi) = \sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi.$$



Πρόβλημα 3

Δύο καράβια, A και B, κινούνται με σταθερές ταχύτητες ως προς την ακτή: το A βόρεια με 40 km/h και το B ανατολικά με 30 km/h. Η σχετική ταχύτητα του A ως προς το B ορίζεται ως $\vec{u}_{AB} = \vec{u}_A - \vec{u}_B$. Βρείτε τη σχετική ταχύτητα του A ως προς το B¹ (μέτρο και διεύθυνση).

Πρόβλημα 4

Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{A} = 3\hat{x} + \hat{y}, \quad \vec{B} = \hat{x} + 2\hat{y} \quad (4)$$

του επιπέδου xy . Ένα νέο σύστημα συντεταγμένων $Ox'y'$ προκύπτει από στροφή του συστήματος Oxy κατά γωνία $\theta = 30^\circ$, αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Οι συνιστώσες κάθε διανύσματος $\vec{V}$ στο νέο σύστημα δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} V'_x &= \cos \theta V_x + \sin \theta V_y, \\ V'_y &= -\sin \theta V_x + \cos \theta V_y. \end{aligned} \quad (5)$$

- (α) Υπολογίστε τις συνιστώσες A'_x, A'_y και B'_x, B'_y των δύο διανυσμάτων στο νέο σύστημα $Ox'y'$.

Απάντηση: $A'_x = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} + 1) \approx 3.10$, $A'_y = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 3) \approx -0.63$, $B'_x = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 2) \approx 1.87$, $B'_y = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} - 1) \approx 1.23$.

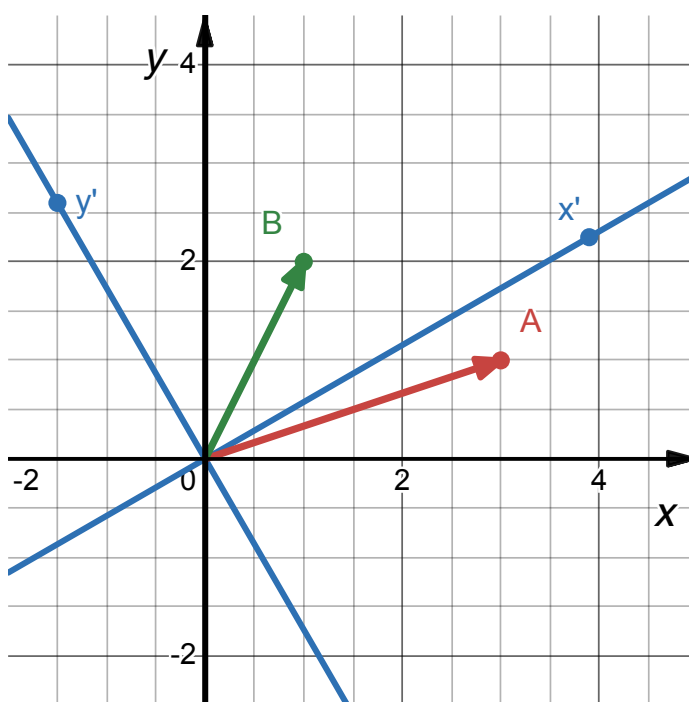
- (β) Χρησιμοποιώντας μόνο τις νέες συνιστώσες, υπολογίστε τα μέτρα $|\vec{A}|$ και $|\vec{B}|$, το εσωτερικό γινόμενο $\vec{A} \cdot \vec{B}$ και τη γωνία φ μεταξύ των δύο διανυσμάτων.

¹ Δηλαδή την ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται το A από το B, όπως θα τη μετρήσουν οι επιβάτες του B θεωρώντας το δικό τους καράβι (δηλαδή το σύστημα συντεταγμένων τους) ως ακίνητο.

Απάντηση: $|\vec{A}| = \sqrt{10}$, $|\vec{B}| = \sqrt{5}$, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 5$, $\cos \varphi = 1/\sqrt{2}$, δηλαδή $\varphi = 45^\circ$.

- (γ) Υπολογίστε τα ίδια μεγέθη με τις αρχικές συνιστώσες (στο σύστημα Oxy) και επαληθεύστε ότι τα μέτρα, το εσωτερικό γινόμενο και η γωνία είναι αναλλοίωτα κατά τη στροφή.
- (δ) Σχεδιάστε τα δύο διανύσματα μαζί με τους άξονες των δύο συστημάτων. Βρείτε τις γωνίες που σχηματίζουν τα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ με τον άξονα x και με τον άξονα x' .

Απάντηση: Ως προς τον άξονα x : $\alpha_A = \arctan(1/3) \approx 18.4^\circ$, $\alpha_B = \arctan 2 \approx 63.4^\circ$.
Ως προς τον άξονα x' : $\alpha'_A \approx -11.6^\circ$, $\alpha'_B \approx 33.4^\circ$.



Μπορείτε να έχετε πρόσβαση στην εικόνα αυτή και να την τροποποιήσετε στο [desmos.com](https://www.desmos.com/calculator/fqtthkvs2):

<https://www.desmos.com/calculator/fqtthkvs2>

Πρόβλημα 5

Ένα σωματίδιο με ηλεκτρικό φορτίο $q = 1 \mu\text{C}$ κινείται με ταχύτητα

$$\vec{u} = (5\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) \times 10^5 \text{ m/s} \quad (6)$$

μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο

$$\vec{B} = (\hat{x} + 2\hat{y} + 2\hat{z}) \times 10^{-1} \text{ T}. \quad (7)$$

- (α) Βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{B}$ στη διεύθυνση του $\vec{B}$ και τη γωνία θ μεταξύ $\vec{u}$ και $\vec{B}$.

