Οι ασκήσεις είναι **χωρίς βαθμολογικό κίνητρο** (bonus) και θα σχολιάζω τις λύσεις που λαμβάνω στην τάξη, δίχως να απαντώ σε όλα τα μηνύματα ξεχωριστά. Μπορείτε να μου στείλετε ερωτήσεις στο **compPhysicsEKPA@gmail.com** αλλά μην ξεχνάτε:

1. να 'μεταφορτώνετε' τις λύσεις σας στο e-class (αν το πρόβλημα είναι παραδοτέο) με επισυναπτόμενο αρχείο τύπου *.ipynb .OR. *.txt .OR. *.pdf (με αυτή την σειρά προτίμησης).

2. να **συμπεριλαμβάνετε και τα αποτελέσματα** που λάβατε από το πρόγραμμά σας μαζί με **σχολιασμό** αυτών.

Πρόβλημα 1 (παραδοτέο έως 12.10.2023)

Λαμβάνοντας υπόψη το δείγμα δεδομένων από διαδοχικές ρίψεις ενός ζαριού με τέσσερις όψεις (τριγωνική πυραμίδα) υπολογίσετε:

α) τον αριθμητικό μέσο όρο του δείγματος $\hat{\mu} = N^{-1} \sum x_i$,

β) την τετραγωνική διασπορά του δείγματος $s^2 = (N-1)^{-1} \sum (x_i - \hat{\mu})^2$,

και μελετήσετε τις συχνότητες εμφάνισης των παρακάτω δεδομένων. Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

```
1, 2, 3, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 2, 2,
3, 3, 4, 3, 2, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 3, 2, 2, 2,
2, 2, 3, 2, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3,
2, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 2,
3, 3, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 2, 2,
1, 3, 3, 3, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 2,
2, 3, 2, 3, 4, 1, 3, 1, 3, 2, 3, 3, 1, 1, 3,
3, 2, 3, 2, 2, 4, 3, 3, 2, 4, 3, 1, 3, 3, 2,
2, 2, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 4, 3,
2, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 2, 1, 1,
2, 2, 1, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 3,
3, 3, 2, 3, 2, 4, 3, 3, 2, 4, 1, 2, 4, 2, 3,
4, 3, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 3, 1, 3, 2, 3, 3, 2,
3, 4, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 1, 2, 2,
3, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 1,
3, 3, 1, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 4, 1, 3, 1,
3, 3, 2, 2, 1, 3, 4, 4, 4, 1, 3, 1, 4, 3, 3,
3, 4, 3, 4, 1, 3, 3, 3, 1, 2, 3, 2, 2, 3, 4,
3, 4, 2, 2, 1, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 2,
3, 3, 1, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 2
```

Βρείτε τα δεδομένα και σε αρχείο τύπου *.txt εδώ και την λύση εδώ.

Πρόβλημα 2 (μη παραδοτέο)

α) Δημιουργήστε μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών βασισμένη στον γραμμικό μετασχηματισμό ισοδυναμίας υπολοίπου $x_{\mathrm{n}+1} = (2147483629 x_{\mathrm{n}} + 2147483587) \mathrm{mod}(2^{31} - 1)$ που να παράγει τυχαίους αριθμούς με ομοιόμορφη πυκνότητα πιθανότητας στο $[0, 1)$

β) Μελετήστε το διάγραμμα συχνοτήτων (ιστόγραμμα) της γεννήτριάς σας.

Πρόβλημα 3 (μη παραδοτέο)

α) Εξομοιώστε ένα ζάρι.

β) Εξομοιώστε ένα ζάρι που έχει 30% πιθανότητα να φέρει 6 και τα υπόλοιπα ενδεχόμενα ισοπίθανα.

Υποδείξεις: Χρησιμοποιήστε την γεννήτρια τυχαίων αριθμών με ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1)$ *που σας δίνεται από τον υπολογιστή σας και 'τεμαχίστε' κατάλληλα το διάστημα [0,1) σε 6 'τεμάχια', ελέγχοντας σε ποιο από αυτά ανήκει ο αριθμός που παράχθηκε. (**Λύση** του προβλήματος εδώ και εδώ.)*

Πρόβλημα 4 (μη παραδοτέο)

Χρησιμοποιώντας την γεννήτρια τυχαίων αριθμών με ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1)$ που σας δίνεται από τον υπολογιστή σας, γράψτε υπολογιστικό αλγόριθμο που να παράγει τυχαίους αριθμούς $X \sim 1/x$ στο διάστημα $0.5 < x < 10.5$ χρησιμοποιώντας την μέθοδο:

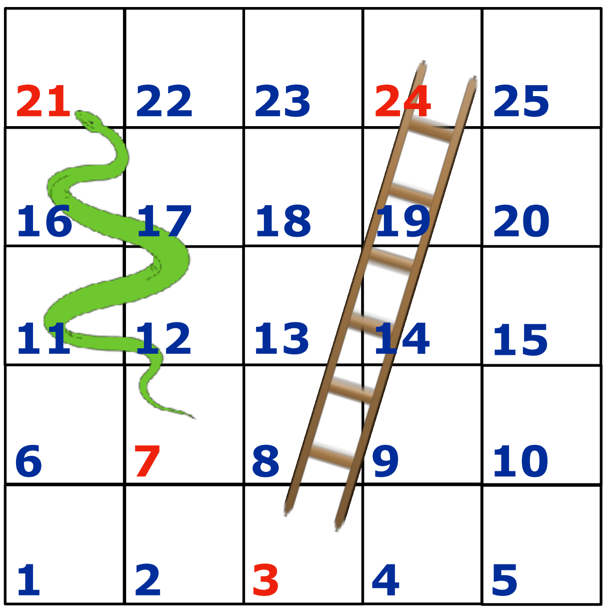
α) αντίστροφου μετασχηματισμού.

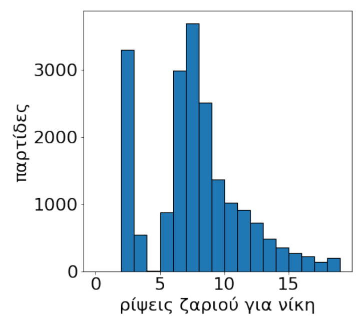
β) δειγματοληψίας απόρριψης (hit-or-miss).

Συγκρίνετε την απόδοση των δύο μεθόδων υπολογίζοντας πόσες επαναλήψεις χρειαστήκατε σε κάθε περίπτωση. (**Λύση** του προβλήματος εδώ και εδώ.)

Πρόβλημα 5 (μη παραδοτέο)

Βρείτε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X που χαρακτηρίζει τον αριθμό ρίψεων ενός ζαριού, προκειμένου να κερδίσει (φτάσει στο τετράγωνο 25) κάποιος στο παρακάτω 'φιδάκι'.





1. Υπολογίστε τον μέσο όρο και την τυπική απόκλιση του δείγματος των τιμών x που έλαβε η μεταβλητή X στα παιχνίδια που παίξατε.

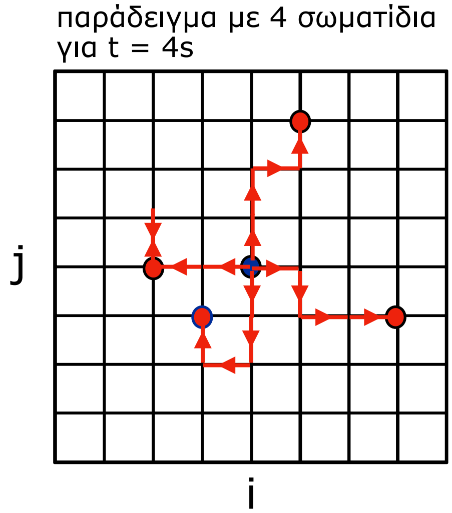
2. Προσθέστε ή αφαιρέστε σκάλες και φίδια και αυξομειώστε το μέγεθος του παιχνιδιού παρατηρώντας την μετάβαση σε μία 'κανονικότητα' $X \sim e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}$ όταν το 'παρακάνετε'. Γιατί συμβαίνει αυτό;

3. Σε ένα παιχνίδι μεταξύ δύο ατόμων, ποια η πιθανότητα να κερδίσει αυτός που ξεκινά δεύτερος; (*Στείλτε μου αν θέλετε την πιθανότητα που υπολογίσατε.*)

4. Στο πρώτο ερώτημα η απάντηση είναι $\bar{x} \approx 7.4$ και $\hat{\sigma} \approx 4.1$, θα ήταν σωστό να πούμε ότι χρειαζόμαστε κατά μέσο όρο $x = 7.4 \pm 4.1$ ζαριές για να κερδίσουμε ένα παιχνίδι;

Πρόβλημα 6 (μη παραδοτέο)

Χίλια σωματίδια Brown διαχέονται σε ένα δισδιάστατο επίπεδο, έχοντας ως σημείο εκκίνησης την αρχή των αξόνων. Τα σωματίδια εκτελούν τυχαίο βηματισμό σε ένα δισδιάστατο τετραγωνικό πλέγμα ακμής ενός εκατοστού με ταχύτητα $1\,\mathrm{cm/s}$.



Βρείτε πόσο μακριά θα βρίσκεται κατά μέσο όρο το κάθε σωματίδιο μετά από $t = 100$ βήματα του ενός δευτερολέπτου, υπολογίζοντας το

$$\bar{d} = \frac{1}{1000}\sum_{\mathrm{w}=1}^{1000}\sqrt{x_{\mathrm{w}}^2 + y_{\mathrm{w}}^2}$$

όπου $(x_{\mathrm{w}}, y_{\mathrm{w}})$ η θέση του κάθε σωματιδίου $w = 1, 2, 3...1000$ για $t = 100s$. Στην συνέχεια βρείτε τον μέσο όρο του τετραγώνου της απόστασης του καθενός σωματιδίου (για $t = 100s$)

$$\bar{d^2} = \frac{1}{1000}\sum_{\mathrm{w}=1}^{1000} x_{\mathrm{w}}^2 + y_{\mathrm{w}}^2$$

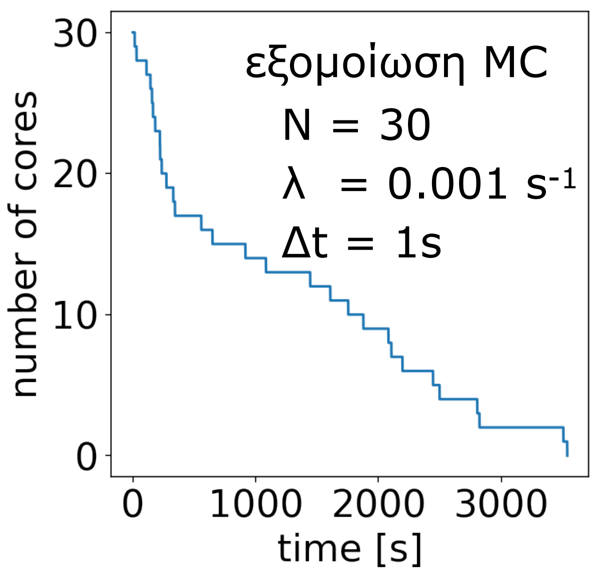
και συγκρίνετε τις απαντήσεις σας με το μονοδιάστατο πρόβλημα.