Απάντηση: $|\vec{B}| = 0.3 \text{ T}$, $\hat{B} = \frac{1}{3}(\hat{x} + 2\hat{y} + 2\hat{z})$, $|\vec{u}| = 3\sqrt{3} \times 10^5 \text{ m/s}$, $\cos \theta = 1/\sqrt{3}$, δηλαδή $\theta \approx 54.7^\circ$.

- (β) Αναλύστε την ταχύτητα σε δύο συνιστώσες, $\vec{u} = \vec{u}_{\parallel} + \vec{u}_{\perp}$, όπου η $\vec{u}_{\parallel}$ είναι παράλληλη και η $\vec{u}_{\perp}$ κάθετη στο $\vec{B}$, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\vec{u}_{\parallel} = (\vec{u} \cdot \hat{B}) \hat{B}, \quad \vec{u}_{\perp} = \vec{u} - \vec{u}_{\parallel}. \quad (8)$$

Επαληθεύστε ότι $\vec{u}_{\perp} \cdot \vec{B} = 0$ και ότι $|\vec{u}|^2 = |\vec{u}_{\parallel}|^2 + |\vec{u}_{\perp}|^2$.

Απάντηση: $\vec{u} \cdot \hat{B} = 3 \times 10^5 \text{ m/s}$, $\vec{u}_{\parallel} = (\hat{x} + 2\hat{y} + 2\hat{z}) \times 10^5 \text{ m/s}$, $\vec{u}_{\perp} = (4\hat{x} - \hat{y} - \hat{z}) \times 10^5 \text{ m/s}$.

- (γ) Υπολογίστε τη μαγνητική δύναμη $\vec{F} = q \vec{u} \times \vec{B}$ που ασκείται στο φορτίο (συνιστώσες και μέτρο).

Απάντηση: $\vec{F} = 9 \times 10^{-2} (-\hat{y} + \hat{z}) \text{ N}$, $|\vec{F}| = 9\sqrt{2} \times 10^{-2} \text{ N} \approx 0.13 \text{ N}$.

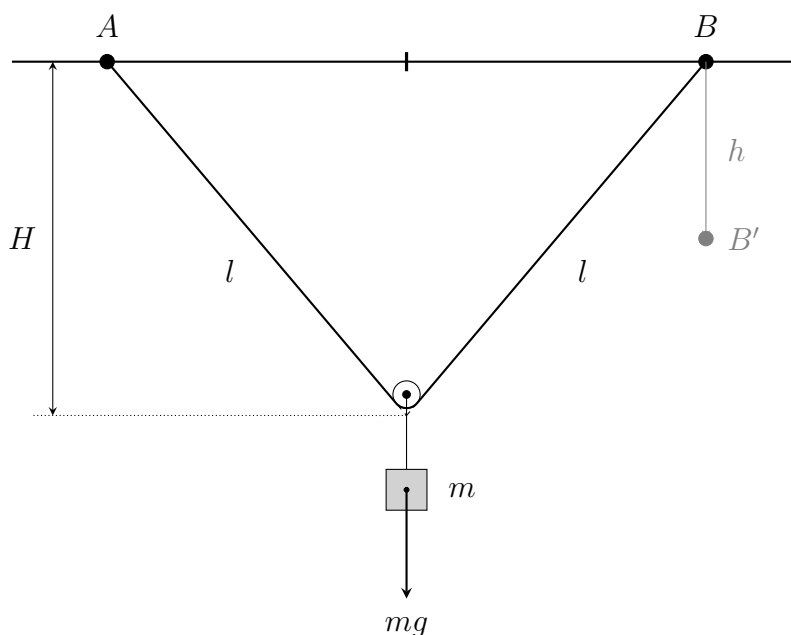
- (δ) Υπολογίστε το $q \vec{u}_{\perp} \times \vec{B}$ και συγκρίνετε με το αποτέλεσμα του (γ). Εξηγήστε γιατί η παράλληλη συνιστώσα της ταχύτητας δεν συνεισφέρει στη δύναμη και επαληθεύστε ότι

$$|\vec{F}| = |q| |\vec{u}_{\perp}| |\vec{B}| = |q| |\vec{u}| |\vec{B}| \sin \theta. \quad (9)$$

- (ε) Δείξτε ότι η $\vec{F}$ είναι κάθετη και στο $\vec{u}$ και στο $\vec{B}$. Τι συμπεραίνετε για την επίδραση της μαγνητικής δύναμης στη συνιστώσα $\vec{u}_{\parallel}$ της ταχύτητας;

Πρόβλημα 6*

Ένα αβαρές και αδιάτατο νήμα μήκους $2l$ έχει τα άκρα του καρφωμένα σε δύο καρφιά. Μια ιδανική τροχαλία ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω στο νήμα. Το σύστημα ισορροπεί, λόγω του βάρους του σώματος, στο μέσο της απόστασης μεταξύ των δύο καρφιών και σε απόσταση H από το οριζόντιο επίπεδο. Κάποια στιγμή το ένα καρφί υποχωρεί κατά μήκος h από την αρχική του θέση. Δείξτε ότι η τροχαλία θα υποχωρήσει κατά $h/2$ (ανεξαρτήτως των l και H).



Υπόδειξη: σχεδιάστε τις δυνάμεις στο σημείο ισορροπίας διανυσματικά, αυτές δεν θα αλλάξουν στη νέα θέση ισορροπίας ύστερα από την υποχώρηση του καρφιού. Μην ορίσετε κάποιο σύστημα συντεταγμένων (θα χαθείτε), χρησιμοποιήστε διανύσματα και γεωμετρία.

*Μπορείτε να αγνοήσετε αυτό το πρόβλημα αν σας φαίνεται δύσκολο και δεν σας γοητεύει.