Υποδείξεις: Για τις ανάγκες του πειράματος θα χρειαστείτε να φτιάξετε ένα ζάρι τεσσάρων όψεων (πάνω - κάτω - δεξιά - αριστερά) το οποίο θα χρησιμοποιείτε για να αποφασίζετε προς ποια κατεύθυνση θα κινηθεί κάθε σωματίδιο σε κάθε 'γύρο".

Πρόβλημα 7 (μη παραδοτέο)

Να γραφεί πρόγραμμα που θα εξομοιώνει την ραδιενεργό διάσπαση $N = 1000$ πυρήνων συναρτήσει του χρόνου, σε διακριτά χρονικά βήματα $\Delta t = 1s$. Θεωρήστε ότι κάθε αδιάσπαστος πυρήνας έχει σταθερή πιθανότητα διάσπασης $p = \lambda \Delta t = 10^{-3}$ στο χρονικό διάστημα $\Delta t = 1s$. Το πρόγραμμα θα πρέπει να επιστρέφει στην 'έξοδό' του το πλήθος των αδιάσπαστων πυρήνων ύστερα από συνολικό χρόνο εξομοίωσης ίσο με $1000s$.

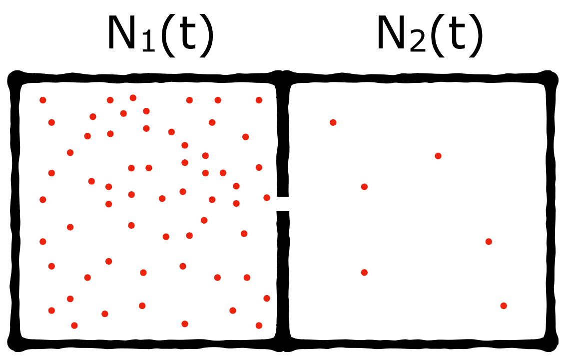
Υποδείξεις: Ανά μονάδα χρόνου, κάθε πυρήνας περνάει από δοκιμή Bernoulli (ανεξαρτησία διασπάσεων, άνευ μνήμης). Για τις ανάγκες του πειράματος θα χρειαστεί να φτιάξετε ένα κέρμα δύο όψεων με πιθανότητα $p = \lambda \Delta t = 10^{-3}$ να φέρει κορώνα, το όποιο θα χρησιμοποιείτε για να αποφασίζετε αν κάποιος πυρήνας θα υποστεί διάσπαση ρίχνοντας το κέρμα $N(t)$ φορές, όπου $N(t)$ ο πληθυσμός των εναπομεινάντων πυρήνων την χρονική στιγμή t.



Δείτε την λύση του προβλήματος στο YouTube

Πρόβλημα 8 (μη παραδοτέο)

Θεωρείστε ότι έχουμε ένα αέριο σε δύο συγκοινωνούντα δοχεία, με $N_1(t)$ και $N_2(t)$ το πλήθος των ατόμων που βρίσκεται σε κάθε δοχείο.



Να βρεθεί η χρονική εξέλιξη των δύο πληθυσμών $N_1(t)$ και $N_2(t)$ αν:

$$N_1(0) = 100$$
$$N_2(0) = 0$$

και $p = \lambda \Delta t = 1\%$ πιθανότητα για κάθε μόριο του αερίου να διασχίσει την τρύπα και να περάσει από το ένα δοχείο στο άλλο στο χρονικό διάστημα $[t, t + \Delta t]$.

Πρόβλημα 9 (παραδοτέο ως 26.10.2023)

Η τυχαία μεταβλητή

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

προκύπτει υπολογίζοντας τον μέσο όρο N ανεξάρτητων μετρήσεων της τυχαίας μεταβλητής X.

A) Κάνοντας χρήση γεννήτριας τυχαίων αριθμών $X \sim Unif(0,1)$ φτιάξτε δείγματα δεδομένων των $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ και $\bar{X}_{20}$

$$S_1 = [\bar{X}_{1,j}]$$
$$S_2 = [\bar{X}_{2,j}]$$
$$S_{20} = [\bar{X}_{20,j}]$$

και *εκτιμήστε* τον μέσο όρο και την τυπική τους απόκλιση.

B) Ποια είναι η *αναμενόμενη* τυπική απόκλιση του $\bar{X}_N$ όταν το $N \gg 20$; Τι διαφορετικό περιμένουμε σε περίπτωση που η X δεν έχει ομοιόμορφη κατανομή (π.χ. $X \sim x^2$); Γιατί είναι ωφέλιμο να υπολογίζουμε τον μέσο όρο πολλών ανεξάρτητων πειραματικών μετρήσεων της ίδια ποσότητας;

Υπόδειξη: συμβουλευτείτε τις σημειώσεις σας για το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα από το μάθημα της Θεωρίας Πιθανοτήτων (10ΥΚΟ13).

Πρόβλημα 10 (μη παραδοτέο)

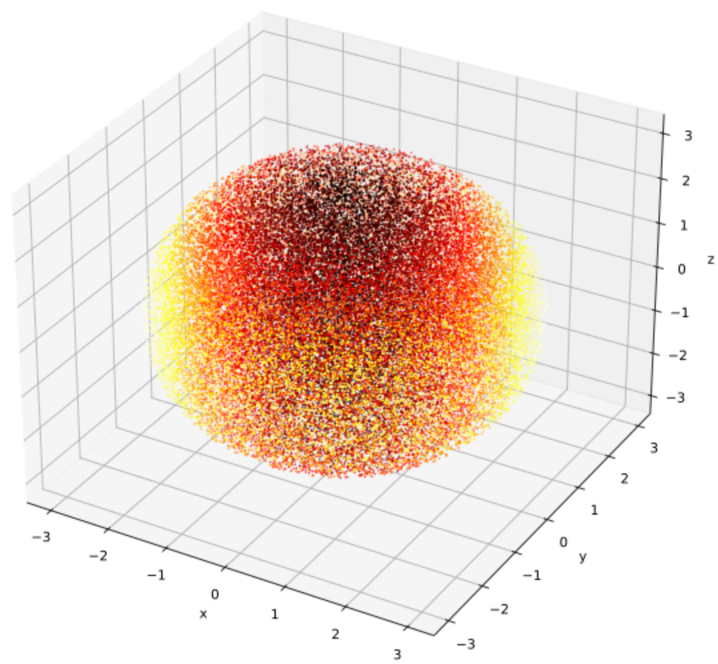
Υπολογίστε το

$$I = \int_{0.5}^{10.5} \frac{1}{x} dx$$

με την μέθοδο απλοϊκού Monte–Carlo καθώς και την αβεβαιότητα της εκτίμησης που κάνατε. Ποιο είναι το αναμενόμενο (θεωρητικά) σχετικό σφάλμα αν έχετε στην διάθεσή σας $N = 10^{10}$ δείγματα τυχαίων αριθμών ομοιόμορφης κατανομής; (**Λύση** του προβλήματος εδώ και εδώ.)

Πρόβλημα 11 (μη παραδοτέο)

Υπολογίστε την μάζα σφαίρας ακτίνας $R = 3$ και πυκνότητας $\rho(x, y, z) = \frac{5}{648\pi}(x^2 + y^2)$ με κέντρο την αρχή των αξόνων με την μέθοδο Monte–Carlo.



Δείτε την λύση του προβλήματος στο YouTube καθώς και τον κώδικα που χρησιμοποίησα για να φτιάξω την παραπάνω εικόνα στο GitHub.

Πρόβλημα 12 (μη παραδοτέο)

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{10} e^x dx$ (και η αβεβαιότητά του) με την μέθοδο της απλοϊκής (crude) Monte–Carlo ολοκλήρωσης, χρησιμοποιώντας $N = 1000$ τυχαίους αριθμούς. Να δομήσετε το πρόγραμμά σας έχοντας ως αφετηρία γεννήτρια τυχαίων αριθμών ομοιόμορφης κατανομής στο $[0, 1]$.

α) Να υπολογιστεί το *σχετικό σφάλμα* $\delta\hat{I}/\hat{I}$ της MC ολοκλήρωσης

β) Να υπολογιστεί (αναλυτικά) το θεωρητικώς αναμενόμενο *σχετικό σφάλμα* $\delta I/I$ της μεθόδου, για το ίδιο πλήθος τυχαίων δειγμάτων ($N = 1000$).

γ) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση $\sqrt{s^2}$ ενός δείγματος[1] αποτελούμενο από 4×10^4 MC ολοκληρώσεις (με N = 1000 η κάθε μία) και να την συγκρίνετε με το δI και το $\delta\hat{I}$ που υπολογίσατε στα ερωτήματα (α) και (β). Να φτιάξετε ένα ιστόγραμμα που να δείχνει την κατανομή των $\hat{I}$ και να σχολιάσετε την μορφή της.

δ) Εάν χωρίσουμε το διάστημα ολοκλήρωσης στα δύο, έτσι ώστε

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^5 e^x dx + \int_5^{10} e^x dx$$

και 'επενδύσουμε' στις επιμέρους δύο ολοκληρώσεις τους διαθέσιμους τυχαίους αριθμούς χωρισμένους σε δύο ίσα δείγματα $N = N_1 + N_2 = 500 + 500$, περιμένουμε το σχετικό σφάλμα της απλοϊκής MC ολοκλήρωσης να μεγαλώσει, να μικρύνει ή να μείνει το ίδιο; Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας επαναλαμβάνοντας το ερώτημα (β) για τα επιμέρους ολοκληρώματα I_1, I_2 και υπολογίζοντας την συνολική αβεβαιότητα του αθροίσματός τους.

ε) Να επαναλάβετε τα ερωτήματα (α), (β) και (γ) για την ολοκλήρωση με την μέθοδο απόρριψης MC (hit-or-miss) θεωρώντας $N = 1000$ ζευγάρια τυχαίων αριθμών (x, y) που έχουν παραχθεί ομοιόμορφα στο $[0, 1] \times [0, 1]$.

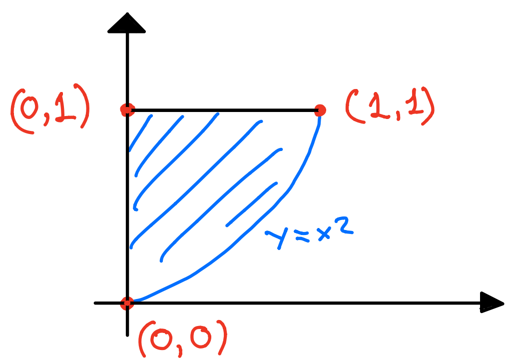
(**Λύση** του προβλήματος εδώ και εδώ.)

[1] Το s^2 ορίστηκε στο πρόβλημα 1 ως η τετραγωνική διασπορά ενός δείγματος παρατηρήσεων (μετρήσεων).

Πρόβλημα 13 (μη παραδοτέο)

Να υπολογιστεί με την απλοϊκή (crude) Monte-Carlo ολοκλήρωση, η μάζα των παρακάτω αντικειμένων και η αβεβαιότητά τους, για $N = 1000$ γεγονότα.

α) Δισδιάστατη πλάκα που οριοθετείται στην περιοχή $\{x \geq 0, y \leq 1, y \geq x^2\}$ (διαστάσεις μήκους σε μέτρα) με πυκνότητα $\rho(x, y) = \frac{20}{13}(x + y)$ [kg/m^3].



β) Κύβος πυκνότητας $\rho(x, y) = \frac{12}{31}(x^2 + yz)$ [kg/m^3] που οριοθετείται στην περιοχή $\{0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2, 1 \leq z \leq 2\}$ με διαστάσεις μήκους μετρημένες σε μέτρα.

Δίνεται, προς σύγκριση, ο ακριβής υπολογισμός της μάζας των δυο σωμάτων είναι $M = 1\,\mathrm{kg}$.

Η άσκηση αυτή είναι λυμένη στο web.

https://github.com/theofil/CompPhysics/tree/master/problems/2019_2020

Η διδακτική της αξία ωστόσο παραμένει, υπό την προϋπόθεση ότι κάποιος θα προσπαθήσει να την λύσει δίχως να συμβουλευτεί (εξ αρχής) τις δοσμένες λύσεις.

Πρόβλημα 14 (μη παραδοτέο)

Δίνεται η εξίσωση,

$$\tan x = \frac{x}{1-x^2}. \tag{1}$$

α) Να λυθεί η εξ.(1) στο διάστημα $x \in [2,4]$ χρησιμοποιώντας:

1) την μέθοδο της διχοτόμησης με 15 επαναλήψεις. *Θεωρήστε σαν τελική εκτίμηση της ρίζας* (ρ) *το μέσο του διαστήματος διχοτόμησης στην 15ή επανάληψη, δηλ.* $\hat{\rho} = 0.5(b_{14} + a_{14}) \approx \rho$, *με* $a_0 = 2$ *και* $b_0 = 4$.

2) την επαναληπτική σχέση[2]

$$x_{\mathrm{n}+1} = x_{\mathrm{n}} - f(x_{\mathrm{n}})/f'(x_{\mathrm{n}})$$

με

$$f(x) = \tan x - \frac{x}{1-x^2}$$

χρησιμοποιώντας $x_0 = 3.0$ και θεωρώντας σαν εκτιμητή της ρίζας το $x_6 = \hat{\rho} \approx \rho$.

Να εκτυπωθούν οι τιμές $\hat{\rho}$ και $f(\hat{\rho})$ για τις δυο περιπτώσεις. Ποια μέθοδος έδωσε $f(\hat{\rho})$ που να είναι περισσότερο συμβατό με το 0 ;

β) Να διερευνηθεί η ύπαρξη ριζών στο διάστημα $x \in [4,10]$.
– *θέμα ελεύθερης ανάπτυξης* ;-)

Υπόδειγμα κώδικα:

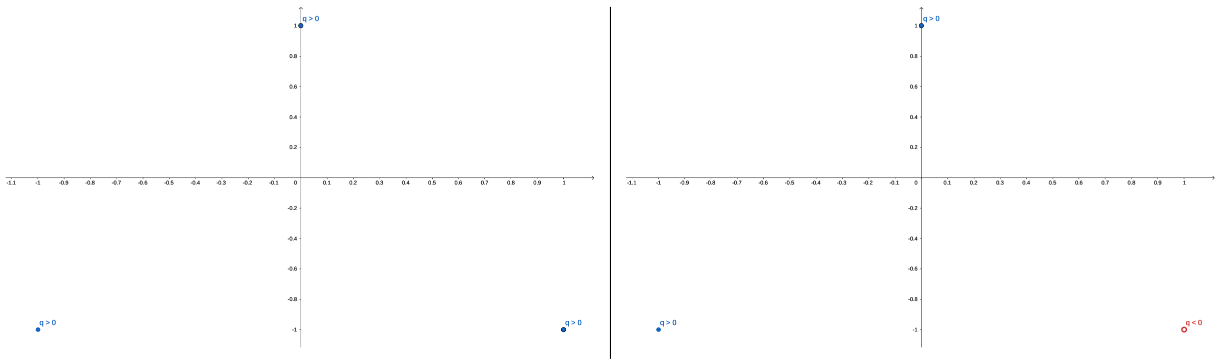
```
/*   C/C++   */
#include "math.h"
double f(double x){return tan(x) - x/(1 - x*x);}
double df(double x){/* implement f'(x) */}
int main()
{
  double a = 2;
  double b = 4;
  double n = 0;
  double x = 3;
  while( n < 15 )
  {
    // ... implement  bisection logic
    double c = 0.5*(a + b);
```

[2]Η σχέση αυτή είναι διάσημη με το όνομα Newton-Raphson.

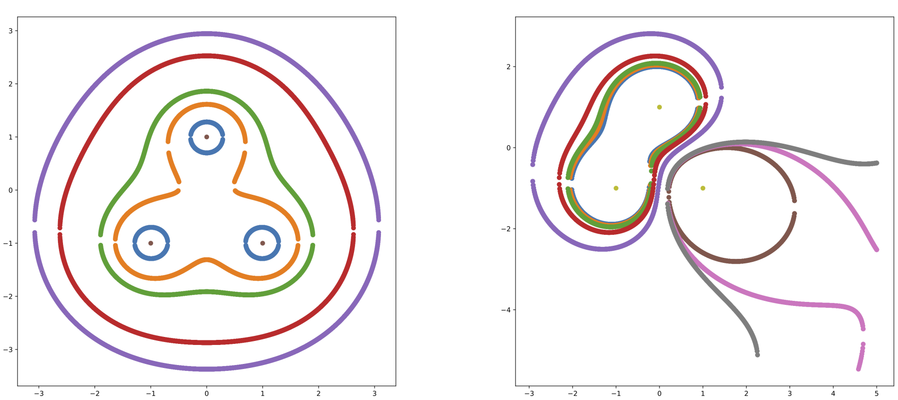
```
        // ... implement newton-raphson
        if ( n < 6 )
        {
           // x = x - f(x)/f'(x)
           // if (n == 5) ektypwsi twn x, f(x)
        }
        n = n + 1;
      }
    }

### /*   Python   */ ###
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt # for exploratory graphics ;-)
def f(x): return np.tan(x) - x/(1-x**2)
def df(x): return 0. # implement here the derivative

# first: plot f(x) to get an idea how it varies
x = np.linspace(-10,10,100)  # an array with 100 steps for x [-10, 10]
y = f(x)
ax, fig = plt.subplots(figsize=(10,10))
plt.plot(x, y)               # plots f(x)
plt.plot(x, [0. for i in x]) # plots y = 0, i.e., x-axis
plt.show()

# logic for bisection/newtwon similar as for the C/C++ example
```

Πρόβλημα 15 – Εφαρμογή (μη παραδοτέο)

Βρείτε τις ισοδυναμικές καμπύλες στο επίπεδο $z = 0$, μιας (διαμορφώσιμης από τον χρήστη) διακριτής κατανομής ηλεκτρικού φορτίου. Το συνολικό δυναμικό στην θέση $\vec{r}$ είναι $V(\vec{r}) = \sum_{\mathrm{i}} kq_{\mathrm{i}}/|\vec{r} - \vec{r}_{\mathrm{i}}|$ όπου το i απαριθμεί τα φορτία πήγες που έχετε τοποθετήσει στις θέσεις $\vec{r}_{\mathrm{i}}$. Θεωρείστε για απλότητα ότι τα φορτία πηγές κείτονται στο επίπεδο xy ($z = 0$) και έχουν $|q_{\mathrm{i}}| = 1$, $k = 1$. Λύστε τις μη-γραμμικές εξισώσεις $V(x, y) = V_{\mathrm{ref}}$ στο επίπεδο xy ($z = 0$), χρησιμοποιώντας την μέθοδο τις διχοτόμησης (Bisection) δίνοντας μόνοι σας κάποιες τιμές για στο δυναμικό αναφοράς V_{ref}[3] και υπολογίζοντας για ποια y το δυναμικό ισούται με V_{ref} για $x = [-5.0, -4.9, ...4.9, 5.0]$. Ως παράδειγμα, θεωρείστε τις δύο παρακάτω κατανομές φορτίου που βρίσκονται στο επίπεδο xy ($z = 0$).



Μια πιθανή υλοποίηση του παραπάνω προγράμματος (με αντικειμενοστραφή σύνταξη) βρίσκεται στο GitHub και δίνεται ως παράδειγμα εφαρμογής στην φυσική, αλγορίθμων που λύνουν γρήγορα και αυτοματοποιημένα μη-γραμμικές εξισώσεις. Φτιάξτε τις δικές σας υλοποιήσεις/γραφικά με όποιον τρόπο θέλετε.



[3] π.χ. $V_{\mathrm{ref}} = V(0.25, 0), V(0, 0.25)...V(1.5, 0), V(2.5, 0), V(3.0, 0)$.

Πρόβλημα 16 (μη παραδοτέο)

Έστω η αναδρομική σχέση σταθέρου σημείου $x_{\mathrm{n+1}} = 5 + \sqrt{x_{\mathrm{n}}}$, με $x_0 = 4$. Βρείτε αναλυτικά το σταθερό σημείο ρ για $n \to \infty$, λύνοντας την εξίσωση $\rho = 5 + \sqrt{\rho}$. Γράψτε υπολογιστικό αλγόριθμο που να υπολογίζει τα x_{n} και βρείτε πόσες επαναλήψεις χρειάζονται για να γίνει το $|x_{\mathrm{n+1}} - x_{\mathrm{n}}| < 10^{-6}$.

Η άσκηση αυτή είναι υποσύνολο λυμένης άσκησης στο GitHub και στις σημειώσεις του μαθήματος (2022) υπάρχει αναλυτική εκτίμηση του σφάλματος $|x_{\mathrm{n}} - \rho|$.

Πρόβλημα 17 (μη παραδοτέο)

Απαντήσεις στην επομένη σελίδα.

α) Να υπολογιστούν οι τρεις πρώτες επαναλήψεις των μεθόδων Gauss-Seidel και Jacobi για το σύστημα $AX = b$, με

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

έχοντας σαν αρχική εκτίμηση το $X^{\mathrm{T}} = [0, 0, 0]^{\mathrm{T}}$. Να διερευνηθεί η συμπεριφορά των Gauss-Seidel και Jacobi για το ίδιο πρόβλημα και $n = 200$ επαναλήψεις.

β) Να λυθεί το σύστημα[4] $AX = b$, με

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

και

$$b = [4, -1, -5, -2, \quad 2, \quad 2, -1, \quad 1, \quad 6]^{\mathrm{T}}$$

Να επαληθευθεί η ορθότητα των λύσεων υπολογίζοντας τη συμβατότητα του $AX - b$ με το μηδενικό διάνυσμα (πίνακα-στήλη) για τα ερωτήματα α) και β).

[4] Πίνακες της μορφής A προκύπτουν κατά την διακριτοποίηση της εξίσωσης Poisson σε τετραγωνικό πλέγμα στις δυο διαστάσεις, βλέπε σημειώσεις μαθήματος – παράδειγμα με $\nabla^2\phi(x, y) = -\rho(x, y)/\epsilon$.

Απαντήσεις:

α) Για $n = 3$ παίρνουμε

$$X = [1.347, -1.116, \quad 0.884]^{\mathrm{T}}$$

για την Gauss-Seidel και

$$X = [2.917, -1.389, \quad 0.167]^{\mathrm{T}}$$

για την Jacobi. Για $n = 200$ παίρνουμε

$$X = [1, -1, \quad 1]^{\mathrm{T}}$$

για την Gauss-Seidel και

$$X = [\sim 10^{37}, \sim 10^{37}, \sim 10^{37}]^{\mathrm{T}}$$

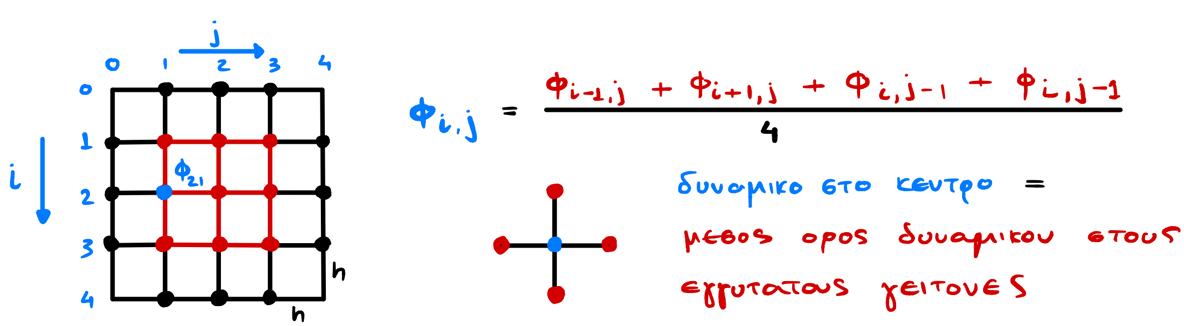
για την Jacobi (δε συγκλίνει). Εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό AX επαληθεύουμε ότι πράγματι το διάνυσμα που συγκλίνει η Gauss-Seidel αποτελεί την λύση του συστήματος.

β) Η λύση του συστήματος είναι η

$$X = [1, \quad 0, -1, \quad 0, \quad 1, \quad 1, \quad 0, \quad 1, \quad 2]^{T}.$$

Εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό AX επαληθεύουμε ότι πράγματι το διάνυσμα αυτό αποτελεί λύση του συστήματος.

Πρόβλημα 18 – Εφαρμογή (μη παραδοτέο)



Δείξτε ότι το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \\ \phi_{13} \\ \phi_{21} \\ \phi_{22} \\ \phi_{23} \\ \phi_{31} \\ \phi_{32} \\ \phi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{01} + \phi_{10} \\ \phi_{02} \\ \phi_{03} + \phi_{04} \\ \phi_{20} \\ 0 \\ \phi_{24} \\ \phi_{41} + \phi_{30} \\ \phi_{42} \\ \phi_{43} + \phi_{34} \end{bmatrix}$$

αντιστοιχεί στην επίλυση της εξίσωσης Laplace $\nabla^2\phi(x,y) = 0$ για την εύρεση του δυναμικού πάνω σε ένα τετραγωνικό πλέγμα

$$\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial y^2} \approx \frac{\phi(x+h,y) + \phi(x-h,y) + \phi(x,y+h) + \phi(x,y-h) - 4\phi(x,y)}{h^2}$$

όταν το δυναμικό στο σύνορο είναι γνωστό (πρόβλημα Dirichlet), όπου h η στοιχειώδης απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών σημείων και $\phi_{ij} = \phi(ih, jh)$. Χρησιμοποιείστε ανάπτυγμα Taylor κρατώντας όρους μέχρι $O(h^2)$

$$\begin{aligned} \phi(x \pm h, y) &= \phi(x,y) \pm \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x^2}h^2 + O(h^3) \\ \phi(x, y \pm h) &= \phi(x,y) \pm \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial y^2}h^2 + O(h^3) \end{aligned}$$

για να δείξετε ότι το δυναμικό σε ένα σημείο του πλέγματος ισούται (κατά προσέγγιση) με το μέσο όρου του δυναμικού των εγγύτατων γειτόνων

$$4\phi_{i,j} = \phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1}.$$

Ως εφαρμογή, θεωρείστε ότι $h = 1$ και ότι το δυναμικό στο σύνορο είναι παντού 0 εκτός από την πάνω πλευρά οπού γίνεται 3 ($\phi_{0,j} = 3, \phi_{4,j} = \phi_{i,0} = \phi_{i,4} = 0$). Δείξτε ότι για την παραπάνω συνοριακή συνθήκη, το δυναμικό στο εσωτερικό είναι $\phi_{11} = \phi_{13} \approx 1.29$, $\phi_{12} \approx 1.58$, $\phi_{21} = \phi_{23} \approx 0.56$, $\phi_{22} \approx 0.75$ και $\phi_{31} = \phi_{33} \approx 0.21$, $\phi_{22} \approx 0.29$.

Συστήματα με αραιούς πίνακες (sparce matrix) ίδιας περιοδικής μορφής με αυτόν που παρουσιάστηκε στην εφαρμογή αυτή (που ήταν μόλις διαστάσεων 3×3), χρησιμοποιούνται για την διακριτοποίηση της εξίσωσης Laplace σε μεγάλα πλέγματα $n \times n$. Η επίλυση αυτών γίνεται (συνήθως) με επαναληπτικές μεθόδους, καθώς οι ακριβείς μέθοδοι επίλυσης (π.χ. LU) έχουν απαγορευτικό χρόνο εκτέλεσης $\sim O(2n^3/3)$.

Πρόβλημα 19 (μη παραδοτέο)

Να μελετηθεί η ευστάθεια της λύσης του συστήματος

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2+\epsilon & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

με την μέθοδο απαλοιφής Gauss, με και δίχως μερική οδήγηση. Διερευνήστε την ευστάθεια της λύσης θέτοντας διαδοχικά πολύ μικρές τιμές για την παράμετρο ϵ π.χ., $\epsilon = 0, 10^{-15}, 2 \times 10^{-15}, 9 \times 10^{-15}, 10^{-16}$.

Πρόβλημα 20 (μη παραδοτέο)

α) Χρησιμοποιώντας το υπόδειγμα της λογικής του κώδικα που παρατίθεται, να υπολογιστεί το $\epsilon > 0$ που ικανοποιεί την σχέση $1.0 + \epsilon = 1.0$ για αριθμούς κινητής υποδιαστολής διπλής ακρίβειας (double precision – binary64). Έπειτα, για $p(x) = x^2$, να διερευνηθεί η τιμή του λόγου

$$\left.\frac{p(x+n\epsilon)-p(x)}{n\epsilon}\right|_{x=2}, \tag{2}$$

για $n = 1, 2, 3, 4, 5, 50000, 50001, 50002, 50003$. Θεωρώντας ότι η εξ. (2) αποτελεί έναν αριθμητικό εκτιμητή της παραγώγου της $p(x)$ στο $x = 2$, να υπολογιστεί το σχετικό σφάλμα[5] για τις τιμές του n που δίνονται.

β) Να υπολογιστούν οι λόγοι:

(I) $(0.1 + 0.1 - 0.2)/\epsilon$

(II) $(0.1 + 0.2 - 0.3)/\epsilon$

(III) $(7./3. - 4./3. - 3./3.)/\epsilon$

Υπόδειγμα κώδικα για τον υπολογισμό του ϵ:

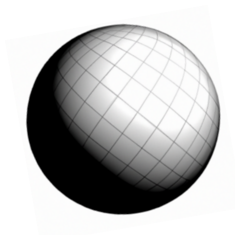
```
/*   C/C++   */
double e = 1.0;
while(1.0 + e != 1.0) e = 0.5*e;

# Python
e = 1.0
while(1.0 + e != 1.0): e = 0.5*e
```

[5] Γενικός ορισμός, αν $\hat{w}$ εκτιμητής του w, το απολυτό σχετικό σφάλμα του $\hat{w}$ είναι $|(w-\hat{w})/w|$.

Πρόβλημα 21 – D-σφαίρα (*)

Η άσκηση αυτή είναι προϊόν συζήτησης που είχα με τον Καθ. κ. Ι. Παπαδημητρίου.

Βρείτε τον όγκο μίας στερεάς σφαίρας (μπάλας)[6] μοναδιαίας ακτίνας ($R = 1$) στις $D-$ διαστάσεις.

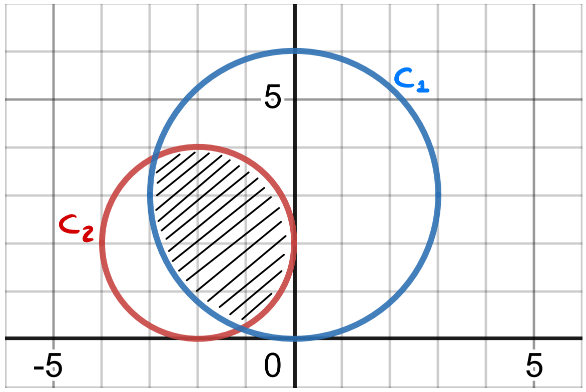


Φτιάξτε ένα διάγραμμα που να έχει στον οριζόντιο άξονα τον αριθμό των διαστάσεων και στον κατακόρυφο τον όγκο που υπολογίσατε και την αβεβαιότητα αυτού απεικονισμένο με την χρήση errorbars. Βρείτε το μέγιστο της κατανομής στο διάστημα $1 \leq D \leq 16$.

Στείλτε μου το διάγραμμα που φτιάξατε στο compPhysicsEKPA@gmail.com.

[6] Ο όγκος μιας στεραίας σφαίρας στις $n = 3$ διαστάσεις είναι $\frac{4}{3}\pi R^3$, στις $n = 2$ γίνεται πR^2 και για $n = 1$ είναι απλά $2R$.

Πρόβλημα 22 (μη παραδοτέο)



Θεωρήστε την γραμμοσκιασμένη επιφάνεια που σχηματίζεται λόγω επικάλυψης μεταξύ δύο κύκλων C_1 και C_2 με εξισώσεις:

$$x^2 + (y-3)^2 = 3^2 \; [C_1]$$
$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 2^2 \; [C_2]$$

α) Υπολογίστε αριθμητικά το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας (I) καθώς και την αβεβαιότητα αυτού (δI), χρησιμοποιώντας $N = 2 \times 10^4$ τυχαίους αριθμούς με ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1).

β) Πόσο μεγάλο αναμένουμε να είναι το δI, αν έχουμε στην διάθεσή μας $N = 2 \times 10^{18}$ τυχαίους αριθμούς με ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1);

Δίνεται ο ακριβής υπολογισμός του ολοκληρώματος, $I = 8.378598258$.

Η λύση του προβλήματος βρίσκεται στο github.